Transcription en LaTeX d'un chapitre du livre de E. T. Bell *Les grands mathématiciens*

Chapitre IV
Fermat
Le Prince des amateurs

J'ai trouvé un très grand nombre de théorèmes extrêmement beaux.
P. Fermat

Tous nos canards ne peuvent être des cygnes : après avoir présenté Descartes comme un des premiers mathématiciens de tous les temps, il nous faut justifier l'assertion, fréquente et rarement contredite, que le plus grand mathématicien du XVII^{e} siècle a été Fermat (1601?-1665), contemporain de Descartes ; c'est laisser Newton (1642-1727) de côté ; mais on peut arguer que comme mathématicien pur, Fermat a été au moins l'égal de Newton, et qu'à peu près un tiers de la vie de Newton s'est écoulée au XVIII^{e} vérifier siècle, tandis que celle de Fermat ne sort pas des limites du XVII^{e}.

Newton paraît avoir considéré ses mathématiques surtout comme un instrument d'exploration scientifique, il a porté son principal effort sur celle-ci ; par contre, Fermat était plus vivement attiré vers les mathématiques pures, bien qu'il ait fait des travaux considérables dans les applications des mathématiques à la science, en particulier à l'optique.

C'est avec la publication de la géométrie analytique de Descartes, en 1637, que les mathématiques sont entrées dans la période moderne, elles devaient encore pendant de longues années occuper un domaine si modeste qu'un homme doué pouvait raisonnablement espérer réussir à la fois dans les mathématiques pures et dans leurs applications.

Comme mathématicien pur, Newton a atteint son apogée dans l'invention du calcul différentiel et intégral, invention qui appartient aussi, indépendamment, à Leibniz. Nous en parlerons plus loin ; pour le moment, on peut remarquer que Fermat a conçu et appliqué l'idée maîtresse du calcul différentiel treize ans avant la naissance de Newton et dix-sept ans avant celle de Leibniz ; cependant, il n'a pas, comme Leibniz, réduit sa méthode à un corps de règles pratiques que même un sot peut appliquer aux problèmes faciles.

Quant à Descartes et Fermat, on peut dire qu'ils ont, indépendamment l'un de l'autre, inventé la géométrie analytique, et la correspondance qu'ils ont entretenue à ce sujet n'infirme pas cette affirmation. La majeure partie de l'effort de Descartes s'est appliquée à des recherches scientifiques diverses, à l'élaboration de sa philosophie, à son absurde "théorie des tourbillons" du système solaire qui fut longtemps, même en Angleterre, une rivale sérieuse de la théorie d'une si magnifique simplicité et sans métaphysique, de la gravitation universelle de Newton. Au contraire, Fermat

Référence :
https://www.bibliotheque.nat.tn/KHNU/doc/SYRACUSE/90812/e-t-bell-les-grands-mathematiciens-zenon-eudox-archimede-descartes-kummer-et-dedekind-poncare-cantor?$_lg = fr - FR$.

Transcription : Denise Vella-Chemla, août 2023.

ne paraît jamais avoir eu, comme Descartes et Pascal, la tentation insidieuse de philosopher sur Dieu, sur l'Homme et sur l'Univers ; aussi, après avoir donné une partie de son temps au calcul différentiel et à la géométrie analytique, et avoir mené une existence sereine et laborieuse pour gagner sa vie, il eut encore le loisir de consacrer le restant de son énergie à son passe-temps favori, les mathématiques pures, et à accomplir sa plus grande œuvre, la fondation de la théorie des nombres, sur laquelle repose son droit absolu et indiscutable à l'immortalité.

On verra plus loin que Fermat partage avec Pascal la création de la théorie mathématique de la probabilité. Si toutes ces œuvres capitales ne suffisent pas pour placer Fermat au premier rang de ses contemporains, en mathématiques pures, que faut-il de plus ? Fermat était un créateur né ; il était aussi, au moins en ce qui concerne ses travaux scientifiques et mathématiques, un amateur, dans l'acception la plus stricte du mot ; il est sans doute au premier rang des amateurs, sinon le premier, dans l'histoire de la science.

La vie de Fermat a été paisible, laborieuse, sans événements marquants, mais il a su en tirer un parti remarquable : les faits essentiels de sa carrière tranquille ne sont pas longs à raconter. Le fils du marchand de cuir Dominique Fermat, deuxième échevin de Beaumont, et de Claire de Long, fille d'une famille de juristes parlementaires, était né à Beaumont-de-Lomagne au mois d'août 1601 (la date exacte est inconnue ; on connaît seulement celle du baptême, 20 août). Il reçut sa première instruction dans sa ville natale et continua ses études, pour se préparer à la magistrature, à Toulouse. Comme Fermat a vécu modestement durant toute sa vie, évitant les discussions inutiles, et qu'il n'a pas eu, comme Pascal avec sa Gilberte, une tendre sœur pour enregistrer ses prodiges d'enfant pour la postérité, on connaît bien peu de chose de sa vie d'étudiant. Les résultats et les œuvres de son âge mûr permettent de penser qu'il fût un élève brillant ; sans une base solide de connaissances exactes, personne n'aurait pu devenir le littérateur et l'humaniste qu'a été Fermat. Mais on ne saurait attribuer à ses premières études ses merveilleux travaux en mathématiques et en théorie des nombres, car ces domaines n'étaient pas encore connus à l'époque où il était étudiant.

Voici les seuls événements à noter dans sa vie matérielle : son installation à Toulouse, à l'âge de trente ans (14 mai 1631) comme commissaire des requêtes ; son mariage le 1er juin de la même année avec Louise de Long, sa cousine maternelle, qui lui donna cinq enfants : trois fils dont l'un, Clément Samuel, devint l'exécuteur des œuvres scientifiques de son père, et deux filles qui prirent le voile ; enfin, sa promotion, en 1618, aux fonctions de Conseiller du Roi au Parlement de Toulouse, qu'il remplit pendant dix-sept ans avec dignité, intégrité et grande capacité : toute sa vie active de trente-quatre ans fut consacrée au service scrupuleux de l'État. Il mourut à Castres le 12 janvier 1665, à soixante-cinq ans, deux jours après y avoir plaidé un procès. Est-ce là "une histoire" ? Il pourrait nous répondre : "Grâce à Dieu, Monsieur, je n'en ai pas". Et néanmoins cet homme paisible, honnête, bien équilibré, scrupuleusement équitable, remplit un des plus beaux chapitres de l'histoire des mathématiques.

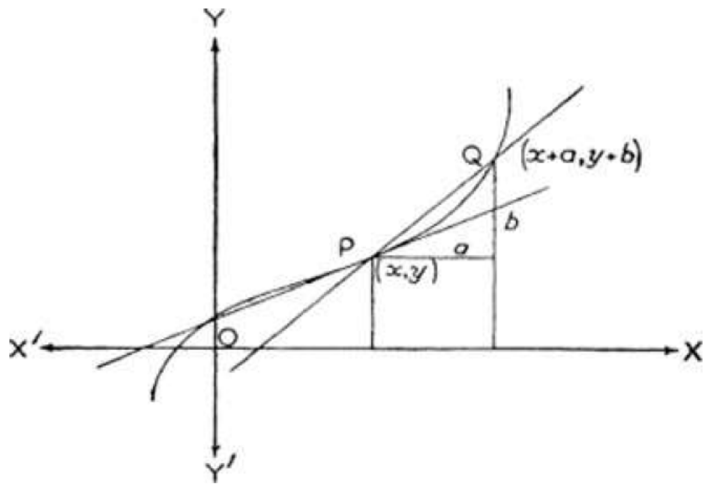
Son histoire, ce sont ses travaux, ou plutôt ses récréations, Pour l'amour pur des mathématiques ; ils sont si simples (à expliquer, mais non pas à imiter ou à créer) que tout écolier d'une intelligence normale peut en comprendre la nature et en apprécier la beauté. L'œuvre de ce prince des amateurs en mathématiques a exercé sur ceux-ci un attrait irrésistible pendant les trois derniers siècles dans tous les pays civilisés : la théorie des nombres, comme on l'appelle, est probablement le seul domaine des mathématiques où un amateur de talent puisse aujourd'hui espérer découvrir quelque chose d'intéressant.

Disons d'abord quelques mots de son "érudition particulière" dans ce qu'on appelle les Humanités. Il connaissait les principales langues européennes et les littératures de l'Europe continentale ; les philologies grecque et latine lui doivent d'importantes corrections. Selon la mode de l'époque dans les milieux cultivés, il composait des vers, en français, latin et espagnol, et il y montrait beaucoup de goût et une grande habileté. Nous comprendrons sa vie studieuse, uniforme, en nous le représentant comme un homme affable, point susceptible à la critique (contrairement à Newton dans ses dernières années) ou que l'éloge n'a jamais enorgueilli, mais non dépourvu d'une certaine vanité que Descartes, tout son opposé à tous égards, caractérisait en disant : M. de Fermat est un Gascon, moi pas. Cette allusion aux Gascons vise sans doute cette aimable sorte de fanfaronnade que certains écrivains français attribuent aux habitants de la Gascogne. On peut retrouver un peu de ce caractère dans les lettres de Fermat, mais ses gasconnades sont toujours plutôt naïves et inoffensives et rien de ce qu'il aurait pu penser à juste titre de son œuvre si sa tête en avait été gonflée comme un ballon. Du reste, il ne faut pas oublier que Descartes n'était pas un juge strictement impartial. Nous noterons dans un moment comment son obstination de soldat le mit en mauvaise posture dans sa discussion prolongée avec le "Gascon" au sujet de la question extrêmement importante des tangentes.

Certains, considérant les exigences des fonctions officielles de Fermat et le volume considérable de ses travaux supérieurs en mathématiques, se sont demandé comment il avait trouvé le temps nécessaire pour tout cela. Un critique français a émis l'idée, assez vraisemblable, que ses fonctions de conseiller du roi étaient plutôt un adjuvant qu'un frein pour son activité intellectuelle. D'ailleurs, les conseillers parlementaires étaient plutôt bien vus lorsqu'ils vivaient à l'écart de leurs concitoyens et s'abstenaient de toute activité sociale superflue, de crainte de se laisser corrompre dans l'exercice de leur charge. Fermat a donc pu avoir force loisirs.

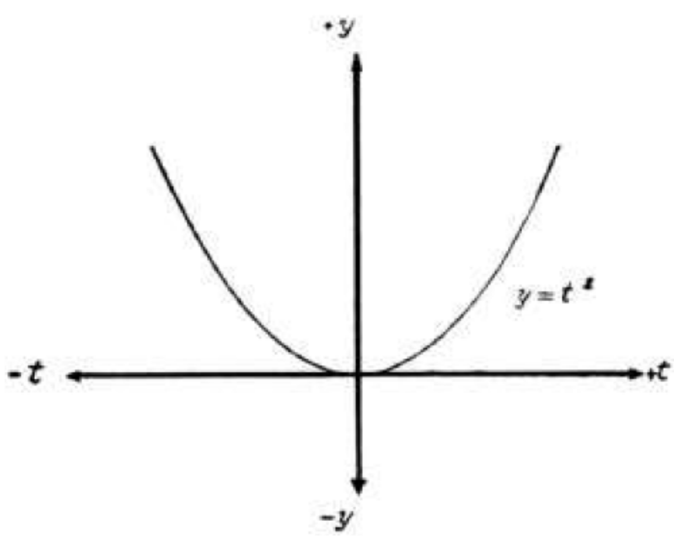
Voyons maintenant brièvement la part de Fermat dans l'évolution du calcul différentiel. Comme on l'a déjà fait remarquer dans le chapitre concernant Archimède, le problème consistant à tracer une tangente à un arc continu et sans boucle d'une courbe en un point donné quelconque est un équivalent géométrique du problème fondamental du calcul différentiel. Il suffit, pour définir correctement ce que signifie ici continu de dire que c'est un arc "lisse (uni) sans interruption ni sauts brusques" ; la définition mathématique et rigoureusement exacte du terme exigerait des pages de définitions et discriminations subtiles qui, disons le franchement, auraient surpris les inventeurs de ce calcul eux-mêmes, y compris Newton et Leibniz ; et il est fort probable aussi que si toutes les subtilités exigées pour les étudiants modernes s'étaient présentées aux créateurs, le calcul différentiel n'aurait jamais été inventé.

Les créateurs de ce calcul, y compris Fermat, se sont appuyés pour progresser, sur l'intuition géométrique et physique (le plus souvent cinématique et dynamique) ; ils ont regardé ce qui se passait dans leur imagination à propos du tracé d'une "courbe continue", ont décrit le procédé pour mener une tangente à la courbe en un de ses points P. Prenant un autre point Q sur la courbe, traçant la droite PQ, faisant en pensée glisser le point Q le long de l'arc, de P en Q. jusqu'à ce que Q coïncide avec P, la corde PQ ainsi obtenue, à sa position limite, est devenue la tangente PP à la courbe au point P, ce qu'ils cherchaient.



Le pas suivant consistait à traduire ce tableau en langage algébrique ou analytique. Connaissant les coordonnées x, y, du point P, et les coordonnés $x+a, y+b$, du point Q avant qu'il se mette à glisser vers P, ils ont examiné le tracé et vu que la pente de la corde PQ était égale à b/a, ce qui est évidemment une mesure de la "raideur" de la corde par rapport à l'axe des x (la ligne suivant laquelle on mesure les distances x) ; cette "raideur" est précisément ce qu'on appelle la pente. Ceci prouve que la pente cherchée de la tangente en P (après que Q a glissé pour coincider avec P) sera la valeur limite de b/a lorsque b et a tendent simultanément vers zéro, car $x+a, y+b$, coordonnées de Q, deviennent finalement x et y, coordonnées de P. Cette valeur limite est la pente cherchée. Ayant la pente et le point P, il est facile de tracer la tangente.

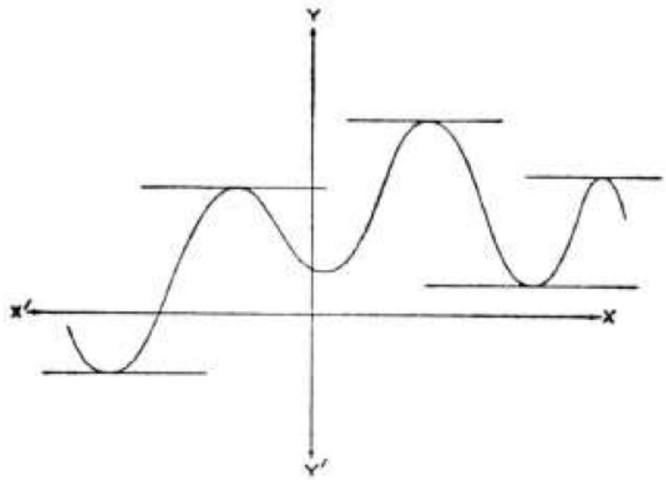
Ce procédé n'est pas exactement celui de Fermat pour tracer les tangentes, mais il lui est sensiblement équivalent.



Comment tout ceci a-t-il mérité l'attention sérieuse d'un homme raisonnable et pratique ? C'est une longue histoire, dont nous ne donnerons ici qu'un aperçu, nous réservant d'en dire davantage à propos de Newton. Une des notions fondamentales de la dynamique, c'est celle de la vitesse d'un mobile. Si nous inscrivons les distances parcourues par le point mobile en fonction des temps, nous aurons une ligne, droite ou courbe, qui montre immédiatement le mouvement du point, et la pente de la ligne en un point quelconque donné sera évidemment la vitesse du point à l'instant correspondant à la position du point ; plus le point se déplacera rapidement, plus la perte de la tangente en ce point sera raide : cette pente mesure, en fait, la vitesse du point en une position quelconque de son parcours. Le problème du mouvement, traduit en géométrie, revient exactement à trouver la pente de la tangente en un point donné d'une courbe. Il y a des problèmes similaires concernant les plans tangents aux surfaces (qui ont aussi des interprétations importantes en mécanique et physique mathématique) et qui sont tous abordés par le calcul différentiel, dont nous venons d'essayer de décrire le problème fondamental, tel qu'il s'est présenté à Fermat et ses successeurs.

Nous pouvons maintenant indiquer un autre emploi de ce calcul. Supposons qu'une certaine quantité y soit une "fonction" d'une autre, t, ce que nous écrivons $y = f(t)$; ceci veut dire que lorsqu'un nombre déterminé, par exemple 10, est mis à la place de t (et alors nous avons $f(10)$ - fonction f de 10 - nous pouvons calculer, au moyen de l'expression algébrique de f, supposée donnée, la valeur correspondante de y qui est ici $y = f(10)$. Supposons, à titre d'exemple, que cette fonction particulière de t soit celle qu'on écrit en algèbre t^2 ou $t \times t$. Alors, si $t = 10, y = 10^2 = 100$, pour cette valeur de t ; si $t = 1/2, y = 1/4$ et ainsi de suite, pour toute valeur de t.

Tout ceci est familier à quiconque a suivi l'enseignement secondaire d'il y a trente ou quarante ans, mais certains peuvent avoir oublié l'arithmétique qu'ils ont apprise dans leur enfance, comme d'autres pourraient ne plus savoir décliner mensa en latin même s'il s'agissait de sauver leur âme. En tout cas, ceux qui ont le moins de mémoire comprendront que nous pouvons faire le tracé de $y = f(t)$ pour chaque forme particulière de f (lorsque $f(t)$ est t^2, la figure est une parabole). Imaginons le tracé exécuté ; s'il y a des points maxima ou minima, c'est-à-dire des points plus hauts ou plus bas que tous ceux de leur voisinage immédiat, nous observons que la tangente en chacun de ces points est parallèle à l'axe des x ; autrement dit, la pente de la tangente en un extremum (maximum ou minimum) de $f(t)$ est zéro. Ainsi donc, si nous cherchons les extrema d'une fonction donnée $f(t)$, nous devrons d'abord résoudre notre problème de pente pour la courbe particulière $f(t)$; ensuite, ayant trouvé la pente pour le point général t, rendre égale à zéro l'expression algébrique de cette pente, pour trouver les valeurs de t correspondant aux extrema. Ceci est substantiellement ce que Fermat a fait dans sa méthode des maxima et minima qu'il a imaginée en 1628-29, mais qui n'a été rendue qu'à demi-publique dix ans plus tard, lorsque Fermat en envoya un exposé à Descartes par l'intermédiaire de Mersenne.



Les applications scientifiques de ce procédé simple (dûment développé, bien entendu, s'il s'agissait de problèmes plus compliqués que celui que nous venons de citer) sont nombreuses et étendues. En mécanique, par exemple, comme Lagrange l'a découvert, il y a une certaine "fonction des positions (coordonnées) et des vitesses des corps en cause dans un problème qui, pris à son extremum", nous fournit les équations du mouvement du système considéré ; et celles-ci, à leur tour, nous permettent de déterminer le mouvement, de le décrire complètement, à chaque instant donné. En physique, il y a plusieurs fonctions analogues, dont chacune résume la plus grande partie d'une branche étendue de la physique mathématique, à la seule condition que la fonction en question soit un extremum[1]. En 1916, Hilbert en a trouvé une pour la relativité généralisée. Ainsi donc, Fermat ne gaspillait pas son temps quand il s'amusait, dans les loisirs que lui laissaient ses occupations de magistrat, à attaquer le problème des maxima et minima. Il a fait lui-même une belle et surprenante application de ses principes à l'optique. En passant, on peut faire observer que cette découverte particulière a été le germe de la nouvelle théorie des quanta (sous son aspect mathématique, celui de la mécanique ondulatoire), élaborée depuis 1926, Fermat a découvert ce qu'on appelle habituellement "le principe du moindre temps ; il serait plus exact de dire "extrême" (moindre ou plus grand), au lieu de moindre.

D'après ce principe, si un rayon lumineux passe d'un point A à un point B et se trouve au cours du trajet, réfléchi et réfracté d'une manière quelconque, le trajet qu'il doit suivre peut se calculer, y compris tous ses coudes dus à la réfraction et tous ses retours en arrière et en avant dus à la réflexion, en partant de la seule condition que le temps passé pour aller de A en B soit un extremum (voir la note précédente).

De ce principe, Fermat a déduit les lois de la réflexion et de la réfraction qui nous sont familières : l'angle d'incidence (réflexion) est égal à l'angle de réflexion : le sinus de l'angle d'incidence (réfraction) a un rapport constant avec le sinus de l'angle de réfraction au passage d'un milieu à l'autre. Fermat a été le premier à appliquer la géométrie analytique à l'espace à trois dimensions ; Descartes se contentait de deux. Cette extension, familière aujourd'hui à tous les étudiants, ne serait

[1]Cet énoncé est suffisamment précis pour notre exposé. En réalité, les valeurs des variables (coordonnées et vitesses) qui rendent la fonction en question stationnaire (en gros, ne croissant pas et ne diminuant pas) sont les valeurs cherchées. Un extremum est stationnaire, mais une valeur stationnaire n'est pas nécessairement un extremum.

pas évidente d'elle-même pour un esprit même bien doué qui ne possèderait que les développements de Descartes. On peut dire qu'il est habituellement plus difficile d'étendre un système particulier de géométrie de l'espace à deux dimensions à l'espace à trois, que de passer de ce dernier à l'espace à quatre, cinq... n dimensions, Fermat a rectifié Descartes sur un point essentiel, celui de la classification des courbes d'après leurs degrés. Il paraît tout naturel que le quelque peu chatouilleux Descartes se soit querellé avec l'impassible Gascon. Le soldat se montra fréquemment aigri et irascible au cours de sa controverse au sujet de la méthode des tangentes de Fermat ; le juriste impassible était toujours courtois sans affectation. Comme il arrive d'ordinaire, c'est l'homme qui conserva son sang-froid qui eut le dessus ; mais Fermat méritait de vaincre, non pas parce qu'il était plus habile dans la discussion, mais parce qu'il avait raison.

En passant, disons qu'on aurait pu supposer que Newton avait eu connaissance de l'emploi que Fermat avait fait du calcul différentiel et l'aurait signalé ; jusqu'en 1934, on n'en avait pas la preuve ; mais, cette année-là, le professeur L. T. More a publié, dans sa biographie de Newton, une lettre, jusqu'alors inconnue, dans laquelle ce dernier déclare que la méthode du tracé des tangentes de Fermat lui a donné l'idée de la méthode du calcul différentiel.

Et maintenant, revenons à la plus grande œuvre de Fermat, celle qui est intelligible à tous, mathématiciens et amateurs. C'est ce qu'on appelle "la théorie des nombres", ou "l'arithmétique supérieure", ou enfin, pour user du mot simple qui était encore assez bon pour Gauss, l'arithmétique.

Les Grecs séparaient les matières diverses que nous groupons dans les manuels élémentaires sous le nom d'"arithmétique", en deux compartiments distincts, la logistique et l'arithmétique, la première concernant les applications pratiques des comptes au commerce et à la vie journalière, la seconde ayant le sens que lui donnaient Fermat et Gauss, qui cherchaient à découvrir les propriétés des nombres en eux-mêmes.

L'arithmétique, dans ses ultimes problèmes, probablement les plus difficiles, recherche les relations réciproques de ces nombres entiers, 1, 2, 3, 4, etc., que nous articulons dès que nous commençons à parler. C'est en s'efforçant d'élucider ces relations que les mathématiciens ont été amenés à l'invention de théories subtiles et abstruses en algèbre et en analyse dont des forêts de technicités obscurcissent les problèmes initiaux, ceux concernant 1, 2, 3..., mais dont la réelle justification sera la solution de ces problèmes. Entre temps, les sous-produits de ces recherches qui paraissent sans utilité récompensent amplement ceux qui les entreprennent, car ils leur suggèrent de nombreuses et fécondes méthodes applicables à d'autres domaines des mathématiques en contact direct avec l'univers physique. Pour ne citer qu'un exemple, la dernière phase de l'algèbre, celle que cultivent aujourd'hui les algébristes professionnels et qui éclaire d'une manière entièrement nouvelle la théorie des équations algébriques, tire directement son origine des essais qui ont été faits en vue de résoudre le dernier théorème de Fermat (qui sera exposé quand nous en aurons préparé le terrain).

Commençons par le fameux énoncé de Fermat sur les nombres premiers. Un nombre premier positif est tout nombre plus grand que 1 qui n'a comme diviseur (sans reste) que 1 et lui-même : par exemple 2, 3, 5, 7, 13, 17 sont des nombres premiers, ainsi que $257, 65\ 537$; mais 4 294 967 297 n'est pas premier, parce qu'il a 641 comme diviseur, ni le nombre 18 446 744 073 709 551 617 non plus, parce qu'il est divisible par 274 177 ; au contraire 641 et 274 177 sont premiers. Les deux très grands nombres ci-dessus sont cités à dessein, nous dirons pourquoi tout à l'heure. Rappelons une autre définition : la n$^{\text{ème}}$ puissance d'un nombre N donné est le résultat de la multiplication de N n fois par lui-même : on l'écrit N^n, où n est appelé l'exposant de la puissance n$^{\text{ème}}$; ainsi $5^2 = 5 \times 5 = 25$; $8^4 = 8 \times 8 \times 8 \times 8 = 4\ 096$. Pour assurer l'uniformité, on peut écrire N sous la forme N^l. Un échafaudage, comme 2^{3^5} signifie que nous calculons d'abord 3^5 (= 243) et que nous élevons ensuite 2 à la 243$^{\text{ème}}$ puissance : cela donne un nombre de 74 chiffres.

Le point suivant a une grande importance dans la vie de Fermat comme dans l'histoire des mathématiques. Considérons les nombres 3, 5, 17, 257, 65 537 ; ils appartiennent tous à une "série" d'une nature spéciale parce qu'ils sont tous engendrés, en partant de 1 et de 2, par le même procédé simple :

$$3 = 2 + 1, 5 = 2^2 + 1, 17 = 2^4 1, 257 = 2^8 + 1, 65\ 537 = 2^{16} + 1$$

et si nous avons soin de faire le calcul, nous verrons aisément que les deux nombres si longs cités plus haut ne sont autre chose que $2^{32} + 1$ et $2^{64} + 1$. Nous avons ainsi sept nombres appartenant à cette série, et les cinq du début sont des nombres premiers, tandis que les deux derniers ne le sont pas.

Observant la composition de cette série, nous remarquons que les exposants, savoir : 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64 ne sont autre chose que 1, que pour raison d'uniformité on écrit $2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6$. Notre série est donc de la forme $2^{2^k} + 1$, où n est successivement 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 : nous n'avons pas besoin d'ailleurs de nous arrêter à $n = 6$; en prenant $n = 7, 8, 9...$, nous pouvons continuer indéfiniment la série, en obtenant des nombres de plus en plus grands.

Supposons que nous voulions chercher si un nombre particulier de cette série est premier. Bien qu'il y ait plusieurs simplifications immédiates, et que des classes entières de diviseurs d'essai puissent être écartées après examen, bien qu'aussi l'arithmétique moderne limite les catégories de diviseurs qu'il est nécessaire d'essayer, notre problème est du même ordre de labeur pénible que serait la division du nombre donné successivement par tous les nombres premiers, 2, 3, 5, 7... inférieurs à la racine carrée de ce nombre ; si aucun d'eux ne le divise, le nombre est premier. Inutile de dire que ce travail serait prohibitif, même en usant des simplifications connues, pour une valeur de n aussi petite que 100 (le lecteur peut s'en assurer en faisant lui-même l'opération pour le cas de $n = 8$ seulement).

Fermat a affirmé que, selon sa conviction, tous les nombres de cette série sont premiers. Les nombres que nous avons cités, qui correspondent à $n = 5$ et $n = 6$, contredisent, comme nous l'avons vu, son affirmation. Le point d'intérêt historique que nous désirons faire ressortir est le suivant : Fermat a conjecturé à tort, mais il n'a pas prétendu avoir prouvé sa conjecture. Quelques années plus tard il en a donné une obscure explication, qui a fait conclure à certains critiques qu'il s'était trompé lui-même. L'importance de ce fait apparaîtra au fur et à mesure que nous avancerons.

À titre de curiosité psychologique, disons que Zerah Colburn, ce jeune calculateur de tête américain, à qui l'on demandait si le sixième nombre de Fermat (4 291 967 297) était premier ou non, répondit, après un court calcul mental, qu'il ne l'était pas, car il est divisible par 641 ; il était incapable d'expliquer par quel procédé il avait atteint ce résultat exact. Nous reparlerons de Colburn à propos d'Hamilton.

Avant de quitter “les nombres de Fermat”, $2^{2^k} + 1$, jetons un coup d’œil sur la dernière décade du XVIIIe siècle, où ces nombres mystérieux ont en partie provoqué un des deux ou trois événements les plus importants de la longue histoire des mathématiques. Pendant quelque temps, un jeune homme de dix-huit ans avait, d’après la tradition, hésité à consacrer ses magnifiques talents aux mathématiques ou à la philologie : il était également doué pour les deux. Ce qui le décida, ce fut une belle découverte concernant un problème simple de géométrie élémentaire qui est familier à tout écolier.

Un polygone régulier de n côtés a ses n côtés égaux et ses n angles égaux. Les anciens Grecs ont trouvé de bonne heure le procédé de construction, avec la règle et le compas seuls, de polygones réguliers de 3, 4, 5, 6, 8 et 10 côtés ; et c’est un problème facile, en usant de ces deux seuls instruments, de construire, en partant d’un polygone régulier ayant un nombre donné de côtés, un autre polygone en ayant un nombre double. Le pas suivant serait de chercher des procédés de construction, toujours avec la règle et le compas, de polygones réguliers de 7, 9, 11, 13... côtés. Beaucoup l’ont cherché depuis 400 ans av. J.-C., mais ne l’ont pas trouvé, parce que ces constructions sont impossibles ; malheureusement ils l’ignoraient : ce n’est que 2200 ans plus tard que le jeune homme en question hésitant entre les mathématiques et la philosophie franchit le pas suivant.

Comme on l’a indiqué, il suffit de considérer seulement les polygones ayant un nombre impair de côtés. Notre jeune homme démontra que la construction, avec la règle et le compas seuls, d’un polygone régulier à nombre de côtés impair, est possible lorsque, et seulement lorsque, ce nombre est un nombre premier de Fermat (c’est-à-dire un nombre de la forme $2^{2^k} + 1$) ou bien un nombre obtenu en multipliant entre eux des nombres de Fermat différents. Ainsi, la construction est possible pour des polygones de 3, 5, 15 côtés, comme le savaient les Grecs ; elle ne l’est pas pour 7, 9, 11, 13 côtés ; elle est possible aussi pour 17, pour 257, ou pour 65 537 côtés, ou bien pour le nombre premier suivant de la série de Fermat, s’il y en a un (ce que personne encore, en 1936, ne sait) ; enfin, la construction est possible pour $3 \times 17, 5 \times 257 \times 65.537$ côtés et ainsi de suite. C’est cette découverte, annoncée le 1er juin 1796 et faite le 30 mars précédent, qui décida de la carrière mathématique de Gauss.

Comme découverte d’un autre genre concernant les nombres, due à Fermat, nous citerons ce qu’on appelle le “Théorème de Fermat” (ne pas confondre avec son dernier théorème). Si n est un nombre entier et p un nombre premier, $n^p - n$ est divisible par p : par exemple, prenons $p = 3$ et $n = 5$; nous avons $5^3 - 5 = 125 - 5 = 120$, qui est 3×40 ; pour $p = 11, n = 2$, on a $2^{11} - 2 = 2\,048 - 2 = 2\,046$ qui est 11×186.

Il est difficile d’expliquer pourquoi certains théorèmes d’arithmétique sont considérés comme “importants”, alors que d’autres, également difficiles, sont baptisés “sans intérêt”. Un critérium, qui d’ailleurs n’est pas nécessairement concluant, c’est que le théorème servira dans d’autres domaines des mathématiques : un autre, c’est qu’il suggérera des recherches en arithmétique ou en mathématiques en général ; un troisième, c’est qu’il deviendra universel à certain point de vue. Le théorème de Fermat satisfait précisément à toutes ces conditions quelque peu arbitraires : il est d’un emploi indispensable dans bien des domaines mathématiques, en particulier dans la théorie des groupes (voir chap. XV), laquelle à son tour est la base de la théorie des équations algébriques ; il a suggéré maintes recherches, dont on peut citer aux mathématiciens qui nous lisent, comme exemple important, la question entière des racines primitives ; enfin il est universel en ce sens qu'il établit une propriété de tous les nombres premiers - des propriétés aussi générales sont extrêmement difficiles à trouver et on en connaît fort peu.

Selon son habitude, Fermat a énoncé son théorème concernant $n^p - n$ sans en donner la démonstration. Elle a été fournie pour la première fois par Leibniz dans un manuscrit non daté, mais il semble en avoir connue une avant 1683. Le lecteur peut éprouver ses moyens en essayant d'en trouver une lui-même. Tout ce qu'il est nécessaire de savoir, c'est ceci, que l'on peut démontrer, mais qu'il suffit, ici, d'admettre : un nombre entier donné ne peut être obtenu que d'une seule manière (à part la disposition des facteurs) par la multiplication de nombres premiers ; si un nombre premier divise le produit de deux nombres entiers, il divise au moins l'un d'entre eux ; par exemple, $24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$ et ne peut pas être décomposé autrement en facteurs premiers, sauf si l'on change l'ordre des facteurs ; deuxièmement, 7 divise 42 et $42 = 2 \times 21 = 3 \times 14 = 6 \times 7$. dans chacun desquels 7 divise au moins un des facteurs ; de même 98 est divisible par 7 et $98 = 7 \times 14$, où 7 divise les deux facteurs. La démonstration de ces deux faits peut être exposée en moins d'une demi-page ; elle est à la portée d'un écolier normal de quatorze ans ; mais on peut parier sans crainte que sur un million d'êtres d'intelligence normale de tout âge, moins de dix parmi ceux qui n'ont pas dépassé les mathématiques secondaires arriveraient à en trouver la démonstration dans un temps raisonnable, disons un an.

Il semble que ce soit le moment de citer quelques remarques célèbres de Gauss au sujet du domaine favori de Fermat et du sien propre ; elles sont extraites de l'introduction de Gauss au Recueil des travaux mathématiques d'Eisenstein, publié en 1847.

> *"L'arithmétique supérieure nous offre une série inépuisable de vérités intéressantes, de vérités qui ne sont pas isolées, mais qui ont entre elles une relation étroite et entre lesquelles, au fur et à mesure de l'extension de nos connaissances, nous découvrons continuellement des liens nouveaux et quelquefois inattendus. Une grande partie de ces théories tire un attrait supplémentaire de ce fait particulier que des propositions importantes, qui ont le caractère de la plus grande simplicité, sont souvent aisées à découvrir par induction, et sont cependant si profondes que nous ne pouvons trouver leur démonstration qu'après de nombreuses et vaines tentatives ; et même lorsque nous y réussissons, ce n'est souvent qu'au prix de quelque procédé fastidieux et artificiel, tandis que des méthodes plus simples peuvent rester longtemps cachées*[a].
>
> [a]Le texte anglais, traduit de l'allemand, est du mathématicien Irlandais H. J. S. Smith (1826-1883).

Une de ces vérités intéressantes mentionnées par Gauss est quelquefois considérée comme une des plus belles (mais non pas des plus importantes) découvertes de Fermat dans la théorie des nombres : tout nombre premier de la forme $4n + 1$ est une somme de deux carrés et n'est cette somme que d'une seule manière. On démontre aisément qu'aucun nombre de la forme $4n - 1$ n'est une somme de deux carrés ; et comme tous les nombres premiers supérieurs à 2 sont, comme on le voit aisément, de la première ou de la deuxième forme, la proposition est démontrée : par exemple 37, divisé par 4, donne pour reste 1 ; done 37 doit être la somme de deux carrés de nombres entiers ;

par des essais (il y a de meilleurs procédés), nous trouvons en effet que $37 = 36 + 1 = 6^2 + 1$, et qu'il n'y a pas d'autres carrés, de x et y, tels que $37 = x^2 + y^2$; pour le nombre premier 101, nous avons $101 = 1 + 100$; pour $41 = 16 + 25 = 4^2 + 5^2$; d'autre part, $19 = 4x5 - 1$, n'est pas une somme de deux carrés.

Comme pour presque tous ses travaux d'arithmétique, Fermat n'a pas laissé de démonstration de ce théorème. Il a été démontré pour la première fois par le grand Euler, en 1749, après qu'il y eut travaillé, de temps à autre, pendant sept ans. Mais Fermat décrit la méthode ingénieuse, inventée par lui, par laquelle il l'a obtenu ainsi que certains autres de ses résultats merveilleux ; cette méthode s'appelle la descente infinie et elle est infiniment plus difficile à exécuter que l'ascension d'Elie au ciel. Son exposé est à la fois concis et clair et voici ce qu'il écrivait à Carcavi au mois d'août 1659 :

> *"Je fus longtemps sans pouvoir appliquer ma méthode aux questions affirmatives, parce que le tour et le biais pour y venir est beaucoup plus malaisé que celui dont je me sers pour les négatives. De sorte que lorsqu'il me fallut démontrer que tout nombre premier qui surpasse de l'unité un multiple de 4 est composé de deux quarrés, je me trouvai en belle peine. Mais enfin une méditation diverses fois répétée me donna les lumières qui me manquaient et les questions affirmatives passèrent par ma méthode à l'aide de quelques nouveaux principes qu'il y fallut joindre par nécessité. Ce progrès de mon raisonnement en ces questions affirmatives est tel : si un nombre premier pris à discrétion qui surpasse de l'unité un multiple de 4 n'est point composé de deux quarrés, il y aura un nombre premier de même nature, moindre que le donné et (par conséquent) ensuite un troisième encore moindre, etc., en descendant à l'infini jusques à ce que vous arriviez au nombre 5 qui est le moindre de tous ceux de cette nature* [$4n + 1$]*, lequel il s'ensuivrait n'être pas composé de deux quarrés, ce qu'il est pourtant. D'où on doit inférer par la déduction à l'impossible (à l'absurde] que tous ceux de cette nature sont composés de deux quarrés."*.

Toute la difficulté d'application de la méthode de la descente à un nouveau problème réside dans le premier échelon, qui consiste à démontrer que si la proposition admise ou conjecturée est vraie pour un nombre quelconque du type en question, alors elle sera vraie pour un nombre plus petit de même nature. Il n'y a pas de méthode générale, applicable à tous les problèmes, pour franchir cet échelon. Il faut, pour trouver son chemin à travers le désert, quelque chose de plus rare que la patience inépuisable ou que la "capacité infinie de prendre beaucoup de peine". On peut recommander à ceux qui s'imaginent que le génie n'est rien de plus que le talent d'un bon teneur de livres, d'exercer leur patience sur le dernier théorème de Fermat ; avant d'énoncer ce théorème, donnons un exemple de plus des problèmes d'une simplicité décevante auxquels Fermat s'est attaqué et qu'il a résolus : ceci nous introduira dans l'analyse de Diophante, question où Fermat excellait.

Quiconque jongle avec les nombres a bien pu s'arrêter un jour sur le fait que $27 = 25 + 2$: le point intéressant, c'est que 27 et 25 sont des puissances parfaites : en effet $27 = 3^3$ et $25 = 5^2$. Nous observons par là que $y^z = x^2 + 2$ a une solution en nombres entiers, la solution est $y = 3, x = 5$. Pour se faire un test d'intelligence superlative, le lecteur peut essayer de prouver que cette solution est la seule qui peut satisfaire l'équation par des nombres entiers ; ce n'est pas facile ; en fait, cette démonstration d'apparence enfantine exige plus de capacité intellectuelle innée qu'il n'en faut pour saisir la théorie de la relativité.

L'équation $y^3 = x^2 + 2$, avec la restriction que la solution doit donner pour x et y des nombres entiers est indéterminée, parce qu'il y a plus d'inconnues (deux) que d'équations (une) les reliant ; on l'appelle diophantienne, d'après le nom du Grec qui a été un des premiers à s'attacher à la solution des équations en nombres entiers ou, moins strictement, à leurs solutions rationnelles (fractionnaires). Il n'y a pas la moindre difficulté à trouver une infinité de solutions, si l'on n'est pas astreint à la restriction des nombres entiers : ainsi par exemple, nous pouvons donner à toute valeur que nous voulons et déterminer ensuite y en ajoutant 2 à ce x^2 et en extrayant la racine cubique du résultat. Mais le problème de Diophante de trouver toutes les solutions en nombres premiers est une tout autre affaire. Par exemple on voit que $y = 3, x = 5$ est une solution. La difficulté du problème est de démontrer qu'il n'y a pas d'autres nombres entiers x, y satisfaisant à l'équation. Fermat l'a démontré, mais, selon son habitude, il a supprimé sa démonstration et ce n'est que de nombreuses années après sa mort qu'on a trouvé la démonstration. Cette fois, il n'a pas conjecturé ; le problème est difficile ; il a affirmé qu'il avait une démonstration ; celle-ci a été trouvée plus tard. Il en est de même de toutes ses assertions positives, à une exception près cependant, celle apparemment simple de son dernier théorème, que les mathématiciens, après 300 ans d'efforts, ont été incapables de démontrer. Sauf cette exception, tout ce que Fermat a affirmé avoir démontré a été démontré effectivement après lui. Son honnêteté scrupuleuse comme sa pénétration hors de pair en arithmétique semblent à quelques uns mais pas à tous une garantie que Fermat savait parfaitement ce qu'il disait lorsqu'il affirmait posséder une démonstration de son théorème.

C'était l'habitude de Fermat, en lisant le Diophante de Bachet, d'inscrire les résultats de ses méditations sous forme de notes marginales dans son exemplaire ; la marge était trop petite pour qu'il pût développer ses démonstrations. Ainsi, en commentant le huitième problème de l'arithmétique de Diophante, qui demande la solution de l'équation en nombres rationnels (nombres entiers ou fractions), Fermat écrit :

> *"Tout au contraire, il est impossible de partager un cube en deux cubes, une quatrième puissance en deux quatrièmes puissances ou, en général, une puissance quelconque de degré supérieur à deux en deux puissances du même degré ; j'ai découvert une démonstration vraiment admirable (de ce théorème général) que cette marge est trop petite pour contenir."*
>
> FERMAT, (Œuvres, 111, p. 241).

(Tel est le fameux dernier théorème, qu'il découvrit en 1637).

Traduisons ceci en langage moderne : le problème de Diophante consiste à trouver des nombres entiers ou des fractions x, y, a tels que $x^2 + y^2 = a^2$: Fermat affirme qu'il n'y a pas de nombres entiers ou de fractions tels que $x^3 + y^3 = a^3$ ou $x^4 + y^4 = a^4$ ou en général que $x^n + y^n = a^n$ si n est un nombre plus grand que 2.

Le problème de Diophante a une infinité de solutions : par. exemple $x = 3, y = 4, a = 5$, ou encore $x = 5, y = 12, a = 13$. Fermat a donné, par sa méthode de la descente infinie, une démonstration de l'impossibilité de $x^4 + y^4 = a^4$. Depuis lors, on a démontré l'impossibilité d'une solution de $x^n + y^n = a^n$ en nombres entiers (ou fractions), pour une grande quantité de nombres n (jusqu'à tous les nombres premiers inférieurs à $n = 11\ 000$ si aucun des nombres x, y, a, n'est divisible par n^2) : mais ce n'est pas ce qui est demandé ; on demande une démonstration s'appliquant à tous les nombres n plus grands que 2. Fermat, nous l'avons vu, a dit qu'il possédait de cela une démonstration "admirable".

Après tout ce que nous avons dit de lui, est-il probable qu'il ait fait erreur ? On laisse au lecteur le soin de décider. Un grand arithméticien, Gauss, s'est prononcé contre Fermat : mais n'oublions pas la fable du renard et des raisins ; d'autres se sont déclarés pour lui. Fermat a été un mathématicien de premier rang, un homme d'une honnêteté sans défaut, et un arithméticien qui n'a pas d'égal dans l'histoire[3].

[2] Le lecteur peut voir aisément qu'il suffit de poser le cas où n est impair puisque, en algèbre, $u^{ab} = (u^a)^b$, où u, a, et b sont des nombres quelconques.

[3] En 1908, feu le professeur Paul Wolfskehl (Allemagne) a laissé un capital de 100 000 marks pour la première personne qui donnerait une démonstration complète du dernier théorème de Fermat : l'inflation qui a suivi, en Allemagne, la grande guerre, a réduit ce prix à presque rien ; c'est ce que recevra le mercenaire qui trouvera aujourd'hui la démonstration.