Transcription en LaTeX d'un chapitre du livre de E. T. Bell *Les grands mathématiciens*

Chapitre XXI
Cayley et Sylvester
Les jumeaux des invariants.

> *"La théorie des invariants doit son existence à la main ferme de Cayley, mais le fait qu'elle est devenue une œuvre d'art parfaite, pour l'admiration des générations futures de mathématiciens, a été dû largement aux éclairs d'inspiration dont l'intelligence de Sylvester l'a illuminée."*
>
> P. A. Mac-Mahon

"Il est difficile de donner une idée de la vaste étendue des mathématiques modernes. Le mot "étendue" n'est pas le bon : je veux dire une étendue fourmillant de beaux détails, non point une étendue uniforme, comme une plaine nue, mais une région d'un beau pays vue d'abord à distance mais qui mérite d'être parcourue d'un bout à l'autre, étudiée jusque dans ses moindres détails, collines, vallées, cours d'eau, rochers, bois et fleurs. Mais il en est de la théorie mathématique comme de toute chose, sa beauté peut être ressentie, mais non point expliquée."

Ces paroles prononcées par Cayley en 1833 dans son discours d'ouverture du Congrès de l'Association Britannique pour l'Avancement des Sciences, pourraient fort bien s'appliquer à sa colossale production. Au point de vue de la fécondité de l'esprit de découverte, Euler, Cauchy et Cayley forment une catégorie à part ; Poincaré, qui mourut moins âgé, vient après. Ceci ne s'applique qu'au volume de la production, car la qualité est une autre question, que chacun juge en partie par la fréquence avec laquelle se représentent les idées issues de ces géants, en partie d'après son opinion purement personnelle, en partie avec son préjugé national.

Les remarques de Cayley sur la vaste étendue des mathématiques modernes attirent notre attention sur certains points de ses travaux qui ont introduit des idées singulièrement nouvelles et de grande portée. L'œuvre qui lui a valu sa plus grande renommée c'est bien la théorie des invariants, dont il est, avec la brillante collaboration de son ami Sylvester, le créateur et le réalisateur insurpassé ; ce sont aussi les résultats qui ont découlé naturellement de cette vaste théorie. L'idée d'invariance est d'une grande importance pour la physique moderne, en particulier pour la théorie de la relativité ; mais ce n'est pas son titre spécial à notre attention ; les théories physiques sont, comme on le sait, sujettes à révision et à disparition, tandis que la théorie de l'invariance en tant que complément perpétuel de la pensée mathématique pure paraît reposer sur une base plus ferme.

On doit encore une autre idée à Cayley, celle de la géométrie de l'espace supérieur (espace à n dimensions) ; elle est également d'une grande importance scientifique, mais d'un prix encore plus grand pour les mathématiques pures ; il en est de même pour la théorie des matrices, qui est aussi une invention de Cayley. En géométrie non-euclidienne, Cayley a ouvert la voie à cette splendide

Référence :
https://www.bibliotheque.nat.tn/KHNU/doc/SYRACUSE/90812/e-t-bell-les-grands-mathematiciens-zenon-eudox-archimede-descartes-kummer-et-dedekind-poncare-cantor?$_lg = fr - FR$.

Transcription : Denise Vella-Chemla, février 2025.

découverte de Klein, que la géométrie d'Euclide et les géométries non-euclidiennes de Lobatchewsky et de Riemann ne sont, toutes les trois, que des aspects différents d'une géométrie plus générale qui les inclut comme cas spéciaux. Nous indiquerons brièvement la nature de ces contributions de Cayley quand nous aurons donné un aperçu de sa vie et de celle de son ami Sylvester.

Ces deux vies devraient être racontées simultanément, si c'était possible : chacune est l'image parfaite de l'autre, et l'existence de chacun d'eux supplée à ce qui manque à celle de l'autre.

La vie de Cayley est sereine ; Sylvester, comme il le remarque lui-même avec amertume, eut à dépenser beaucoup de courage et d'énergie pour combattre le monde. La pensée de Sylvester était aussi agitée qu'un bief de moulin ; celle de Cayley était toujours ferme, régulière et paisible. Ce n'est que fort rarement que Cayley s'est permis quelque publication moins sévère qu'un énoncé précis de mathématique ; la citation au début de ce chapitre est une de ces exceptions : par contre, Sylvester avait de la peine à parler de mathématiques sans y ajouter un peu de poésie, et son enthousiasme inépuisable lui valait fréquemment de rester en panne. Cependant, ces deux êtres devinrent étroitement amis, et s'aidèrent mutuellement pour quelques-uns de leurs meilleurs travaux, par exemple dans les théories des invariants et des matrices (dont nous parlerons plus loin).

Avec deux tempéraments pareils, il n'est pas étonnant que cette amitié n'ait pas toujours été sans heurts : Sylvester était souvent près d'éclater ; alors Cayley appuyait paisiblement sur la soupape de sûreté, convaincu que son irritable ami retrouverait son sang-froid lorsqu'il aurait repris avec calme l'objet de la discussion, comme s'il ne l'avait jamais perdu, tandis que Sylvester, pour sa part, oubliait son coup de tête, jusqu'à ce qu'il fût de nouveau sous pression, pour recommencer. Sous bien des rapports ce couple était un peu comme deux nouveaux mariés dans leur lune de miel, avec cette différence qu'une des deux parties ne perdait jamais son sang-froid.

Bien que Sylvester fût de sept ans l'aîné de Cayley, nous commencerons par ce dernier : la vie de Sylvester surgit naturellement dans le cours paisible de celle de Cayley comme les arêtes d'un rocher au milieu d'une profonde rivière.

Arthur Cayley est né le 16 août 1821 à Richmond (Surrey) ; c'était le second fils de ses parents, qui résidaient temporairement en Angleterre. Du côté paternel, l'ascendance de Cayley remonte à la conquête des Normands (1066) et même plus haut, jusqu'à une baronnie en Normandie ; cette famille de talent, comme celle de Darwin, fournirait un sujet précieux d'études sur l'hérédité. La mère de Cayley s'appelait Marie Antonia Doughty, elle était d'origine russe, paraît-il ; le père d'Arthur était un négociant anglais qui travaillait en Russie et Arthur naquit pendant un des séjours périodiques de ses parents en Angleterre.

En 1829, le négociant se retira des affaires et se fixa en Angleterre : Arthur suivit les cours d'une école privée à Blackheath et plus tard, à l'âge de quatorze ans, il entra à King's College School à Londres. Son génie mathématique se manifesta de bonne heure, comme celui de Gauss ; le jeune Cayley montrait une habileté surprenante à faire, pour s'amuser, de longs calculs numériques. Dès le début de ses études régulières en mathématiques, il dépassa rapidement tout le reste de la classe ; ses professeurs reconnurent vite qu'ils avaient affaire à un mathématicien-né, et que ce serait sa carrière. Par un heureux contraste avec les maîtres de Galois, ceux de Cayley se rendirent compte de ses capacités dès le début et l'encouragèrent. Tout d'abord, le père, en bon commerçant, s'opposa au désir de son fils de se consacrer aux mathématiques, mais finalement, gagné à sa cause par le principal du collège, il donna son consentement, sa bénédiction et son argent et décida d'envoyer son fils à Cambridge.

Cayley commença sa carrière dans l'université à l'âge de dix-sept ans, à "Trinity College" à Cambridge. Parmi ses camarades, il passait pour un "pur mathématicien", ayant, chose bizarre, la passion des romans : Cayley fut en effet, durant toute sa vie, un fervent de ces œuvres de fiction quelque peu apprêtées et considérées maintenant comme classiques, qui charmaient les lecteurs de 1840-1850. Walter Scott semble avoir été son auteur favori, et immédiatement après lui, Jane Austen ; plus tard, il lut Thackeray qui lui déplut, quant à Dickens, il ne put jamais se résoudre à le lire ; les vers de Byron excitaient son admiration, mais son puritanisme victorien se révoltait à ce qui s'y trouvait de mieux et il ne voulut jamais faire la connaissance de ce donjuanesque et amusant vaurien. Les pièces de Shakespeare, surtout les comédies, lui étaient un délice perpétuel. Dans un genre plus sérieux, il lisait et relisait l'interminable *Histoire de la Grèce* de Grote et l'*Histoire de l'Angleterre* de Macaulay. Durant toute sa vie, il lut le grec classique, appris à l'école ; il lisait et écrivait le français aussi couramment que l'anglais, et sa connaissance de l'allemand et de l'italien lui fournit ample pâture lorsqu'il eut épuisé les classiques anglais (ou que ceux-ci l'eurent épuisé).

À la fin de sa troisième année de Cambridge, Cayley était si en avant de sa classe, en mathématiques, que l'examinateur général tira un trait sous son nom, mettant le jeune homme dans une classe hors concours, "au-dessus de la première". En 1842, à vingt et un ans, Cayley fut en tête à l'examen spécial de mathématiques, et la même année fut classé premier au concours Smith, encore plus difficile.

Avec un début aussi remarquable, Cayley était sur les rangs pour une agrégation qui lui permettrait de faire ce qui lui plairait pendant quelques années : il fut nommé agrégé de Trinity College et répétiteur adjoint pour trois ans ; il aurait pu continuer dans cette voie s'il avait voulu entrer dans les ordres ; mais, bien que chrétien orthodoxe de l'église anglicane, Cayley ne pouvait digérer l'idée de se faire ministre du culte pour avoir une position ou en trouver une meilleure, comme beaucoup le faisaient sans que leur foi ou leur conscience s'en offusquassent.

Ses obligations étaient fort légères, au point d'être presque nulles ; il ne prenait que peu d'élèves, pas assez pour que cela pût gêner ses travaux personnels. Faisant le meilleur usage possible de sa liberté, il continuait ses recherches mathématiques commencées dès ses années de classe. Comme Abel, Galois et bien d'autres qui ont gravi les plus hauts échelons, il s'inspirait directement des maîtres. Son premier mémoire, publié à l'âge de vingt ans avant d'avoir son premier grade, procédait de ses études de Lagrange et de Laplace.

Après son brevet de professeur, Cayley publia huit mémoires la première année, quatre la seconde, et treize la troisième : ces premiers travaux de jeune homme, avant vingt-cinq ans, donnent une idée de l'œuvre qu'il exécutera pendant les cinquante années suivantes. Il avait déjà commencé à travailler la géométrie à n dimensions (dont il est le créateur), la théorie des invariants, la géométrie des courbes planes, et sa précieuse contribution à la théorie des fonctions elliptiques.

Pendant cette période extrêmement féconde, il ne faut pas croire qu'il travaillât sans répit. À vingt-deux ans, en 1843 et à plusieurs reprises après avoir quitté Cambridge, vers vingt-cinq ans, il passa sur le continent de délicieuses vacances, à faire du tourisme, des excursions en haute montagne et de l'aquarelle. Malgré son apparence frêle et délicate, il était fort robuste et, bien souvent, après avoir passé la nuit à courir par monts et par vaux, il arrivait au déjeuner, aussi frais que la rosée et l'esprit dispos pour travailler quelques heures à ses mathématiques. Pendant son premier voyage, il visita la Suisse et fit une série d'ascensions ; tel fut le début d'une autre passion de sa vie ; sa peinture de "l'étendue des mathématiques modernes" n'est pas le simple exercice de rhétorique d'un professeur qui n'aurait jamais gravi une montagne ou erré amoureusement à travers les sites d'une belle région, c'est une comparaison exacte d'un homme qui a connu l'intimité de la nature.

Pendant les quatre derniers mois de ses premières vacances à l'étranger, il visita l'Italie septentrionale ; il y prit intérêt à deux arts qui le charmèrent durant toute sa vie, l'architecture et la belle peinture. Lui-même prenait plaisir à l'aquarelle, dans laquelle il manifesta un talent marqué. Au total, avec son amour de la bonne littérature, des voyages, de la peinture et de l'architecture, avec sa profonde compréhension des beautés de la nature, il avait tout ce qu'il faut pour ne pas tomber dans le type de pur mathématicien décrit la plupart du temps par des gens qui ont peut-être connu quelque pédant professeur de collège, mais qui n'ont jamais vu de leur vie un grand mathématicien en chair et en os.

En 1846, à l'âge de vingt-cinq ans, Cayley quitta Cambridge : aucune situation de mathématicien ne lui était ouverte, à moins peut-être d'accommoder sa conscience au formalisme des saints ordres ; en bon mathématicien, il sentait sans doute que la quadrature du cercle lui aurait été plus facile. Quoi qu'il en soit il y renonça. Il était maintenant attiré par la jurisprudence qui, avec les services administratifs de l'Inde, a absorbé de tout temps en Angleterre, bien des valeurs intellectuelles de grand avenir ; il est étonnant de voir combien de maîtres éminents du barreau de l'Angleterre, combien de ses magistrats distingués ont été au XIXe siècle des lauréats du grand prix de mathématiques de Cambridge ; il ne s'ensuit pas, comme on l'a prétendu, que l'instruction mathématique soit une bonne préparation à la jurisprudence. Ce qui paraît moins douteux, c'est l'absurdité sociale d'amener un génie mathématique aussi avéré que celui de Cayley à dresser des testaments, des transferts et des baux.

Suivant la coutume anglaise, Cayley entra à "Lincoln's Inn" pour se préparer au barreau ; après trois ans de stage chez un M. Christie, il fut admis comme avocat en 1849 ; il avait alors vingt-huit ans ; mais il prit la sage résolution de ne pas laisser la jurisprudence absorber entièrement son cerveau : résolu à ne pas s'encroûter, il refusa plus d'affaires qu'il n'en accepta. Pendant quatorze mortelles années, il remplit les devoirs de sa charge, gagnant largement sa vie, mais écartant délibérément toutes les occasions de faire une grosse fortune et de conquérir ce renom un peu tapageur des sommités du barreau ; il ne chercha pas à gagner plus qu'il ne lui en fallait pour lui permettre de vaquer à ses travaux de mathématiques.

Sa patience dans la routine étouffante et la monotonie des actes légaux était exemplaire, presque celle d'un saint, et sa réputation dans la branche de sa profession (cessions et transferts) ne faisait que croître ; on dit même que son nom est cité dans un traité de jurisprudence à propos d'un rapport juridique remarquable dont il était l'auteur. Mais il est très consolant de noter aussi que Cayley n'était pas un saint à l'eau de rose, mais bien un être humain normal qui pouvait s'emporter à l'occasion. Un jour qu'avec son ami Sylvester il discutait avec animation quelque point de la théorie des invariants, le garçon de bureau entra et lui tendit une liasse de paperasses à l'examen ; d'un brusque mouvement, il l'envoya promener avec tout ce qu'il tenait en mains. La perspective de passer des journées à débrouiller une affaire de mince importance, pour épargner quelques guinées à un client qui en était déjà gorgé, dépassait la mesure pour un cerveau de cette valeur. Avec une exclamation de dégoût, il flanqua tout le paquet par terre en le qualifiant de “saletés” et se remit à discuter mathématique. C'est apparemment le seul exemple connu d'un accès de colère de Cayley.

Finalement, il abandonna la jurisprudence à la première occasion après quatorze années de pratique. Mais durant cette période de servitude, il avait publié entre deux et trois cents mémoires mathématiques, dont plusieurs sont classiques maintenant.

Comme Sylvester entra dans la vie de Cayley pendant cette phase légale, c'est le moment de parler de lui. James Joseph, pour lui donner le nom sous lequel il fut inscrit à l'état civil, était le plus jeune de plusieurs frères et sœurs, né de parents israélites le 8 septembre 1814 à Londres. On sait fort peu de choses sur son enfance, car il n'aimait pas à parler de ses jeunes années. Son frère aîné émigra aux États-Unis, où il prit le nom de Sylvester, qui fut alors adopté par toute la famille. Pourquoi ce juif orthodoxe s'affubla-t-il de ce nom favori des papes ennemis des juifs ? C'est un mystère : peut-être ce frère aîné avait-il le sens de l'humour ; quoi qu'il en soit, James Joseph, fils d'Abraham Joseph, devint depuis lors et pour toujours James Joseph Sylvéster.

Comme chez Cayley, le génie mathématique de Sylvester se manifesta de bonne heure. De six à quatorze ans, il fréquenta des écoles privées ; il passa les cinq derniers mois de sa quatorzième année à l'Université de Londres, où il eut De Morgan comme professeur ; dans un mémoire datant de 1840 et portant le titre quelque peu mystique de *Sur la Dérivation de coexistence*, il écrit : ‘J'emprunte ce terme (récurrents) au professeur De Morgan, dont je m'honore d'avoir été l'élève.”

En 1829, à l'âge de quinze ans, Sylvester entra à la Royal Institution à Liverpool, où il ne passa que deux ans ; à la fin de la première année, il obtint le prix de mathématiques. Dès cette époque il était, dans cette branche, tellement en avance sur ses camarades qu'il fut mis dans une classe spéciale pour lui. Pendant son séjour à la “Royal Institution”, il remporta un prix d'un autre genre, et ceci a de l'intérêt parce que c'est le premier contact de Sylvester avec les États-Unis d'Amérique où il passa les plus heureux, et aussi les plus malheureux jours de sa vie. Son frère d'Amérique, actuaire de profession, avait proposé aux directeurs des Entrepreneurs de Loteries des États-Unis de soumettre au jeune Sylvester un difficile problème d'arrangements ; la solution du mathématicien en herbe fut parfaite ; les directeurs manifestèrent leur satisfaction en octroyant à Sylvester un prix de cinq cents dollars. Le séjour à Liverpool fut loin d'être heureux. Courageux et franc, Sylvester ne se cachait pas de sa religion et la proclamait fièrement en face de la persécution plus que mesquine des jeunes et grossiers barbares de la Royal Institution qui avaient le front de se dire chrétiens. Mais il y a une limite à laquelle un paon solitaire ne peut plus rester au milieu d'une troupe de geais obtus, et finalement Sylvester s'enfuit à Dublin avec seulement quelques sous dans sa poche. Heureusement, il fut reconnu dans la rue par un parent éloigné qui le recueillit, le réconforta et lui paya son voyage de retour à Liverpool.

Notons ici une autre coïncidence curieuse ; à sa première visite, Dublin ou du moins un de ses habitants traite avec humanité un malheureux jeune homme qui fuit la persécution religieuse de Liverpool ; à sa seconde visite, quelques onze ans plus tard, le "Trinity College" de Dublin accordait à Sylvester les diplômes de bachelier et de licencié que son "alma mater", l'Université de Cambridge, lui avait refusés parce qu'étant Juif, il ne pouvait souscrire à ce fatras de déclarations absurdes connu sous le nom des trente-neuf articles de l'église anglicane, que celle-ci exige comme minimum de croyance religieuse d'un esprit sensé. Ajoutons cependant que lorsque l'instruction supérieure anglaise se fut délivrée en 1871 de ce joug de la main-mise de l'église, Sylvester obtint rapidement ses grades honoris causa. Il faut remarquer à cette occasion comme dans d'autres, que Sylvester n'était nullement un martyr débonnaire, prêt à tout souffrir. Il était plein de force et de courage, au physique et au moral et savait soutenir un combat du diable pour se faire rendre justice ; de fait, c'était un lutteur-né, doué d'un courage indomptable.

En 1831, à un peu plus de dix-sept ans, il entra au Saint John's College à Cambridge. Une maladie sérieuse l'obligea à interrompre ses études, et il ne put pas prendre part au grand concours de mathématiques avant 1837 ; il fut classé second ; celui qui obtint le premier prix n'a plus jamais fait parler de lui en mathématiques. N'étant pas chrétien, Sylvester ne put pas concourir pour le prix Smith.

Dans le domaine intellectuel, Sylvester ressemble à Cayley ; physiquement, ils étaient fort différents. Cayley, quoique très résistant, était d'apparence frêle et de manières timides et réservées ; Sylvester, court et trapu, avec une tête superbe bien posée sur de larges épaules, donnait une impression de vitalité et de force extraordinaires, qu'il possédait réellement ; un de ses élèves disait qu'il aurait pu poser pour le portrait de "Hereward the Wake" dans le roman du même nom de Charles Kingsley. En dehors des mathématiques, Sylvester avait des idées plus larges et beaucoup plus libérales que Cayley. Il lisait dans l'original les classiques grecs et latins, et conserva cette passion jusqu'à sa dernière maladie ; plusieurs de ses mémoires contiennent des citations de ces classiques, toujours pleines d'à propos et bien faites pour illustrer le sujet visé.

On peut en dire autant de ses citations tirées d'autres littératures. Cela pourrait certainement divertir quelque érudit littérateur de parcourir les quatre volumes de la collection de ses Mathematical Papers et de reconstituer le champ immense des lectures de Sylvester par tout ce qu'on y rencontre de citations et d'allusions surprenantes sans références explicites. En outre de l'anglais et des littératures classiques, il lisait dans l'original le français, l'allemand et l'italien ; il portait aux langues et à la forme littéraire un vif et profond intérêt. C'est à lui qu'on doit la terminologie de la théorie des invariants. Faisant allusion aux nombreux termes nouveaux qu'il avait tirés du grec et du latin, il se qualifiait lui-même d'"Adam mathématique".

Il est bien possible que s'il n'avait pas été un très grand mathématicien, il aurait pu faire un poète de valeur plus que passable ; les vers et les règles de la versification l'attirèrent toute sa vie ; il a laissé de nombreux poèmes, une partie sous forme de sonnets ; quelques-uns ont été publiés. Leur sujet prête quelquefois à sourire, mais Sylvester y montre fréquemment qu'il avait le sens de la poésie. Il s'intéressait aussi beaucoup à la musique, et y était un amateur accompli. On dit qu'il prit une fois des leçons de chant de Gounod, et il lui arrivait de venir égayer par ses chansons les réunions d'ouvriers ; il était plus fier de son *ut* de poitrine que de ses invariants.

Notons ici une des nombreuses différences marquées entre Cayley et Sylvester. Cayley dévorait tous les ouvrages de mathématiques ; Sylvester trouvait fastidieux d'essayer de s'assimiler les œuvres des autres. Une fois, plus avancé en âge, il engagea un jeune homme pour qu'il lui apprît les fonctions elliptiques qu'il voulait appliquer à la théorie des nombres, en particulier à la théorie des partitions qui traite des diverses manières dont un nombre donné peut être obtenu en additionnant ensemble des nombres d'une catégorie donnée, par exemple, tous les nombres impairs, ou bien des nombres impairs et des nombres pairs. Au bout de la troisième leçon, Sylvester avait renoncé à sa tentative d'apprendre et faisait au jeune homme un cours sur ses dernières découvertes en algèbre. Cayley paraissait tout connaître, même sur des sujets dont il s'occupait rarement ; auteurs et éditeurs de l'Europe entière s'en référaient à son avis ; il n'oubliait rien de ce qu'il avait vu. Sylvester, au contraire, avait de la peine à se remémorer ses propres découvertes ; un jour, il contestait qu'un certain théorème dont il était l'auteur puisse être vrai ; des questions relativement courantes, que n'importe quel mathématicien ordinaire connaît, étaient pour Sylvester des sources de perpétuel étonnement et de satisfaction. En somme, la presque totalité du vaste domaine des mathématiques était pour Sylvester un pays enchanteur de découvertes, tandis que Cayley planait avec sérénité au-dessus de l'ensemble, y cherchait ce qu'il lui fallait, le prenait et passait à un autre sujet.

En 1838, à l'âge de vingt-quatre ans, Sylvester occupa ses premières fonctions régulières, celles de professeur de philosophie naturelle (science en général, et physique en particulier) à "University College" à Londres ; son ancien professeur De Morgan était un de ses collègues. Bien qu'il eût étudié la chimie à Cambridge et qu'il s'y intéressât toute sa vie, Sylvester fut vite lassé de cet enseignement scientifique général et l'abandonna au bout de deux ans. Entre temps, il avait été nommé membre de la Royal Society à l'âge exceptionnel de vingt-cinq ans.

Les mérites de Sylvester étaient si frappants qu'on ne pouvait les ignorer, mais ils ne l'aidaient pas cependant à trouver une situation convenable.

En ce point de sa carrière, il arriva à Sylvester une singulière mésaventure qui, selon le point de vue auquel on se place, peut être considérée comme bête, amusante, ou tragique. Plein de son ardeur et de son enthousiasme coutumiers, il avait traversé l'Atlantique pour être professeur de mathématiques à l'Université de Virginie, en 1841, l'année où Boole publia sa découverte des invariants. Il n'occupa ces fonctions qu'environ trois mois ; le refus de l'administration de l'Université de punir un jeune homme qui l'avait insulté décida Sylvester à démissionner. Pendant plus d'un an après cette désastreuse expérience, il essaya vainement de trouver une situation convenable. Après avoir sollicité sans succès l'Université de Harvard et celle de Colombie, il dut se décider à retourner en Angleterre.

Cet échec en Amérique le dégoûta de l'enseignement pendant dix ans. À son retour à Londres, il trouva une place d'actuaire dans une Compagnie d'assurances sur la vie ; c'était là un travail rebutant pour un génie créateur mathématicien, et Sylvester cessa presque de faire des mathématiques. Il se maintint en forme cependant, en prenant un petit nombre d'élèves, dont l'un a laissé un nom connu et révéré dans le monde entier. C'était aux environs de 1850, à cette époque où l'on considérait que les jeunes femmes ne devaient pas se mêler d'autre chose que de peinture ou d'œuvres pieuses ; aussi est-il assez surprenant que l'élève le plus remarquable de Sylvester fût une jeune femme, Florence Nightingale, qui fut la première à introduire quelques habitudes de décence et de propreté dans les hôpitaux militaires, en dépit des protestations outragées d'une autorité militaire à courte vue. Miss Nightingale avait six ans de moins que son professeur, qui en avait trente ; l'année où il abandonna le gagne-pain qu'il avait pris comme pis-aller, en 1854, Miss Nightingale partit pour la guerre de Crimée..

Quelques années auparavant, en 1846, à trente-deux ans, Sylvester était entré à Inner Temple (où, comme il le dit lui-même modestement, il était comme "un pigeon dans un nid de vautours"), pour se préparer à la carrière judiciaire, et en 1850 il entra au barreau ; c'est là qu'il rencontra Cayley.

Cayley avait vingt-neuf ans, Sylvester, trente-six ; tous deux occupaient une carrière étrangère à celle à laquelle la nature les destinait. Professant à Oxford trente-cinq ans plus tard, Sylvester rendait un hommage reconnaissant à Cayley qui, disait-il, "bien que plus jeune que moi, a été mon père spirituel ; le premier, il m'a ouvert les yeux et les a débarrassés de tout voile en sorte que dès lors ils ont pu voir et accueillir les mystères élevés de notre foi commune en mathématiques." En 1852, peu de temps après le début de leurs relations, Sylvester parle de "Mr. Cayley, qui d'habitude n'émet dans ses propos que perles et rubis." Quant à Mr. Cayley, il mentionne souvent Mr. Sylvester mais toujours de sang-froid, selon son habitude. Le premier témoignage public de gratitude de Sylvester envers Cayley se trouve dans un mémoire de 1851. "Le théorème ci-dessus [sa relation entre les déterminants mineurs de formes quadratiques équivalentes linéairement] m'a été en partie suggéré au cours d'un entretien avec M. Cayley, à qui je dois d'avoir retrouvé les joies de la vie mathématicienne..." Peut-être Sylvester a-t-il exagéré un peu, mais il y avait là une part de vérité ; si, à vrai dire, il n'est pas revenu à la vie à ce moment-là, il a du moins repris alors son souffle vigoureusement : depuis sa rencontre avec Cayley, il a respiré et vécu pour les mathématiques jusqu'à la fin de ses jours.

Les deux amis avaient l'habitude de se promener autour des préaux de "Lincoln's Inn" en discutant sur la théorie des invariants que tous les deux étaient en train d'élaborer ; et plus tard, lorsque Sylvester eut quitté l'établissement, ils continuèrent leurs promenades mathématiciennes, se rencontrant à mi-chemin de leurs logements respectifs. A cette époque, ils étaient célibataires l'un et l'autre.

La théorie des invariants algébriques, d'où sont sortis les divers développements de l'idée d'invariance, a pris tout naturellement sa source dans une observation extrêmement simple. Comme on le verra au chapitre de Boole, on en trouve le premier exemple dans Lagrange, d'où elle passa dans les recherches d'arithmétique de Gauss ; mais aucun d'eux n'a observé que le phénomène d'algèbre simple mais remarquable, qui se présentait à eux, était le germe d'une vaste théorie ; Boole non plus ne paraît pas avoir entièrement saisi ce qu'il avait trouvé quand il continua le travail de Lagrange et l'étendit considérablement. À part une légère pique, Sylvester a toujours été juste et généreux à l'égard de Boole en matière de priorité ; quant à Cayley, naturellement, il a été, comme toujours, correct.

L'observation simple à laquelle nous avons fait allusion tout à l'heure peut être comprise par quiconque a jamais résolu une équation du second degré. La condition nécessaire et suffisante pour que l'équation $ax^2 + 2bx + c = 0$ ait deux racines égales est que $b^2 - ac$ soit égal à zéro. Remplaçons la variable par sa valeur en fonction de y obtenue par la transformation $y = (px+q)/(rx+s)$; ainsi, x doit être remplacé par le résultat de la résolution de cette dernière équation par rapport à y, savoir : $x = (q - sy)/(ry - p)$. Cette opération transforme l'équation donnée en une autre en y que l'on peut écrire $Ay^2 + 2By + C = 0$. Exécutant les calculs algébriques, nous voyons que les nouveaux coefficients A, B, C, s'expriment en fonction des anciens a, b, c, comme suit :

$$\begin{aligned} A &= as^2 - 2bsr + cr^2 \\ B &= -aqs + b(qr + sp) - cpr \\ C &= aq^2 - 2bpq + cp^2 \end{aligned}$$

De ces trois relations on tire (au besoin en effectuant toutes les réductions voulues, bien que le résultat puisse être obtenu par un raisonnement plus simple qui dispense de calculer réellement A, B, C) :

$$B^2 - AC = (ps - qr)^2(b^2 - ac).$$

On appelle $b^2 - ac$ le discriminant de l'équation du second degré en x ; donc le discriminant de l'équation du second degré en y est $B^2 - AC$, et nous venons de montrer que *le discriminant de l'équation transformée est égal au discriminant de l'équation initiale multiplié par le facteur* $(ps-qr)^2$ *qui ne dépend que des coefficients* p, q, r, s *dans l'équation transformée* $y = (px+q)(rx+s)$ *au moyen de laquelle* x *a été exprimé en fonction de* y.

Boole a été le premier, en 1841, à observer qu'il y avait là quelque chose de digne d'attention. Toute équation algébrique a un discriminant, c'est-à-dire une certaine expression (comme $b^2 - ac$ pour l'équation du second degré) qui est égale à zéro si, et uniquement si, deux ou plusieurs racines de l'équation sont égales entre elles. Boole, le premier, s'est posé la question suivante : le discriminant d'une équation quelconque, lorsque son inconnue x est remplacée par l'y correspondant (comme on l'a fait pour l'équation du second degré), reste-t-il sans changement, à un facteur près dépendant uniquement des coefficients de la transformation ? Il trouva que c'était vrai. Ensuite, il se demanda s'il n'y aurait pas d'autres expressions que les discriminants, formés de coefficients qui aient la même propriété d'*invariance* en cas de *transformation* : il en trouva deux pour l'équation générale du quatrième degré. Ensuite, le jeune et brillant mathématicien allemand F. M. G. Eisenstein (1823-1852), poursuivant une conséquence du résultat de Boole, en 1844, découvrit que certaines expressions comprenant à la fois les *coefficients* et l'x des équations initiales présentent la même sorte d'invariance ; les coefficients et l'x initiaux passent dans les coefficients transformés et dans y (comme pour l'équation du second degré) et les expressions en question, tirées des expressions initiales, ne diffèrent de celles obtenues par la transformation que par un facteur dépendant uniquement des coefficients de cette dernière.

Ni Boole, ni Eisenstein n'avaient découvert une méthode *générale* pour trouver ces expressions *invariantes* ; c'est à ce moment, en 1845, que Cayley intervint dans la question avec son mémoire, *Sur la théorie des transformations linéaires* ; il avait alors vingt-quatre ans. Il s'était posé le problème de trouver des méthodes uniformes qui lui donneraient toutes les expressions invariantes de la nature décrite. Pour éviter de longues explications, nous avons posé le problème en raisonnant sur des équations ; en réalité il a été attaqué autrement ; mais cela n'a pas d'importance ici.

Comme cette question d'invariance est fondamentale dans la pensée scientifique moderne, nous donnerons trois autres exemples de ce qu'elle signifie, sans nous servir d'aucun symbole d'algèbre. Imaginons une figure tracée sur une feuille de papier, consistant en lignes droites ou courbes se coupant : plissons cette feuille de telle façon qu'il vous plaît sans la déchirer, et essayons de nous représenter quelle est la propriété la plus évidente de cette figure qui soit restée la même avant et après le plissage. Traçons la même figure sur une feuille de caoutchouc, puis étirons celle-ci dans tous les sens, sans la déchirer, d'une manière aussi compliquée que vous voudrez ; en ce cas, il est évident que la grandeur des aires et des angles, et les longueurs des lignes, *ne sont pas* restées "invariantes" ; en étirant le caoutchouc d'une manière appropriée, les lignes droites se déformeront en lignes courbes presque aussi tortueuses que vous voudrez, et en même temps les courbes initiales, ou du moins certaines d'entre elles, pourront être transformées en lignes droites. Cependant, il y a quelque chose dans la figure qui n'a pas changé, quelque chose de si simple et si évident que cela peut échapper ; c'est l'ordre des points d'intersection d'une ligne quelconque de la figure avec les autres lignes qui la coupent ; si nous suivons avec un crayon une ligne de A à C, il nous faut passer par le point B de la ligne avant que la figure soit déformée ; après la déformation, nous devrons passer encore par le point B. L'ordre (ainsi défini) est un *invariant* dans les *transformations* particulières qui ont plissé la feuille de papier ou étiré la feuille de caoutchouc.

Cet exemple peut paraître banal, mais quiconque a lu une description non mathématique des intersections des "lignes d'univers" dans la relativité généralisée et qui se rappelle qu'une intersection de deux de ces lignes marque un point-événement physique, verra que ce que nous venons de discuter est de même essence que nos représentations de l'univers physique. Le mécanisme mathématique assez puissant pour manier des transformations aussi compliquées et pour trouver réellement les invariants, a été créé par plusieurs chercheurs, dont Riemann, Christoffel, Ricci, Levi-Civita, Lie et Einstein, tous noms bien connus des lecteurs d'ouvrages de vulgarisation sur la relativité : tout ce vaste programme a été établi par ceux qui ont travaillé les premiers la théorie des invariants algébriques, dont Cayley et Sylvester ont été les véritables fondateurs.

Comme second exemple, imaginons que nous fassions un nœud sur une corde dont nous lions ensuite les deux bouts. Tirant sur le nœud, et le faisant courir tout le long de la corde, nous le déformons un nombre quelconque de fois. Qu'est-ce qui reste "invariant", qu'est-ce qui se maintient, dans toutes ces déformations qui, dans ce cas, sont nos transformations ? Evidemment, ce n'est ni la forme ni la dimension du nœud qui sont invariantes ; c'est le "style" du nœud lui-même dans un sens qui n'a pas besoin d'être expliqué, c'est la même sorte de nœud quoique nous fassions à la corde pourvu que nous ne dénouions pas les deux bouts. Autre cas dans l'ancienne physique, l'énergie était "conservée" : on supposait que l'énergie totale de l'univers était un invariant, qui restait le même dans toutes les transformations d'une forme d'énergie, telle que l'énergie électrique, en d'autres, telles que la chaleur et la lumière.

Notre troisième exemple touche de plus près à la physique. Un observateur fixe sa "position" dans l'espace et dans le temps en se référant à trois axes perpendiculaires entre eux et à une horloge standard. Un autre observateur, se déplaçant par rapport au premier, désire décrire le même événement physique que celui décrit par le premier observateur ; il a aussi son système de référence espace-temps ; son mouvement par rapport au premier observateur peut s'exprimer comme une transformation de ses propres coordonnées (ou de celles de l'autre observateur). Les descriptions données par les deux observateurs peuvent, ou non, différer de forme mathématique, selon la nature particulière de la transformation envisagée. Si leurs descriptions diffèrent, la différence n'est évidemment pas inhérente à l'événement physique qu'ils observent tous les deux, mais à leurs systèmes de référence et à la transformation. Le problème consiste alors à formuler uniquement les expressions mathématiques de phénomènes naturels qui, mathématiquement, doivent être indépendants de tout système *particulier* de référence et par conséquent être exprimés par tous les observateurs sous la même forme. Ceci revient à trouver les invariants de la transformation qui exprime le déplacement le plus général dans l' "espace-temps" d'un système de référence par rapport à un autre. Ainsi donc, le problème consistant à trouver les expressions mathématiques des lois intrinsèques de la nature est remplacé par un problème que l'on peut aborder dans la théorie des invariants. Nous en dirons davantage sur ce point quand nous arriverons à Riemann.

En 1863, l'Université de Cambridge créa une nouvelle chaire de mathématiques et l'offrit à Cayley, qui accepta sans hésiter. La même année, à quarante-deux ans, il épousa Suzanne Moline. Bien qu'il gagnât moins comme professeur que comme avocat, il ne regretta pas le changement ; plus tard, l'Université fut réorganisée et le traitement de Cayley fut augmenté ; il est vrai qu'il eut à faire deux cours au lieu d'un. Sa vie était alors consacrée presque entièrement aux recherches mathématiques et à l'administration de l'Université ; sur ce dernier point, son expérience du droit, son jugement sans parti pris, son caractère égal, sa solide pratique des affaires rendirent des services inappréciables ; il n'avait jamais beaucoup à dire, mais ce qu'il disait était en général définitivement accepté, car il n'émettait jamais une opinion sans avoir examiné l'affaire à fond. Son mariage et son ménage furent heureux ; il eut deux enfants, un fils et une fille. En avançant en âge, son esprit resta aussi vigoureux et bien équilibré, son naturel devint même plus doux. Il ne laissait émettre en sa présence aucun jugement blessant sans protester tranquillement. Il se montrait toujours généreux à l'égard des jeunes et des débutants en mathématiques et les aidait de ses encouragements et de ses bons conseils.

À l'époque de son professorat, l'instruction féminine était une question chaudement discutée ; Cayley mit toute son influence persuasive et calme du côté de la civilisation, et beaucoup grâce à ses efforts, les femmes furent finalement admises comme étudiantes dans la retraite monacale de Cambridge (bien entendu dans leurs propres confréries).

Pendant que Cayley faisait sérieusement des mathématiques à Cambridge, son ami Sylvester continuait à lutter pour l'existence. Il ne se maria jamais. En 1854, à quarante ans, il demanda le poste de professeur de mathématiques à l'Académie Royale Militaire de Woolwich, mais ne l'obtint pas. Il n'obtint pas non plus un professorat qu'il avait sollicité à Gresham College à Londres ; son cours d'essai fut jugé trop supérieur par le conseil de l'établissement. Cependant, le candidat qui avait obtenu la place de Woolwich mourut l'année suivante, et on fit appel à Sylvester. Dans son traitement modique, se trouvait compris le droit de pâturage sur les terrains communaux ; comme Sylvester n'avait ni cheval, ni vache, ni chèvre, et ne mangeait pas d'herbe lui-même, il est difficile de voir quel bénéfice il pouvait tirer de cette faveur inestimable.

Sylvester occupa cette chaire de Woolwich pendant seize ans ; la limite d'âge, cinquante-six ans, l'obligea à se retirer en 1870 ; il était encore plein de vigueur, mais il n'y avait rien à faire contre l'indécrottable bureaucratie. Il était appelé à faire encore de nombreux et grands travaux dans l'avenir, mais, pour le moment ses supérieurs considéraient qu'un homme de son âge est un homme fini. À un autre point de vue, cette retraite forcée réveilla ses instincts combatifs ; les autorités essayèrent de le frustrer d'une partie de la retraite qui lui était due légitimement ; mais ces grigous apprirent à leurs dépens qu'ils n'avaient pas affaire à un pauvre vieux professeur, mais à un homme capable de leur rendre la monnaie de leur pièce. La pension complète fut rétablie.

Pendant toutes ces difficultés du côté matériel, Sylvester n'avait pas à se plaindre du côté scientifique. Les honneurs lui arrivaient progressivement ; il en reçut un, particulièrement prisé des hommes de science, celui de membre correspondant étranger de l'Académie des Sciences de France, où il fut élu en 1863, à la place devenue vacante, dans la section de géométrie, par le décès de Steiner.

Après son départ de Woolwich, Sylvester vécut à Londres, versifiant, lisant des classiques, jouant aux échecs, et se distrayant en général, mais ne faisant plus de mathématiques. En 1870, il publia une brochure, *Les règles de la versification*, sur laquelle il faisait grand fond. Puis en 1876, à soixante-deux ans, il reprit soudain goût à l'activité mathématique ; le "vieil homme" était tout simplement infatigable.

L'université Johns Hopkins avait été fondée à Baltimore en 1875 sous la brillante direction du président Gilman, auquel on avait recommandé de partir de l'avant en prenant pour noyau de sa faculté un éminent professeur d'études classiques et le meilleur mathématicien qu'il puisse trouver : le reste suivrait, lui avait-on dit ; ainsi fit-il. Sylvester avait enfin trouvé ce qui lui convenait, un poste où il pouvait agir à sa guise et se rendre justice à lui-même. En 1876, il traversa encore une fois l'Atlantique pour exercer le professorat à Johns Hopkins ; ses appointements étaient larges pour l'époque, cinq mille dollars par an. En acceptant, Sylvester avait posé une condition singulière, celle "d'être payé en or" ; peut-être pensait-il à Woolwich, qui lui avait donné l'équivalent de 2 750 dollars (plus le pâturage), et cette fois il voulait être sûr de recevoir son dû, pension ou non.

La période de 1876 à 1883 fut probablement la plus heureuse et la plus tranquille de toute l'existence de Sylvester. Bien qu'il n'eût plus à lutter pour l'existence, il ne se reposait pas sur ses lauriers et ne s'endormait pas ; il semblait avoir quarante ans de moins et avoir repris sa vigueur de jeune homme, flambant d'enthousiasme et pétillant d'idées nouvelles. Il était profondément reconnaissant à l'université Johns Hopkins de lui avoir fourni cette occasion de commencer une deuxième carrière de mathématicien à l'âge de soixante-trois ans, et il ne manqua pas d'en exprimer sa gratitude en public, dans son discours à l'occasion des fêtes du "Commemoration Day", en 1877.

Dans ce discours, il esquissa ce qu'il espérait réaliser (et il y parvint en effet) dans ses cours et ses recherches : Il y a des choses qu'on a appelées formes algébriques ; le professeur Cayley les appelle des quantiques. [Par exemple $ax^2+2bxy+cy^2$, $ax^3+3bx^2y+3cxy^2+dy^3$; les coefficients numériques $1, 2, 1$, dans la première, $1, 3, 3, 1$ dans la seconde sont les coefficients du binôme, ceux des troisième et quatrième lignes du triangle de Pascal (chap. V) ; ensuite viendrait $x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4$]. Il n'existe pas, à proprement parler, de formes géométriques, susceptibles dans une certaine mesure, d'être incorporées dans ces formes algébriques, mais plutôt des schémas de procédés ou d'opérations pour former, pour appeler à l'existence, comme si elles vivaient, des quantités algébriques.

"À chacune de ces quantiques, se trouve associée une variété infinie d'autres formes qui peuvent être considérées comme engendrées par elles et qui flottent autour d'elles comme une atmosphère ; mais pour si infinies que soient ces existences dérivées, ces émanations d'une forme parente, on a trouvé qu'on peut les obtenir par composition, par mélange, pour ainsi dire, d'un certain nombre limité de formes fondamentales, de raies types comme on pourrait les appeler dans le spectre algébrique de la quantique à laquelle elles appartiennent. Et, de même que les physiciens d'aujourdhui [1877, et encore de nos jours] se préoccupent de déterminer les raies fixes du spectre de chaque substance chimique, de même c'est le but et l'objet d'une grande école de mathématiciens d'obtenir les formes dérivées fondamentales, les *Covariants* [cette espèce d'expression invariante, déjà décrite, qui comprend *à la fois* les variables et les coefficients de la forme ou quantiques] et les *Invariants*, comme on les appelle, de ces Quantiques."

Pour les lecteurs mathématiciens, il est évident que Sylvester donne ici une belle analogie du système fondamental et des syzygies d'une forme donnée ; nous recommandons aux lecteurs non mathématiciens de relire le passage pour saisir l'esprit de l'algèbre dont parle Sylvester, car l'analogie est réellement étroite et constitue un bel exemple de mathématiques vulgarisées.

Dans une note au bas de la page, Sylvester fait observer ceci : "J'ai actuellement une classe de huit à dix élèves qui suivent mon cours d'algèbre supérieure moderne ; l'un d'entre eux, un jeune ingénieur qui travaille de huit heures du matin à six heures du soir à son métier, avec un intervalle d'une heure et demie pour son repas ou ses cours, m'a remis la meilleure démonstration et la mieux rédigée que j'aie vue de ce que j'appelle [suit le théorème]..." L'enthousiasme de Sylvester, qui avait soixante ans passés, est celui d'un prophète exhortant les autres à voir la terre promise qu'il a découverte ou qu'il va découvrir ; nous voyons ici l'enseignement dans ce qu'il a de meilleur, atteignant le seul niveau qui justifie, en fait, l'enseignement supérieur.

Sylvester ajoute aussi, dans des notes, des compliments flatteurs pour son pays d'adoption :... "Je crois qu'il n'y a pas au monde de nation où les capacités et le caractère comptent pour autant, et où la simple possession de la fortune (en dépit de tout ce que nous entendons dire à propos de la toute-puissance du dollar) compte pour si peu...".

Il dit aussi combien ses instincts de mathématicien qui s'étaient assoupis se sont réveillés, pour s'élever à la plénitude du pouvoir créateur. "Sans l'insistance d'un étudiant de cette université qui désirait étudier avec moi l'algèbre moderne, je n'aurais jamais été conduit à ces recherches... Il m'a pressé fort respectueusement, mais avec une invincible obstination, jusqu'où il voulait en venir. Il lui fallait absolument connaître l'algèbre nouvelle (Dieu sait où il a pu en entendre parler, car elle est à peu près inconnue sur ce continent). J'ai été obligé de céder, et quelle en a été la conséquence ? En essayant de jeter quelque lumière sur une explication obscure de notre manuel, mon cerveau a pris feu, je me suis plongé avec un zèle ravivé dans un sujet que j'avais abandonné depuis des années et j'ai trouvé de quoi alimenter des idées qui avaient attiré jadis mon attention pendant un temps considérable, et qui occuperont sans doute et avantageusement toute ma puissance de réflexion pendant plusieurs mois."

Presque toutes les allocutions en public ou les mémoires de Sylvester contiennent nombre de choses à citer à propos des mathématiques, en plus des questions techniques. On pourrait tirer de la collection de ses œuvres une anthologie récréative pour les débutants ou même pour les mathématiciens mûrs. Aucun mathématicien n'a peut-être révélé sa personnalité, dans ses écrits, d'une manière plus transparente que Sylvester. Il aimait rencontrer des gens et les gagner à son enthousiasme contagieux pour les mathématiques ; c'est ainsi qu'il dit vraiment pour son propre cas : "Tant qu'un homme reste un être sociable, il ne peut pas se priver de la satisfaction que lui procure l'instinct de transmettre ce qu'il sait, de propager parmi autrui les idées et les impressions qui naissent dans son propre cerveau, sans étioler et atrophier sa nature morale et dessécher les sources les plus sûres de son futur épanouissement intellectuel."

Comme pendant à la description de Cayley de l'étendue des mathématiques modernes, nous pouvons citer ce passage de Sylvester : "Je serais désolé de supposer que j'aurais pu rester longtemps à posséder à moi seul un aussi vaste champ que celui des mathématiques modernes. Les mathématiques ne sont pas un livre emprisonné dans sa couverture et bouclé par des agrafes d'airain, dont il n'est besoin que de patience pour fouiller le contenu ; ce n'est pas une mine dont les trésors peuvent demander du temps à conquérir, mais ne remplissent qu'un nombre limité de veines et de filons ; ce n'est pas un sol dont la fertilité peut s'épuiser par des récoltes successives ; ce n'est ni un continent ni un océan dont la surface peut être dessinée et les contours délimités ; elles sont sans limites, comme l'espace, qu'elles trouvent trop étroit pour leurs aspirations ; leurs possibilités sont aussi infinies que les mondes qui ne cessent de croître et multiplier sous l'œil scrutateur de l'astronome ; on ne saurait les restreindre à des limites précises ou les réduire à des définitions valables pour toujours, comme la conscience, la vie, qui paraît sommeiller dans chaque monade, chaque atome de la matière, chaque feuille, chaque bouton et chaque cellule et qui est toujours prête à éclater sous de nouvelles formes de l'existence animale et végétale."'

En 1878, Sylvester fonda l'*American Journal of Mathematics*, édité sous sa direction par l'Université Johns Hopkins. Cette revue imprima aux mathématiques, aux Etats-Unis, une poussée extraordinaire dans la bonne direction, celle des recherches ; elle est encore florissante au point de vue mathématique, mais se heurte, financièrement, à maintes difficultés.

Deux années plus tard, il se produisit un de ces incidents classiques dans la carrière de Sylvester nous le trouvons raconté dans le passage suivant du Dr. Fabian Franklin, successeur de Sylvester à la chaire de mathématiques de Johns Hopkins, qu'il occupa quelques années, et plus tard éditeur de l'*American* de Baltimore, qui en fut le témoin à la fois visuel et auditif :

"Il [Sylvester] a fait quelques traductions excellentes d'Horace et de poètes allemands, et a écrit, en outre, un certain nombre de pièces de vers originales. Les tours de force en matière de rime, qu'il a exécutés durant son séjour à Baltimore, étaient destinés à illustrer les théories de versification dont il donne des exemples dans son petit livre intitulé : *Les lois de la versification.* La lecture de son poème *Rosalinde* à l'Institut Peabody a été l'occasion d'une preuve amusante de sa distraction. Ce poème n'a pas moins de quatre cents vers, qui riment tous avec le mot Rosalinde (en autorisant les deux consonances de la lettre i, la brève et la longue). La salle était bondée, et l'assistance se promettait beaucoup d'intérêt et d'amusement à l'audition de cette expérience unique en poésie. Mais le professeur Sylvester avait jugé nécessaire d'écrire un grand nombre de notes explicatives, et il annonça que, pour ne pas interrompre le poème, il lirait les notes en premier lieu. Mais presque chaque note lui suggérait quelque remarque improvisée, et l'auteur était si captivé qu'il ne se doutait pas du tout de la fuite du temps ni de l'amusement de l'assistance. Quand il eut terminé avec la dernière de ses notes, il regarda la pendule et fut épouvanté de constater qu'il parlait depuis une heure et demie sans avoir même commencé la lecture du poème qu'on était venu entendre ; l'étonnement qui se peignit sur son visage fut accueilli par un éclat d'hilarité générale ; alors, après avoir laissé à ses auditeurs toute liberté de se retirer s'ils avaient des engagements, il se mit à lire le poème de Rosalinde.

Le jugement du Dr Franklin sur son professeur nous dépeint admirablement la personnalité de celui-ci : "Sylvester était d'un caractère impatient et emporté, mais généreux, charitable et le cœur sur la main. Il appréciait toujours beaucoup les travaux des autres et reconnaissait chaleureusement le talent ou les capacités de ses élèves ; il partait en guerre à la moindre provocation, mais il ne nourrissait aucun ressentiment et était toujours heureux d'oublier à la première occasion le motif d'une dispute."

Avant de reprendre le fil de la vie de Cayley au moment où il renoua ses relations avec Sylvester, laissons l'auteur de Rosalinde nous décrire comment il a fait une de ses plus belles découvertes, ce qu'on appelle les "formes canoniques". [C'est simplement la réduction d'une quantique donnée à une forme normale. Par exemple $ax^2 + 2bxy + cy^2$ peut se mettre sous la forme d'une somme de deux carrés, $X2 + Y2$; $ax^5 + 5bx^4y + 10cx^3y^2 + 10dx^2y^3 + 5exy^4 + fy^5s$ peut s'exprimer par la somme de trois cinquièmes puissances, $X^5 + Y^5 + Z^5$].

"J'ai découvert et établi toute la théorie des formes canoniques binaires de degrés impairs et, aussi loin que j'ai pu en venir à bout, également de degrés pairs [1], en une séance, avec un flacon de porto pour soutenir les défaillances de la nature, dans un bureau du fond à Lincoln's Inn Fields. Le travail a été fait, et bien fait, mais au prix habituel du supplice de la pensée, le cerveau en feu, et les pieds sensibles ou privés de sentiment, comme s'ils étaient plongés dans un seau de glace. Cette nuit-là, nous ne dormîmes plus." Il faut reconnaître que ces symptômes sont incontestables ; mais le porto devait être bon, à en juger par ce que Sylvester a tiré du flacon.

Cayley et Sylvester se retrouvèrent de nouveau ensemble professionnellement, lorsque Cayley accepta de venir faire des cours à Johns Hopkins pendant six mois, en 1881-82. Il prit comme sujet les fonctions abéliennes, sur lesquelles il travaillait à cette époque, et Sylvester, alors âgé de 67 ans, suivit assidûment chaque cours de son célèbre ami. Sylvester avait encore plusieurs années fécondes devant lui, Cayley pas tout-à-fait autant.

Nous allons maintenant exposer brièvement trois des contributions les plus remarquables de Cayley aux mathématiques, en sus de son travail sur la théorie des invariants algébriques, de ses découvertes de la théorie des matrices et de la géométrie de l'espace à n dimensions, que nous avons déjà mentionnés, et de celle de ses idées en géométrie qui, grâce aux travaux de Klein, a jeté une lumière nouvelle sur la géométrie non-euclidienne ; nous commencerons par la dernière de ces trois contributions parce qu'elle est la plus ardue.

Desargues, Pascal, Poncelet et d'autres ont créé la géométrie *projective* (voir chap. V, XIII), dont l'objet est de découvrir celles des propriétés des figures qui ne varient pas quand on projette

[1] Cette partie de la théorie a été développée quelques années plus tard par E. K. Wakeford (1894-1916) qui fut tué au cours de la Grande Guerre. Remercions Dieu de nous avoir laissé cette heure-là, a dit Rupert Brooke.

ces dernières. Les mesures (grandeurs des angles, longueurs des lignes) et les théorèmes qui en dépendent, par exemple le théorème de Pythagore du carré de l'hypothénuse, ne sont pas projectifs, mais *métriques*, et ne se traitent pas par la géométrie projective ordinaire. Ce fut un des hauts faits de Cayley en géométrie de franchir la barrière qui, avant qu'il ne l'eût fait, séparait les propriétés projectives des propriétés métriques. La géométrie métrique devint, elle aussi, projective et les grandes possibilités et la souplesse des méthodes projectives furent applicables aux propriétés métriques grâce à l'introduction d'éléments "imaginaires" (par exemple, les points dont les coordonnées comprennent $\sqrt{-1}$). Quiconque a fait un peu de géométrie analytique se souvient que deux cercles se coupent en quatre points, dont deux sont toujours "imaginaires". (Il y a des cas apparemment exceptionnels, par exemple les cercles concentriques, mais il est inutile ici d'entrer dans ce détail). En géométrie métrique, les notions fondamentales sont la distance entre deux points et l'angle entre deux lignes ; remplaçant le concept de distance par un autre, impliquant aussi des éléments imaginaires, Cayley a trouvé le moyen d'unifier la géométrie d'Euclide et les géométries non-euclidiennes ordinaires en une théorie qui les embrasse. Sans recourir à l'algèbre, on ne saurait expliquer intelligiblement comment cela peut être fait ; il nous suffit ici d'avoir noté le progrès réalisé par Cayley en unissant la géométrie métrique et la géométrie projective aux autres géométries que nous venons de citer.

La question de la géométrie à n dimensions, lorsque Cayley la posa pour la première fois, était bien plus mystérieuse qu'elle ne nous paraît aujourd'hui, accoutumés que nous sommes au cas spécial de quatre dimensions (espace-temps) de la relativité. On dit encore quelquefois qu'une géométrie à quatre dimensions est inconcevable à l'esprit humain ; c'est une superstition dont Plucker a eu raison il y a longtemps ; il est facile de projeter des figures à quatre dimensions sur une feuille de papier, et, en ce qui concerne la géométrie, on peut aisément imaginer l'ensemble d'un espace à quatre dimensions. Considérons d'abord un espace à trois dimensions auquel on n'est pas habitué, tous les cercles que l'on peut tracer sur un plan ; ce tout est un espace à trois dimensions, pour la simple raison qu'il faut exactement trois nombres, ou trois coordonnées, pour spécifier un quelconque du faisceau des cercles, savoir : deux pour déterminer la position du centre rapporté à une paire d'axes arbitrairement donnés, et un pour fixer la longueur du rayon.

Si maintenant le lecteur veut se représenter un espace à quatre dimensions, il prendra, comme éléments de construction de notre espace "solide" habituel, des lignes droites, au lieu de points ; au lieu de notre espace familier apparaissant comme une agglomération de grenaille infiniment fine, nous aurons une meule cosmique de pailles droites infiniment longues et infiniment minces. On verra aisément que c'est, en fait, un espace à quatre dimensions fait de lignes droites, en constatant, comme on peut le faire, que juste quatre nombres sont nécessaires et suffisants pour spécifier une paille particulière de notre meule ; nous pouvons choisir le nombre de dimensions d'un espace, pourvu que nous choisissions convenablement les éléments (points, cercles, lignes, etc.) de sa construction ; naturellement, si nous choisissons les points comme éléments de l'espace à construire, personne, en dehors d'un asile d'aliénés, n'arrivera à se représenter un espace à plus de trois dimensions.

La physique moderne apprend vite à se défaire de la croyance en un espace absolu mystérieux au-dessus et au delà des espaces mathématiques, comme celui d'Euclide par exemple, qui ont été construits par des géomètres pour corroborer leurs expériences physiques. La géométrie d'aujourd'hui est largement une question d'analyse, mais l'ancienne terminologie de points, lignes, distances, et ainsi de suite, nous est précieuse en nous suggérant des choses intéressantes à faire avec nos systèmes de coordonnées ; mais il ne s'ensuit pas que ces choses particulières soient les plus utiles que nous puissions faire en analyse, il peut même arriver qu'un jour elles soient toutes, comparées à des choses plus importantes, des banalités qu'enserrés dans nos traditions surannées, nous continuons à faire, uniquement par manque d'imagination.

S'il y a quelque vertu mystérieuse à discuter des situations qui surgissent en analyse, comme si nous étions revenus au temps d'Archimède traçant ses diagrammes sur le sable, elle est encore à découvrir. Les figures après tout, peuvent ne convenir qu'aux jeunes enfants ; Lagrange s'est passé entièrement de cette aide enfantine quand il a établi sa mécanique analytique ; notre propension à géométriser notre analyse peut n'être que la preuve que nous n'avons pas encore assez grandi. Newton lui-même, on le sait, obtint d'abord ses merveilleux résultats par l'analyse, et il les revêtit ensuite de démonstrations dignes d'un Apollonius, d'abord parce qu'il savait que les mathématiciens moins doués que lui ne croiraient pas à la vérité d'un théorème s'il n'était accompagné d'une belle figure et d'une démonstration euclidienne montée en épingle, ensuite parce que lui-même se complaisait volontiers dans le crépuscule pré-cartésien de la géométrie.

La dernière des trois grandes découvertes de Cayley que nous avons choisies pour cet exposé est celle des matrices et de leur algèbre, dans ses grandes lignes. Le sujet a son origine dans un mémoire de 1838, et son développement est parti de simples observations sur la manière suivant laquelle se combinent les transformations (linéaires) de la théorie des invariants algébriques. Nous reportant à ce que nous avons dit des discriminants et de leur invariance, notons la transformation $y \to \dfrac{px+q}{rx+s}$ (la flèche se lit ici : "est remplacée par"). Supposons nous ayons deux de ces transformations :

$$y \to \frac{px+q}{rx+s} \qquad\qquad x \to \frac{Pz+Q}{Rz+S}$$

dont la seconde doit être portée dans la première à la place de x ; nous obtenons

$$y \to \frac{(pP+qR)z+(pQ+qS)}{(rP+sR)z+(rQ+sS)}.$$

Retenant seulement trois transformations, nous les écrirons dans des tableaux :

$$\begin{Vmatrix} p & q \\ r & s \end{Vmatrix} \qquad\qquad \begin{Vmatrix} P & Q \\ R & S \end{Vmatrix} \qquad\qquad \begin{Vmatrix} pP+qR & pQ+qS \\ rP+sR & rQ+sS \end{Vmatrix}$$

et nous voyons que le résultat de l'exécution des deux premières transformations successives aurait pu s'écrire directement en appliquant la règle suivante de multiplication :

$$\begin{Vmatrix} p & q \\ r & s \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} P & Q \\ R & S \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} pP+qR & pQ+qS \\ rP+sR & rQ+sS \end{Vmatrix}$$

où les lignes du tableau de droite sont obtenues, d'une manière facile à voir, en multipliant les lignes du premier tableau de gauche par les colonnes du second. Ces tableaux, d'un nombre quelconque de lignes et de colonnes, s'appellent des matrices. Leur algèbre se déduit d'un petit nombre de postulats simples : nous ne citerons que les suivants. Les matrices

$$\begin{Vmatrix} a & b \\ c & d \end{Vmatrix} \qquad \text{et} \qquad \begin{Vmatrix} A & B \\ C & D \end{Vmatrix}$$

sont égales (par définition) lorsque et seulement lorsque $a = A, b = B, c = C, d = D$. La somme des deux matrices ci-dessus est la matrice

$$\begin{Vmatrix} a+A & b+B \\ c+C & d+D \end{Vmatrix}.$$

Le résultat de la multiplication de $\begin{Vmatrix} a & b \\ c & d \end{Vmatrix}$ par un nombre quelconque m est la matrice $\begin{Vmatrix} ma & mb \\ mc & md \end{Vmatrix}$. La règle de multiplication (ou de composition) des celle dont nous avons donné l'exemple pour les deux matrices $\begin{Vmatrix} p & q \\ r & s \end{Vmatrix}$ et $\begin{Vmatrix} P & Q \\ R & S \end{Vmatrix}$ ci-dessus. Une caractéristique de ces règles est que la multiplication n'est pas commutative, sauf pour des espèces spéciales de matrices. Par exemple, en appliquant la règle, nous avons

$$\begin{Vmatrix} P & Q \\ R & S \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} p & q \\ r & s \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} Pp+Qr & Pq+Qs \\ Rp+Sr & Rq+Ss \end{Vmatrix}$$

et la matrice de droite n'est pas égale à celle que nous avons indiquée plus haut et que l'on obtient en multipliant

$$\begin{Vmatrix} p & q \\ r & s \end{Vmatrix} \quad \text{par} \begin{Vmatrix} P & Q \\ R & S \end{Vmatrix}.$$

Nous avons donné tout ce détail, en particulier le dernier, pour illustrer un phénomène que l'on retrouve souvent dans l'histoire des mathématiques. Les outils mathématiques nécessaires pour telles applications scientifiques ont été souvent inventés de nombreuses années avant que la science dont les mathématiques donnaient ainsi la clef, ait été imaginée. La règle bizarre de multiplication pour les matrices, d'après laquelle nous obtenons des résultats différents selon l'ordre dans lequel nous faisons la multiplication (contrairement à l'algèbre ordinaire où $x \times y$ est toujours égal à $y \times x$), nous paraît assez éloignée de quoi que ce soit qui puisse être d'un usage pratique ou scientifique ; eh bien ! soixante-sept ans après que Cayley eût trouvé cette règle, Heisenberg, en 1925, reconnut dans l'algèbre des matrices précisément l'outil dont il avait besoin pour son œuvre révolutionnaire dans la mécanique des quanta.

Cayley poursuivit son activité créatrice jusqu'à la semaine de son décès, qui se produisit après une longue et douloureuse maladie, supportée avec courage et résignation, le 26 janvier 1895. Citons les phrases par lesquelles Forsyth, élève de Cayley et son successeur à Cambridge, termine sa biographie : "Il était plus que mathématicien ; avec une constance de but, que Wordsworth aurait choisie pour son "Happy Warrior" (Heureux guerrier), il persévéra jusqu'à la fin dans l'idéal de sa noble existence. Sa vie a exercé une grande influence sur ceux qui l'ont connu ; ils ont eu autant d'admiration pour son caractère que de respect pour son génie, et à sa mort ils ont senti qu'un grand homme avait disparu du monde."

Beaucoup de ce qu'a fait Cayley est devenu courant en mathématiques et il est probable que les mathématiciens aventureux des générations à venir trouveront dans sa copieuse collection de Mémoires mathématiques (treize volumes in quarto d'environ 600 pages chacun, comprenant 966 mémoires) des idées pour des incursions profitables. Pour le moment, la mode n'est plus aux questions qui ont passionné Cayley, et on peut en dire autant pour Sylvester ; mais les mathématiques ont l'habitude de revenir à leurs anciens problèmes pour les inclure dans des synthèses d'un plus vaste contenu.

En 1883, Henry John Stephen Smith, le brillant spécialiste irlandais de la théorie des nombres, professeur de géométrie à l'Université d'Oxford, mourut dans la fleur de l'âge pour un savant, à cinquante-sept ans. Oxford proposa au vieux Sylvester, alors dans sa soixante-dixième année, d'occuper la chaire vacante ; il accepta, au grand regret de ses innombrables amis d'Amérique ; mais il avait la nostalgie du pays natal, qui pourtant ne l'avait guère traité trop généreusement ; peut-être aussi éprouvait-il quelque satisfaction à sentir que "la pierre que les bâtisseurs avaient rejetée était devenue la pierre d'angle".

L'étonnant vieillard arriva à Oxford pour traiter une théorie mathématique toute nouvelle (celle des invariants différentiels ou Réciprocants). La louange ou la juste appréciation de sa valeur semble avoir toujours poussé Sylvester à se dépasser lui-même ; bien qu'il eût été en partie devancé dans son dernier travail par le mathématicien français Georges Halphen, il le marqua de son génie et le vivifia de son ineffaçable personnalité.

Il ouvrit son cours à Oxford, le 12 décembre 1885, avec tout le feu et l'enthousiasme de ses jeunes années et peut-être même encore davantage, parce que maintenant il se sentait sûr de lui et savait que le monde qui l'avait combattu reconnaissait enfin sa valeur. Deux extraits donneront une idée du style de ses cours :

"La théorie que je vais vous exposer, ou dont je vais vous annoncer la naissance, a avec celle-ci [la grande théorie des invariants] la parenté, non d'une jeune sœur, mais d'un frère qui, bien que né plus tard, a, en vertu du principe de la supériorité du masculin sur le féminin ou, en tout cas, d'après les règles de la loi salique, le droit d'avoir la préséance sur sa sœur aînée et d'exercer l'autorité suprême sur leurs royaumes réunis".

Une autre fois, commentant l'absence inexplicable d'un terme dans une expression algébrique, il se laisse entraîner par son ardeur poétique :

"Dans le cas qui nous occupe, cette absence inattendue d'un membre de la famille, sur la présence duquel on pouvait compter a fait impression sur mon esprit et même provoqué mon émotion.

Je me suis mis à y penser comme à une sorte de Pléiade égarée dans une constellation algébrique et finalement, en ruminant mon sujet, mes sentiments ont trouvé une soupape, ou cherché l'apaisement dans une effusion poétique, un "*jeu de sottise*" que je me risque à vous lire, non sans quelque crainte d'être taxé d'extravagance ou de singularité ; cela nous servira au moins d'intermède et vous délassera de l'effort imposé à votre attention avant que je passe à mes remarques finales sur la théorie générale :

À un membre manquant
d'une famille de termes d'une formule algébrique

Isolé, tenu à l'écart, séparé par le destin
De tes camarades qui t'attendent, où t'es-tu enfui ?
Où languis-tu après l'état qui t'a été ravi
Comme quelque étoile perdue ou quelque météorite enfouie ?
Tu me fais penser à ce présomptueux
Qui voulait, bien qu'inférieur au plus grand, être grand
Et tomba tête baissée du haut de l'immensité céleste
Pour vivre isolé, replié sur lui-même, désolé,
Ou qui, nouvel Héraclite, subit un dur exil,
Tantôt soutenu par l'espoir, tantôt torturé d'épouvante,
Jusqu'à ce que la souveraine Astrée, lui murmurant à l'oreille
Des mots de vague présage à travers le mugissement de l'Atlantique
Lui ouvrit le sanctuaire de la Muse vénérée
Et jonchât de flamme la poudre des rivages d'Isis.

Nous étant ainsi rafraîchis et ayant trempé le bout de nos doigts dans le printemps Piérien, retournons pour quelques moments au léger banquet de la raison, et entretenons-nous, en guise de dessert, de quelques considérations générales qui découlent naturellement du début de mon exposé."

Si le printemps Piérien était le rince-bouche du vieil enthousiaste dans cet étonnant festin de la raison, on peut parier sûrement que le fidèle flacon de porto n'était jamais très loin de son bras.

Le sentiment de la parenté des mathématiques avec les beaux arts se manifeste fréquemment dans les écrits de Sylvester. Ainsi, dans une note au bas d'une page d'un mémoire sur la règle de Newton pour trouver les racines imaginaires des équations algébriques, il se demande "Ne pourrait-on pas représenter la musique comme les mathématiques des sens, les mathématiques comme la musique de la raison ? Le musicien sent les mathématiques, le mathématicien conçoit la musique, la musique est le rêve, les mathématiques la vie pratique, chacune se complètera par l'autre lorsque l'intelligence humaine, parvenue à son type parfait, brillera glorifiée dans quelque futur Mozart-Dirichlet ou Beethoven-Gauss, union qui se laisse déjà nettement entrevoir dans le génie et les travaux d'un Helmholtz."

Sylvester aimait la vie, même lorsqu'il était forcé de lutter pour elle et si jamais un homme en a tiré le meilleur de ce qu'elle peut donner, c'est bien lui. Il se glorifiait du fait que les grands mathématiciens, exception faite de ce qu'on peut qualifier de morts évitables ou accidentelles, vivent longtemps et conservent leur vigueur d'esprit jusqu'à leurs derniers jours. Dans son adresse présidentielle à l'ouverture du Congrès de l'Association Britannique en 1869, il rappelait les annales honorifiques des plus grands mathématiciens du passé et citait l'âge auquel ils étaient décédés pour corroborer sa thèse qu'"il n'y a pas au monde d'étude qui mette toutes les facultés de l'esprit plus harmonieusement en action que [les mathématiques]... ou qui paraisse les élever, par des degrés successifs d'initiation, à un niveau de plus en plus haut de l'être intellectuel conscient... Le mathématicien vit longtemps et reste jeune ; les ailes de son âme ne fléchissent pas de bonne heure et ses pores ne sont pas obstrués par la poussière qui s'élève des grandes routes poudreuses de la vie vulgaire."

Sylvester a été un exemple vivant de sa théorie. Mais il finit cependant par être terrassé par le temps. En 1893, à soixante-dix-neuf ans, sa vue commença à baisser ; il s'attrista et se découragea parce qu'il ne pouvait plus professer avec son vieil enthousiasme. L'année suivante, il demanda à être relevé de ses fonctions les plus absorbantes et se retira seul et déprimé, à Londres puis à Tunbridge Wells. Tous ses frères et sœurs étaient morts depuis longtemps, ainsi que la plupart de ses plus chers amis.

Il n'était cependant pas absolument à bout. Son esprit était encore vigoureux, bien qu'il sentît que le fil acéré de sa faculté inventive était à jamais émoussé. Vers la fin de 1896, à quatre-vingt-deux ans, il se prit d'un nouvel enthousiasme pour une question qui l'avait toujours séduit, la théorie des partitions composées et l'hypothèse de Goldbach que tout nombre pair est la somme de deux nombres premiers.

Il n'en avait plus pour longtemps. Un jour, au début de mars 1897, travaillant les mathématiques dans sa chambre à Londres, il eut une attaque qui le priva de l'usage de la parole. Il mourut le 15 mars 1897, à l'âge de quatre-vingt-trois ans. Sa vie peut se résumer en quelques mots qu'il a lui-même prononcés : "J'aime vraiment mon sujet."