Transcription en LaTeX d'un chapitre du livre de E. T. Bell *Les grands mathématiciens*

Chapitre XXIX

Cantor

Paradis perdu ?

> *"Les mathématiques, comme tous les autres sujets, doivent maintenant passer à leur tour sous le microscope, qui révélera au monde toutes les faiblesses qui peuvent exister dans leurs fondations."*
>
> F. W. Westaway.

Nous pouvons bien prendre, comme conclusion de toute l'histoire de Cantor en nous permettant de violer l'ordre chronologique, le sujet controversé de la *Mengenlehre* (théorie des groupes, ou classes, en particulier des groupes infinis) créée par lui de 1874 à 1895. Ce sujet caractérise, pour les mathématiques, l'effondrement général de ces principes que les prophètes du XIXe siècle, qui avaient tout prévu sauf la grande débâcle, croyaient être d'une solidité fondamentale en toutes choses, depuis la science physique jusqu'au gouvernement démocratique.

Si "effondrement" paraît trop fort pour exprimer la transition dont le monde cherche de son mieux à s'accomoder, il n'en est pas moins vrai que l'évolution des idées scientifiques progresse si vertigineusement que c'est à peine si l'on peut la distinguer d'une révolution.

Sans les erreurs du passé, foyer profond de perturbation, le bouleversement actuel dans la science physique ne se serait peut-être pas produit ; mais attribuer à nos prédécesseurs l'inspiration de toutes les œuvres de notre génération, c'est leur donner plus que leur dû. Ce point mérite qu'on s'y arrête quelques instants ; certains en effet peuvent essayer de dire que la révolution dans les idées mathématiques, dont les débuts apparaissent maintenant nettement, est purement et simplement un écho de Zénon et autres sceptiques de l'ancienne Grèce.

Les difficultés de Pythagore au sujet de la racine carrée de 2 et les paradoxes de Zénon sur la continuité (ou la divisibilité infinie) sont, autant que nous puissions en juger, à l'origine de notre schisme actuel en mathématiques. Les mathématiciens d'aujourd'hui qui accordent quelque attention à la philosophie de leur sujet, ou à ses fondements, sont divisés au moins en deux factions apparemment sans espoir de réconciliation, au sujet de la validité du raisonnement employé en analyse mathématique ; on peut faire remonter ce désaccord au Moyen Âge et de là à la Grèce antique. Tous les partis adverses ont eu leurs représentants, à toutes les époques de la pensée mathématique, que celle-ci ait été déguisée sous des paradoxes provocateurs comme avec Zénon,

Référence :
https://www.bibliotheque.nat.tn/KHNU/doc/SYRACUSE/90812/e-t-bell-les-grands-mathematiciens-zenon-eudox-archimede-descartes-kummer-et-dedekind-poncare-cantor?_lg=fr-FR.

Transcription : Denise Vella-Chemla, février 2025.

ou en subtilités de la logique comme avec certains des logiciens les plus exaspérants du Moyen Âge. Les mathématiciens attribuent en général la cause de ces divergences au tempérament ; toute tentative de convertir un analyste comme Weierstrass au scepticisme d'un Kronecker est aussi vaine que d'essayer de convertir un chrétien convaincu à l'athéïsme.

Quelques citations tirées des grands chefs de la querelle peuvent servir de stimulant (ou de sédatif, selon le goût de chacun), à notre enthousiasme à l'égard de la carrière exceptionnelle de Georges Cantor, dont la "théorie positive de l'infini" a précipité, de notre temps, la plus furieuse bataille "des grenouilles et des souris" (comme Einstein l'a appelée) de l'histoire, au sujet de la validité du raisonnement mathématique traditionnel.

En 1831, Gauss a exprimé comme il suit son "horreur de l'infini réel". "Je proteste contre l'usage de la grandeur infinie comme quelque chose d'achevé, ce qui n'est jamais admissible en mathématiques. L'infini est purement une manière de parler ; son vrai sens est une limite de laquelle certains rapports s'approchent indéfiniment, tandis que d'autres peuvent croître sans restriction."

Ainsi, si x désigne un nombre réel, la fraction $\frac{1}{x}$ diminue au fur et à mesure que x croît, et nous pouvons trouver une valeur de x telle que $\frac{1}{x}$ diffère de zéro d'une quantité fixée à l'avance (autre que zéro) qui peut être aussi petite qu'il nous plaît ; et au fur et à mesure que x continue à croître, la différence reste moindre que cette quantité déterminée ; et au fur et à mesure que x continue à croître, la différence reste moindre que cette quantité déterminée ; la limite de $\frac{1}{x}$ lorsque x tend vers l'infini, est zéro. Le symbole de l'infini est ∞ ; mais déclarer que $\frac{1}{\infty} = 0$, c'est un non sens pour deux raisons : la division par l'infinité est une opération qui est indéterminée, qui n'a donc pas de sens ; la seconde raison est celle qu'a donnée Gauss. De même $\frac{1}{0} = \infty$ est un non sens.

Cantor est à la fois d'accord et en désaccord avec Gauss. Écrivant en 1886 à propos du problème de l'infini réel (Gauss dit "achevé"), Cantor dit ceci "en dépit de la différence essentielle entre les concepts de l'infini potentiel et de l'infini réel, le premier signifiant une grandeur variable finie croissant au-delà de toute limite finie (comme x dans $\frac{1}{x}$ ci-dessus), tandis que le second est une grandeur constante, fixe, située au-delà de toutes les grandeurs finies, il n'arrive que trop souvent qu'on les confonde."

Cantor continue en expliquant que c'est l'usage erroné que l'on a fait de l'infini en mathématiques qui a précisément inspiré aux mathématiciens circonspects de notre époque une horreur de l'infini comme celle que Gauss a éprouvée. Et néanmoins Cantor maintient que "rejeter sans discernement l'infini réel légitime n'en est pas moins une violation de la nature des choses [ce qu'il faut entendre par là ne paraît pas avoir été révélé à l'humanité comme un tout] qui doivent être prises telles qu'elles sont". Cantor se classe ainsi définitivement sur le plan des grands théologiens du Moyen Âge, qu'il a étudiés à fond et admirés ardemment.

Les certitudes absolues et les solutions complètes des anciens problèmes passent toujours mieux si on les assaisonne avant de les ingurgiter. Voici ce que Bertrand Russell disait en 1901 à propos de la manière dont Cantor, tel Prométhée, avait abordé l'infini : "Zénon s'est occupé de trois problèmes... celui de l'infinitésimal, celui de l'infini, et celui de la continuité... De son époque à la nôtre, les plus grands esprits de chaque génération ont, chacun à leur tour, étudié ces problèmes, mais, à parler sincèrement, sans aboutir à rien... Weierstrass, Dedekind et Cantor..... les ont complètement résolus. Leurs solutions sont si claires qu'elles ne laissent plus le moindre soupçon de difficulté. Ce fait est sans doute le plus grand de ceux dont notre époque peut se glorifier... Le problème de l'infiniment petit a été résolu par Weierstrass, Dedekind a commencé la solution des deux autres et c'est Cantor qui l'a définitivement accomplie" [1].

L'enthousiasme que respire ce passage nous enflamme, même aujourd'hui, quoique nous sachions que Russell, dans la deuxième édition (1924) de ses *Principia Mathematica* (en collaboration avec A. Whitehead), a reconnu que tout n'était pas pour le mieux dans la "coupure" de Dedekind (voir chapitre XXVII), cette épine dorsale de l'analyse. Et tout n'est pas non plus pour le mieux aujourd'hui : en une décade, on en fait davantage pour ou contre un credo particulier en science ou en mathématiques qu'on n'en a fait en un siècle de l'antiquité, du Moyen Âge ou de la Renaissance ; plus de bons esprits que jamais s'attaquent à un problème capital scientifique ou mathématique, et la finalité est devenue la propriété privée des causalistes ; pas une des finalités contenues dans les remarques de Russell de 1901 n'a survécu. Il y a un quart de siècle, ceux qui étaient incapables d'apercevoir la grande lumière que les prophètes assuraient briller au-dessus de nos têtes comme le soleil en plein midi furent traités de stupides ; aujourd'hui, pour chaque expert compétent du parti des prophètes, il y en a un tout aussi compétent dans le parti adverse ; s'il y a stupidité quelque part, elle est si également répartie qu'elle a cessé d'être une marque distinctive ; nous entrons dans une ère nouvelle, ère de doute et de modeste humilité.

Et du côté douteux nous trouvons, vers la même époque (1905), Poincaré : "J'ai parlé plus haut du besoin que nous avons de remonter sans cesse aux premiers principes de notre science et du profit qu'en peut tirer l'étude de l'esprit humain. C'est ce besoin qui a inspiré deux tentatives qui ont tenu une très grande place dans le développement le plus récent des mathématiques. La première est le cantorisme, qui a rendu à la science les services que l'on sait. Cantor a introduit dans la science une manière nouvelle de considérer l'infini mathématique, mais il est arrivé qu'on s'est heurté à certains paradoxes, à certaines contradictions apparentes, qui auraient comblé de joie Zénon d'Elée et l'école de Mégare. Et alors chacun de chercher le remède. Je pense pour mon compte, et je ne suis pas le seul, que l'important c'est de ne jamais introduire des entités que l'on ne puisse définir complètement en un nombre fini de mots. Quel que soit le remède adopté, nous pouvons nous promettre la joie du médecin appelé à traiter un beau cas pathologique."

Quelques années plus tard, Poincaré en avait quelque peu rabattu de son intérêt pour la pathologie en ce qui le concerne ; au Congrès International de Mathématiques de Rome en 1908, le médecin blasé laissait échapper ce pronostic : "Les générations à venir considéreront la *Mengenlehre* comme une maladie dont on s'est guéri."

C'est le plus grand mérite de Cantor d'avoir découvert, en dépit de lui-même et de ses propres désirs en la matière, que le "corps mathématicien" est profondément malade et n'est pas encore guéri de l'affection dont Zénon était atteint. Sa découverte, qui a semé le trouble, est un écho

[1] Extrait de R. E. Moritz, *Memorabilia Mathematica*. Je n'ai pas trouvé la source initiale

singulier de sa propre vie intellectuelle ; nous commencerons par jeter un coup d'œil sur les faits de son existence matérielle ; ils n'ont peut-être pas beaucoup d'intérêt par eux-mêmes, mais ils éclairent particulièrement les derniers aspects de sa théorie.

De descendance purement israélite des deux côtés, Georges Ferdinand Louis Philippe Cantor était le premier enfant d'un riche négociant, Georges Waldemar Cantor et de sa femme Marie Bohm. Le père, né à Copenhague, était allé dans sa jeunesse habiter Saint-Pétersbourg, où le mathématicien naquit le 3 mars 1845. Une affection pulmonaire obligea le père à quitter la Russie, et en 1856 il vint se fixer à Francfort-sur-le-Main, où il vécut dans une retraite confortable jusqu'à sa mort en 1863. Ce curieux mélange de nationalités a permis à plusieurs nations de revendiquer Cantor comme leur enfant. Cantor lui-même a opté pour l'Allemagne, mais on ne peut pas dire que l'Allemagne ait opté très cordialement pour lui.

Georges avait un frère, Constantin, qui était officier dans l'armée allemande, et une sœur, Sophie Nobiling. La mère était une artiste, le frère fut un pianiste remarquable, et la sœur dessinait admirablement ; quant à Georges, sa nature artistique a trouvé son débouché dans les mathématiques et la philosophie, à la fois classique et scolastique. Les enfants avaient hérité ce tempérament artistique très marqué de leur mère, dont le grand-père était chef d'orchestre et dont un frère, qui habitait Vienne, fut le professeur du célèbre violoniste Joachim. Un frère de Marie Bohm était musicien et une de ses nièces artiste peintre. S'il est vrai que normalité et stabilité phlegmatique soient des équivalents, tout cet éclat artistique familial peut bien avoir été la source de l'instabilité de Cantor.

Ses parents étaient chrétiens, car le père s'était converti au protestantisme et la mère était catholique romaine. Comme son ennemi acharné Kronecker, Cantor était attiré par le protestantisme et avait un goût particulier pour les coupeurs de cheveux en quatre de la théologie médiévale. S'il n'était pas devenu mathématicien, il aurait fort probablement laissé un nom en philosophie ou en théologie. Il est intéressant de noter que la théorie de Cantor sur l'infini a été mise à profit avec empressement par les Jésuites, dont la logique pénétrante a discerné dans l'imagerie mathématique fort au-delà de leur compréhension théologique, des preuves indubitables de l'existence de Dieu et de la consistance en soi de la Sainte-Trinité avec ses trois-en-un, un-en-trois, co-égaux et co-éternels. Il est juste de reconnaître que Cantor, qui avait l'esprit très vif et la langue encore plus vive quand il était irrité, a tourné en ridicule l'absurde prétention de pareilles preuves, tout chrétien convaincu et théologien de valeur qu'il fût personnellement.

La carrière scolaire de Cantor fut comme celle des mathématiciens brillamment doués, son plus grand talent et son intérêt passionné pour les mathématiques se manifestèrent de bonne heure (avant quinze ans). Après avoir reçu les leçons d'un professeur privé, il suivit les cours d'une école primaire à Saint-Pétersbourg ; lorsque sa famille se fixa en Allemagne, il alla d'abord à l'école dans des institutions privées à Francfort et à Darmstadt et entra ensuite au Gymnasium de Wiesbaden en 1860, à l'âge de quinze ans.

Georges était décidé à se consacrer aux mathématiques, mais son père, se rendant compte de ses aptitudes dans cette branche, s'obstinait à le pousser vers la carrière d'ingénieur qui lui paraissait plus rémunératrice. À l'occasion de sa confirmation, en 1860, il écrivit à son fils en lui exprimant les grands espoirs que lui-même et tous les oncles, et tantes, cousins d'Allemagne, de Danemark et de Russie avaient fondés en lui : "ils n'attendent de toi rien moins que de te voir devenir un Théodore Schaeffer et plus tard, peut-être, si Dieu le permet, une étoile brillante dans le firmament des ingénieurs." Quand donc les parents reconnaîtront-ils la stupidité présomptueuse de vouloir faire d'un pur sang un cheval de fiacre ?

Ce pieux appel à Dieu, qui était destiné à obtenir la soumission de ce garçon sensible et pieux de quinze ans rebondirait aujourd'hui (grâce à Dieu !) comme une balle de tennis sur les têtes plus dures de nos jeunes générations ; mais ce fut un rude coup pour Cantor, en fait, il en fut profondément abattu. Aimant avec dévouement son père et de nature profondément religieuse, il ne comprit pas que le vieillard n'était animé que par l'âpre désir du gain. Ainsi débutèrent le premier froissement de la sensibilité aiguë de Cantor. Au lieu de se rebeller, comme ne manquerait pas de le faire de nos jours un garçon aussi bien doué, il se soumit jusqu'à ce que son père lui-même s'aperçût qu'il gâchait les belles dispositions de son fils ; mais en essayant pour plaire à son père de refouler ses instincts naturels, Cantor semait les germes du manque de confiance en soi, qui devait, plus tard, faire de lui une victime facile des méchantes attaques de Kronecker et l'amena à douter de la valeur de son œuvre. S'il avait été traité dans sa jeunesse comme un esprit indépendant, il n'aurait jamais acquis cette timide déférence envers les hommes de réputation établie, qui a empoisonné sa vie.

Quand le père céda, le mal était déjà fait. Lorsque Georges eut terminé ses études élémentaires, à dix-sept ans, fort brillamment, le "cher papa" l'autorisa à faire sa carrière dans les mathématiques. Tout reconnaissant, le jeune homme lui écrit : "Mon cher papa ! Vous pouvez bien comprendre à quel point votre lettre m'a réjoui. Cette lettre décide de mon avenir... Maintenant je suis heureux de voir que cela ne vous déplaît pas que je suive mes aspirations à mon gré. J'espère que vous vivrez pour trouver votre satisfaction en moi, cher père ; car mon âme, tout mon être, vit de ma vocation ; ce qu'un homme désire faire et ce vers quoi le pousse une impulsion intime, cela, je l'accomplirai." Papa mérite sans aucun doute qu'on lui vote des remerciements, même si la gratitude de Georges a une nuance de serviité trop accusée pour le goût moderne.

Cantor commença ses études supérieures à l'université de Zurich en 1862, mais la quitta dès l'année suivante à la mort de son père pour celle de Berlin. À Berlin il se spécialisa dans les mathématiques, la philosophie et la physique. En mathématiques, il eut comme professeurs Kummer, Weierstrass et Kronecker, son futur ennemi. Selon l'habitude allemande, il passa quelque temps dans une autre Université et resta un semestre, en 1866, à celle de Goettingen.

À Berlin, avec Kummer et Kronecker, l'atmosphère mathématicienne était fortement chargée d'arithmétique. Cantor fit une étude profonde des *Disquisitiones Arithmeticae* de Gauss et prit comme sujet de thèse de doctorat, qu'il passa avec succès en 1867, un point difficile que Gauss avait laissé de côté, à propos de la solution en nombres entiers de l'équation indéterminée $ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$, où a, b, c, sont des entiers donnés. C'était un beau travail ; mais, à dire vrai, aucun des mathématiciens qui l'ont lu n'aurait pu prévoir que cet auteur, conservateur de vingt-deux ans, deviendrait un des novateurs les plus radicaux de l'histoire des mathématiques. Certes ce premier essai marque un talent évident ; mais de génie, point ; cette thèse, sévèrement classique, n'annonce en rien une grande originalité.

Les premiers travaux de Cantor, qu'il a publiés avant vingt-neuf ans, donnent la même impression ; ils sont excellents, mais ils auraient pu être l'œuvre de tout homme brillamment doué qui, comme Cantor, se serait assimilé à fond la doctrine de démonstration rigoureuse de Gauss et de Weierstrass. La première passion de Cantor fut la théorie gaussienne des nombres, qui l'attirait par la perfection rigoureuse, nette, claire de ses démonstrations. De là, il passa, sous l'influence de l'école de Weierstrass, à l'analyse rigoureuse, en particulier à la théorie des séries trigonométriques (séries de Fourier).

Les subtiles difficultés de cette théorie, où les questions de convergence des séries infinies sont d'un abord moins facile que dans la théorie des séries de puissances, semblent avoir poussé Cantor à pénétrer plus profondément dans les fondements de l'analyse que n'importe lequel de ses contemporains ; c'est ainsi qu'il fut conduit à sa grande attaque contre la mathématique et la philosophie de l'infini lui-même, qui se trouve au fond de toutes les questions concernant la continuité, les limites et la convergence. Juste avant d'avoir ses trente ans, Cantor dans le journal Crelle, publia son premier mémoire révolutionnaire, sur la théorie des groupes infinis ; nous en parlerons tout à l'heure. Le résultat inattendu et paradoxal auquel arrive l'auteur au sujet du groupe de tous les nombres algébriques, ainsi que la nouveauté complète des méthodes employées, marquèrent immédiatement Cantor comme un mathématicien créateur d'une originalité extraordinaire. Sans doute tout le monde ne fut pas d'avis que ces nouvelles méthodes étaient les bonnes ; mais là n'est pas la question : il fut universellement admis qu'on était en présence de quelque chose de foncièrement nouveau en mathématiques. Cela aurait dû lui donner tout de suite une position de premier plan.

La carrière matérielle de Cantor a été celle de n'importe lequel des professeurs de mathématiques allemands les moins éminents. Il n'a jamais réalisé son ambition d'occuper une chaire de professeur à Berlin, ce qui était sans doute la plus grande distinction en Allemagne à l'époque de la production la plus active et la plus originale de Cantor, de 1874 à 1884, entre vingt-neuf et trente-neuf ans. Toute son activité professionnelle se déroula à l'Université de Halle, un établissement nettement de troisième ordre : il y fut nommé, à vingt-quatre ans, privatdocent (chargé de cours qui vit des répétitions qu'il peut trouver) ; trois ans après, en 1872, il fut nommé professeur adjoint ; enfin, en 1879, avant que la critique de son œuvre eût commencé à prendre le caractère d'attaque personnelle, il obtint une chaire de professeur en titre. Ses premiers pas dans l'enseignement pratique s'étaient faits dans une école de jeunes filles à Berlin ; il s'était préparé lui-même à ces fonctions, qui lui convenaient si peu, en suivant des cours ennuyeux de pédagogie pour avoir licence officielle d'enseigner à des enfants : que de temps gâché !

À tort ou à raison, Cantor accusa Kronecker de l'avoir empêché d'obtenir la chaire tant convoitée de Berlin. On a souvent noté le caractère agressif de l'esprit de corps entre Juifs, et cela a servi quelquefois d'argument contre leur affectation aux fonctions académiques ; mais on n'a pas aussi généralement observé qu'il n'y a pas de haine académique plus âpre que celle d'un Juif pour un autre Juif, lorsqu'ils sont en désaccord sur des questions purement scientifiques, et que l'un est jaloux ou a peur de l'autre. En pareils cas, les gentils en rient ou bien se livrent en sous-main à d'habiles menées pour arriver à leurs fins rancunières sous les dehors d'une sincère amitié. Mais quand deux intellectuels juifs constatent qu'ils sont en complet désaccord, ils jettent loin toute réserve et chacun tâche de trancher la gorge à l'autre ou de le poignarder par derrière ; après tout, c'est peut-être une façon plus décente de se battre (si l'on admet que les hommes doivent se battre) que la sainte hypocrisie de l'autre ; le but de la guerre est la destruction de l'ennemi ; dans un métier si déplaisant, être sentimental ou chevaleresque est le fait d'un combattant qui ne connaît pas son affaire. Kronecker fut un des combattants les plus capables en controverse scientifique, Cantor un des moins habiles ; c'est Kronecker qui l'emporta ; mais, comme on put s'en rendre compte plus tard, l'amère animosité de Kronecker à l'égard de Cantor n'était pas entièrement personnelle, elle fut, au moins en partie, scientifique et désintéressée.

L'année 1874, celle de l'apparition du premier mémoire révolutionnaire de Cantor sur la théorie des groupes, fut aussi celle de son mariage ; il épousa, à vingt-neuf ans, Vally Guttmann.. Ils eurent deux fils et quatre filles. Aucun des enfants n'hérita du talent du père en mathématiques. Pendant leur lune de miel à Interlaken, les jeunes mariés virent à maintes reprises Dedekind ; ce dernier a peut-être été le seul grand mathématicien de l'époque qui ait fait un effort sérieux et sympathique pour comprendre la doctrine subversive de Cantor. Le caractère original de Dedekind, lui-même mal en cour auprès des grands seigneurs des mathématiques en cette fin du XIXe siècle, le mettait en situation de sympathiser avec ce mathématicien scientifiquement mal vu. Les profanes s'imaginent quelquefois qu'en matière scientifique, l'originalité est toujours assurée d'un accueil cordial ; l'histoire des mathématiques est là pour contredire cette heureuse illusion ; la route de celui qui sort des chemins battus, en science, est aussi dure que dans n'importe quel autre domaine de l'esprit conservateur humain, même lorsqu'on reconnaît que le novateur a découvert quelque chose de valeur en franchissant les barrières étroites de l'orthodoxie.

Dedekind et Cantor ont obtenu tous les deux les résultats qu'ils auraient pu attendre s'ils s'étaient arrêtés pour réfléchir avant de se lancer dans des directions nouvelles. Dedekind a passé toute sa vie laborieuse dans des situations médiocres : aujourd'hui que son œuvre est reconnue comme une des contributions les plus importantes de l'Allemagne en mathématiques, on prétend que Dedekind a préféré rester dans des trous obscurs ; mais pareille affirmation ne peut guère être prise au sérieux.

Au XIXe siècle, l'idéal de l'érudition allemande était un idéal élevé et parfaitement coordonné de "sûreté avant tout", et, peut-être avec quelque raison, elle manifestait une extrême prudence toute gaussienne à l'égard de l'originalité radicale ; on peut concevoir que la nouveauté n'est pas toujours le vrai.

Après tout, une honnête encyclopédie donne en général des renseignements plus sûrs au sujet de l'envol des alouettes vers le ciel qu'un poème, fût-il de Shelley, sur le même objet. Dans cette ambiance saturée de prétendus faits, la théorie de Cantor sur l'infini, une des idées les plus originalement subversives qui aient surgi en mathématiques depuis 2500 ans, donna l'impression d'une audace extrême, telle une alouette qui tenterait de s'élancer à travers une atmosphère gluante et glacée. Même si cette théorie était complètement fausse (et certains sont convaincus qu'elle ne saurait se maintenir dans la forme sous laquelle l'a lancée son auteur), elle méritait beaucoup mieux que les volées de cailloux qui l'accueillirent parce qu'elle était nouvelle et n'avait pas été baptisée au nom de la sainte orthodoxie mathématique.

Le mémoire novateur de 1874 entreprenait l'établissement d'une propriété entièrement inattendue et extrêmement paradoxale du groupe de tous les nombres algébriques. Bien que nous ayons parlé fréquemment de ces nombres au cours des chapitres précédents, il faut que nous les définissions une fois de plus, de manière à exposer clairement la nature du fait étonnant que Cantor a démontré ; en disant “démontrer”, nous laissons volontairement de côté tous les doutes concernant la validité du raisonnement employé par Cantor.

Si r satisfait à une équation algébrique de degré n ayant des coefficients entiers rationnels (nombres entiers ordinaires), et si r ne satisfait à aucune autre équation de même nature de degré inférieur à n, on dit que rest un nombre algébrique de degré n.

Ceci peut se généraliser ; car il est aisé de démontrer que toute racine d’une équation du type

$$c_0x^n + c_1x^{n-1} + \ldots + c_{n-1}x + c_n = 0$$

dans laquelle les c sont des nombres algébriques donnés (définis ci-dessus), est elle-même un nombre algébrique. Par exemple d’après ce théorème, toutes les racines de l’équation

$$(1 - 3\sqrt{-1})x^2 - (2 + 5\sqrt{17})x + \sqrt[3]{90} = 0$$

sont des nombres algébriques, puisque les coefficients le sont (le premier coefficient satisfait à $x^2 - 2x + 10 = 0$, le second à $x^2 - 4x - 421 = 0$, le troisième à $x^3 - 90 = 0$, qui sont respectivement de degrés 2,2,3.

Imaginez (si vous le pouvez) le groupe de tous les nombres algébriques. Parmi ces nombres, il y aura tous les nombres entiers rationnels positifs $1, 2, 3$,..., puisque l’un quelconque d’entre eux, n, satisfait à l’équation algébrique $x - n = 0$, dans laquelle les coefficients (1 et n) sont des entiers rationnels. Mais, en outre de ces nombres entiers rationnels positifs, le groupe de tous les nombres algébriques contient toutes les racines de toutes les équations du second degré ayant des coefficients entiers rationnels, toutes les racines de toutes les équations du troisième degré ayant des coefficients entiers rationnels, et ainsi de suite, indéfiniment. N’est-il pas intuitivement évident que le groupe de tous les nombres algébriques contiendra infiniment plus de membres que son sous-groupe des nombres entiers rationnels $1, 2, 3$,... Il peut en être ainsi, mais il peut se faire aussi que ce ne soit pas vrai.

Cantor a prouvé que le groupe de tous les nombres entiers rationnels 1, 2, 3... contient exactement autant de membres que celui “infiniment plus inclusif” de tous les nombres algébriques.

On ne peut donner ici la démonstration de ce paradoxe, mais on peut en rendre compréhensible le principe, celui de la correspondance un à un, sur lequel elle repose ; ceci fera comprendre aux esprits philosophiques ce que Cantor a appelé un nombre cardinal. Auparavant, il n’est pas inutile de citer en passant une opinion exprimée sur cette définition et d’autres de la théorie de Cantor qui fait ressortir la différence d’attitudes de quelques mathématiciens et de nombreux philosophes à l’égard de toutes les questions concernant le “nombre” ou la “grandeur”.

“Le mathématicien ne définit jamais les grandeurs en elles-mêmes, comme le philosophe serait tenté de le faire ; il définit leur égalité, leur somme et leur produit et ces définitions déterminent, ou plutôt constituent toutes les propriétés mathématiques des grandeurs. D’une façon plus abstraite et plus formelle encore, il pose des symboles et pose en même temps les règles suivant lesquelles il devra les combiner ensemble ; ces règles suffisent à caractériser ces symboles et à leur donner une valeur mathématique. En un mot, il crée des êtres mathématiques au moyen de conventions arbitraires, de même que les pièces d'un jeu d'échecs sont définies par les conventions qui règlent leur marche et leurs relations [2]."

Toutes les écoles mathématiciennes ne souscriraient certes pas à ces opinions ; elles ont l'avantage cependant de suggérer une "philosophie" dont dépend la définition ci-après des nombres cardinaux. Notons que la première étape de la définition est la description du "même nombre cardinal", dans l'esprit de la remarque du début de Couturat : ensuite le "nombre cardinal" renaît, tel le phénix, de ses propres cendres. C'est toute une question de relations entre des concepts non explicitement définis.

On dit que deux groupes ont le même nombre cardinal lorsque tous les membres des deux groupes peuvent être mis par paires un à un ; l'opération effectuée, il ne reste plus, ni dans l'un ni dans l'autre groupe, aucun membre isolé.

Quelques exemples éclaireront cette définition mystérieuse. C'est un de ces riens banalement évidents et féconds, mais tellement profonds qu'ils passent inaperçus pendant des milliers d'années. Les groupes $(x, y, z), (a, b, c)$ ont le même nombre cardinal (ne commettons pas la bévue de nous écrier : "bien sûr, chacun contient trois lettres") parce que nous pouvons mettre par paires les x, y, z du premier avec les a, b, c du second comme suit : x avec a, y avec b, z avec c ; ceci fait, il ne reste plus aucun membre isolé ni dans l'un ni dans l'autre groupe. Bien entendu, il y a d'autres moyens de former des paires. Dans une réunion de chrétiens pratiquant en principe la monogamie, si vingt ménages sont assis autour d'une table, le groupe des maris aura le même nombre cardinal que celui des épouses.

Comme autre cas de cette entité évidente, rappelons l'exemple des deux groupes de Galilée, celui de tous les carrés des nombres entiers positifs et celui de tous les nombres entiers positifs :

$$\begin{array}{cccccc} 1^2, & 2^2, & 3^2, & 4^2, & \ldots, & n^2, \\ 1, & 2, & 3, & 4, & \ldots, & n, \end{array}$$

On voit nettement la différence paradoxale entre cet exemple et le précédent. Si toutes les femmes se retirent au salon, laissant leurs maris à table à boire du porto et à raconter des histoires, il y aura vingt humains assis autour de la table, c'est-à-dire la moitié de ce qu'il y en avait tout à l'heure ; mais si tous les carrés quittent les nombres naturels, il restera autant de nombres qu'il en est parti. Que cela nous plaise ou non (et cela ne devrait pas nous plaire, si nous sommes doués de raison), nous avons en face de nous un miracle : une partie d'un groupe peut avoir le même nombre cardinal que le groupe entier. Si quelqu'un n'aime pas cette définition, par la mise, en paires du "même nombre cardinal", nous le défions d'en donner une plus convenable. L'intuition (masculine,

[2] L. Couturat, *De l'infini mathématique*, Paris, 1896, p. 49. Avec la réserve que cette étude n'est maintenant plus à la hauteur de notre époque, on peut en recommander la lecture au grand public en raison de sa limpidité. Un Polonais, W. Sierpinski, a donné, dans ses *Leçons sur les nombres transfinis*, Paris 1928, un exposé des éléments du cantorisme, qui est à la portée de toute personne ayant une bonne instruction secondaire et le goût du raisonnement abstrait. Une préface de Borel indique les précautions nécessaires à prendre pour lire l'ouvrage. L'extrait ci-dessus de Couturat a quelque intérêt historique en relation avec le programme d'Hilbert ; il anticipe de trente ans sur l'exposé que fait Hilbert de son credo formaliste.

féminine ou mathématique) a été fort surestimée ; elle est la source de toute superstition.

Ici, une difficulté de première grandeur a été soulevée qu'est-ce qu'un groupe, ou une classe ? Nous y reviendrons, mais nous ne répondrons pas : celui qui réussira à répondre à cette innocente question fera le plus grand plaisir aux critiques de Cantor et disposera des objections les plus sérieuses contre son ingénieuse théorie de l'infini ; en même temps, il aura établi l'analyse mathématique sur une base de raison et non de sentiment. Pour comprendre que la difficulté n'est pas banale, essayez de vous imaginer le groupe de tous les entiers rationnels positifs 1, 2, 3,..., et demandez-vous, avec Cantor, si vous pouvez saisir dans votre esprit cette totalité (qui est une classe) comme un objet défini, comme vous saisissez que les trois lettres x, y, z, forment une classe. Cantor nous demande précisément de faire cet effort afin d'arriver aux nombres transfinis qu'il a créés.

Arrivons maintenant à la définition du "nombre cardinal" ; il nous faut introduire un terme technique convenable : deux groupes ou classes dont les membres peuvent être appariés un à un (comme dans les exemples précédents) sont dits semblables. Combien y a-t-il d'objets dans le groupe (ou classe) x, y, z ? Bien entendu, trois. Mais qu'est-ce que c'est que trois ? La définition suivante contient une réponse : "Le nombre d'objets dans une classe donnée est la classe de toutes les classes qui sont semblables à la classe donnée."

Cette définition se passe de tout essai d'explication ; on doit la prendre comme elle est. Elle a été proposée en 1879 par Gottlob Frege et plus tard, indépendamment, par Bertrand Russell, en 1901. Son avantage sur d'autres définitions du "nombre cardinal d'une classe" est de s'appliquer aussi bien aux classes infinies qu'aux classes finies. Ceux qui jugent cette définition trop mystique pour les mathématiques peuvent l'éviter en suivant l'avis de Couturat et en "s'abstenant de définir le "nombre cardinal"". Cependant cette manière de faire conduit aussi à des difficultés.

Ce résultat sensationnel de Cantor, que la classe de tous les nombres algébriques est semblable (dans le sens technique du mot, défini ci-dessus) à sa sous-classe de tous les nombres entiers rationnels positifs, n'était que la première de nombreuses propriétés inattendues des classes infinies. Admettant provisoirement que le raisonnement de Cantor pour arriver à démontrer ces propriétés soit correct ou du moins, si la forme sous laquelle il a laissé sa théorie n'est pas absolument à l'abri des objections, que ce raisonnement puisse être rendu rigoureux, nous devons reconnaître sa force.

Considérons par exemple la question de l'existence des nombres transcendants. Dans un chapitre précédent, nous avons vu combien il a coûté d'efforts à Hermite pour démontrer la transcendance d'un nombre particulier de cette nature ; même de nos jours, on ne connaît pas de méthode générale pour prouver que tel nombre soupçonné d'être transcendant l'est en réalité ; chaque type nouveau exige l'invention de méthodes spéciales et ingénieuses. On soupçonne, par exemple que le nombre suivant (qui en réalité est une constante bien que d'après sa définition même il ait l'aspect d'une variable), défini comme la limite de

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} - \log n$$

lorsque n tend vers l'infini, est transcendant ; mais on ne peut pas démontrer qu'il l'est ; ce qu'il faut, c'est montrer que ce nombre constant n'est pas la racine d'une équation algébrique quelconque à coefficients entiers rationnels.

Tout ceci amène inévitablement la question : “Combien y a-t-il de nombres transcendants ?” Sont-ils plus nombreux que les nombres entiers, ou que les nombres rationnels, ou que les nombres algébriques, ou sont-ils moins nombreux ? Puisque, d’après le théorème de Cantor, les entiers, les rationnels, et tous les nombres algébriques sont également nombreux, la question revient à ceci : les nombres transcendants peuvent-ils être décomptés 1, 2, 3,... ? La classe de tous les nombres transcendants est-elle “semblable” à la classe de tous les entiers rationnels positifs ? La réponse est négative : les nombres transcendants sont infiniment plus nombreux que les nombres entiers.

Ici, nous commençons à pénétrer dans les controverses concernant la théorie des groupes. La conclusion qui vient d’être énoncée était comme un défi porté à un homme du tempérament de Kronecker. Discutant la démonstration donnée par Lindemann que est un nombre transcendant (voir chapitre XXIV), Kronecker demande : “À quoi sert votre belle recherche au sujet de π ? Pourquoi étudier de pareils problèmes puisque les nombres irrationnels [et par conséquent les transcendants] n’existent pas ?” Nous nous imaginons aisément l’effet produit sur un pareil sceptique par la démonstration de Cantor que les transcendants sont infiniment plus nombreux que les nombres entiers 1, 2, 3..., lesquels d’après Kronecker, constituent l’œuvre la plus noble de Dieu et sont les seuls nombres qui existent.

Il ne saurait être question de donner, ici, ne serait-ce qu’un résumé de la démonstration de Cantor, mais on peut avoir une idée de la nature du raisonnement dont il s’est servi grâce aux simples considérations suivantes. Si une classe est “semblable” (dans le sens technique du terme défini plus haut) à la classe de tous les nombres entiers rationnels positifs, cette classe est dite dénombrable ; dans une classe dénombrable, les choses peuvent se décompter 1, 2, 3,... ; dans une classe qui n’est pas dénombrable, elles ne le peuvent pas. Existe-t-il des classes non dénombrables ? Cantor a prouvé que oui. En effet, la classe de tous les points d’un segment quelconque de ligne, si petit qu’il soit (pourvu qu’il ne soit pas réduit à un point), n’est pas dénombrable.

Ceci nous donne une idée de la raison pour laquelle les nombres transcendants ne sont pas dénombrables. Dans le chapitre de Gauss, nous avons vu que toute racine d’une équation algébrique peut se représenter par un point du plan de la géométrie cartésienne ; toutes ces racines constituent le groupe de tous les nombres algébriques ; or Cantor a prouvé que ce groupe est dénombrable. Mais si les points d’un simple segment de droite ne sont pas dénombrables, il en résulte que tous les points du plan cartésien sont également non dénombrables ; les nombres algébriques sont posés sur le plan comme les étoiles sur le ciel obscur : l’obscurité épaisse est le firmament des nombres transcendants.

Ce qu’il y a de plus remarquable dans la démonstration de Cantor, c’est qu’elle ne fournit pas de moyen de construire un seul nombre transcendant. Pour Kronecker, une preuve de cette nature était un pur non-sens. Bien des cas plus anodins de “preuves d’existence” ont provoqué son courroux ; un de ces cas est intéressant parce qu’il a prédit l’objection de Brouwer à l’emploi intégral de la logique classique (aristotélienne) dans le raisonnement sur les groupes infinis.

Un polynôme $ax^n + bx^{n-1} + ... + l$, dans lequel les coefficients $a, b, ...l$ sont des nombres rationnels est dit irréductible si l’on ne peut pas le décomposer en un produit de deux polynômes ayant chacun pour coefficients des nombres rationnels. Or la plupart des êtres humains affirment, comme le faisait Aristote, qu'un polynôme donné est ou n'est pas irréductible. Tel n'était pas l'avis de Kronecker. D'après lui, nous n'avons pas, logiquement, le droit d'user du concept d'irréductibilité dans nos démonstrations mathématiques, tant que nous n'avons pas montré qu'il existe quelque procédé défini, pouvant s'exécuter en un nombre fini d'étapes (non par simples tâtonnements), qui nous permette d'établir la réductibilité d'un polynôme donné quelconque. Faire autrement, c'est, toujours d'après Kronecker, introduire des inconséquences dans nos conclusions ; tout au plus l'usage de l'"irréductibilité" sans l'existence du procédé en question ne peut nous conduire qu'au verdict : "non démontré". Tout raisonnement non constructif est, d'après Kronecker, illégitime.

Comme le raisonnement de Cantor, dans sa théorie des classes infinies, est un raisonnement absolument non-constructif, Kronecker le considérait comme un type dangereux d'insanité mathématique : passionnément attaché à ce qu'il considérait comme la vérité des mathématiques et convaincu que sous la direction de Cantor celles-ci prenaient le chemin de l'asile des fous, Kronecker attaqua vigoureusement et misérablement "la théorie positive de l'infini" ainsi que son hypersensible auteur, avec toutes les armes qui lui tombaient sous la main ; résultat tragique, ce ne fut pas la théorie des groupes qui s'en alla à l'asile d'aliénés, mais son auteur Cantor, dont l'extrême sensibilité ne put supporter les coups de son ennemi.

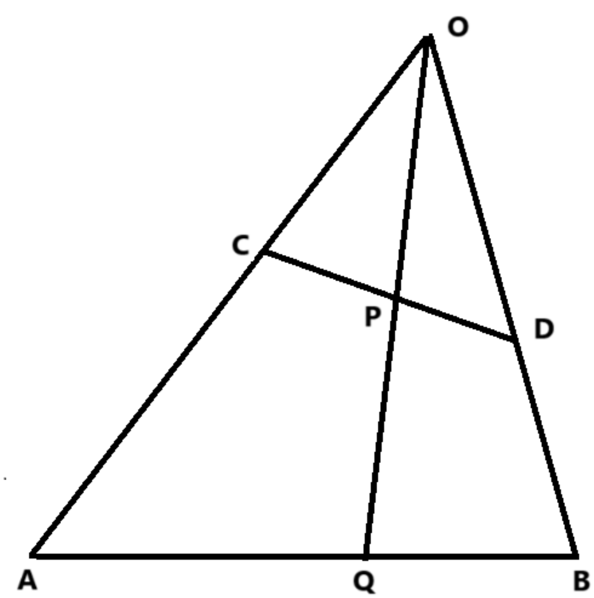
Au printemps de 1884, à quarante ans, Cantor éprouva la première de ses complètes dépressions dont il devait souffrir fréquemment au cours de sa longue existence et qui l'obligèrent à se réfugier dans une clinique de maladies mentales. Son naturel emporté aggravait encore les difficultés ; ses accès l'humiliaient à ses propres yeux et il en vint à douter de la solidité de son œuvre. Pendant une de ses périodes de lucidité, il demanda aux autorités universitaires de Halle de changer sa chaire de mathématiques en une chaire de philosophie. Une de ses meilleures œuvres sur la théorie positive de l'infini a été conçue dans les intervalles entre une crise et la suivante ; il remarquait d'ailleurs lui-même que son esprit devenait extraordinairement lucide quand il se remettait d'une attaque.

On a peut-être attribué trop sévèrement à Kronecker la tragédie de Cantor ; sa polémique n'a été qu'une des causes qui y ont contribué ; l'homme qui croyait avoir atteint le premier et le dernier échelon vers une théorie rationnelle de l'infini éprouva beaucoup d'amertume à se voir méconnu, et il sombra dans la mélancolie et la déraison. Cependant, si Cantor n'obtint pas une chaire de mathématiques à Berlin, il semble que Kronecker doive en porter la plus grande responsabilité. On estime en général qu'il n'est pas très sportif de la part d'un savant de se livrer à une attaque acharnée de l'œuvre d'un contemporain devant les élèves de celui-ci ; la divergence de vues doit se traiter objectivement par publication scientifique ; en 1891, Kronecker se laissa aller à critiquer l'œuvre de Cantor publiquement, dans ses cours, et il devint évident qu'il ne pouvait pas y avoir place pour les deux adversaires sous le même toit ; comme Kronecker occupait déjà la sienne, Cantor dut se résigner à rester dehors.

Il faut reconnaître d'ailleurs qu'il ne manqua pas totalement de réconfort. Mittag-Leffler qui avait pour lui de la sympathie publia non seulement certains travaux de Cantor dans sa revue *Acta* (*Mathematica*), mais il ne cessa de le soutenir dans sa lutte contre Kronecker ; en un an, Mittag-Leffler ne reçut pas moins de cinquante-deux lettres du pauvre Cantor. Hermite était un des plus enthousiastes parmi les adeptes des théories de Cantor ; sa cordiale acceptation de la nouvelle doctrine réchauffait le cœur modeste de ce dernier, qui écrivait : “Les éloges dont Hermite me comble dans cette lettre... au sujet de la théorie des groupes ont tant de prix à mes yeux, et sont si peu mérités que je ne me soucie pas de les publier, de peur de courir le reproche de m’être laissé éblouir.”

Au début du XXe siècle, l’œuvre de Cantor commençait à être acceptée comme une contribution fondamentale à l’ensemble des mathématiques et en particulier aux fondements de l’analyse. Malheureusement, en même temps, les paradoxes et les contradictions qui viciaient le fond même de la théorie se faisaient jour peu à peu ; en somme, ils sont peut-être la plus grande contribution que la théorie de Cantor soit destinée à apporter aux mathématiques, car leur existence jusque-là insoupçonnée dans les éléments du raisonnement logique et mathématique sur l’infini ont inspiré directement le mouvement critique qui se développe actuellement dans tout le raisonnement déductif. Nous espérons qu’il en résultera une mathématique à la fois plus riche et plus “vraie”, mieux libérée de toute inconséquence, que celle de l’ère qui a précédé Cantor.

Les résultats les plus frappants de la doctrine de Cantor ont été obtenus dans la théorie des groupes non-dénombrables, dont l’exemple le plus simple est le groupe comprenant tous les points d’un segment de droite ; nous ne pouvons en exposer ici que la plus simple de ses conclusions. Contrairement à ce qu’indique l’intuition, deux segments de droite inégaux contiennent le même nombre de points. Si nous nous rappelons que deux groupes contiennent le même nombre de choses si et uniquement si ces choses peuvent être accouplées une à une, nous saisissons aisément le bien-fondé de la conclusion de Cantor. Considérons, sur la figure, les deux segments inégaux AB et CD ; la droite OPQ coupe CD au point P, et AB au point Q ; P et Q se trouvent ainsi accouplés ; quand OPQ tourne autour de O, le point P se déplace sur CD pendant que Q se déplace sur AB, et à chaque point de CD est “apparié” un point et un seul, accouplé de AB.



On peut également montrer un résultat aussi inattendu. Tout segment de droite, si petit qu’il soit, contient autant de points qu’une droite de longueur infinie. De plus, le segment contient autant de points qu’il y en a dans un plan, ou encore dans tout l’espace à trois dimensions, ou dans tout l'espace à n dimensions, n étant un nombre entier quelconque plus grand que zéro, ou, finalement, dans un espace d'un nombre infini dénombrable de dimensions.

Dans tout ceci nous n'avons pas encore essayé de définir la classe ou le groupe. Peut-être, comme l'a soutenu Russell en 1912, est-il inutile de le faire pour avoir une conception nette de la théorie de Cantor ou pour que cette théorie soit conséquente avec elle-même, ce qui est tout ce qu'on peut demander d'une théorie mathématique. Néanmoins, les controverses actuelles paraissent exiger quelque définition nette, conséquente par elle-même ; celle qui suit a paru satisfaisante.

Un groupe est caractérisé par trois propriétés : il contient toutes les choses auxquelles appartient une certaine propriété (couleur, volume, goût, etc...) ; aucune chose ne possédant pas cette propriété n'appartient au groupe ; toute chose dans le groupe se reconnaît à ce qu'elle est à la fois la même que les autres du groupe et différente d'elles ; en un mot, toute chose du groupe possède une individualité continuellement reconnaissable. Le groupe lui-même doit être saisi comme un tout. Cette définition peut, à l'usage, paraître trop stricte ; considérons, par exemple, ce qui arriverait du groupe cantorien de tous les nombres transcendants pour que la troisième condition soit satisfaite.

Au point où nous sommes arrivés, nous pouvons maintenant jeter un coup d'œil en arrière sur toute l'histoire des mathématiques, ou tout au moins sur ce que les travaux purement techniques des maîtres mathématiciens nous en révèlent. Retenons deux modes d'expression qui reviennent constamment dans presque tous les exposés mathématiques ; le lecteur a peut-être été agacé par l'usage répété de phrases telles que celle-ci : "Nous pouvons trouver un nombre entier plus grand que 2", ou bien "nous pouvons choisir un nombre plus petit que n et plus grand que $n - 2$". L'adoption d'une telle phraséologie n'est pas simplement un cliché stéréotypé : son emploi a une raison et les écrivains circonspects savent exactement ce qu'ils veulent dire lorsqu'ils écrivent "nous pouvons trouver... etc..." : ils veulent dire qu'ils peuvent faire ce qu'ils disent.

Voici une autre phrase qui revient souvent dans les textes mathématiques et qui se distingue nettement de la précédente : "Il existe." Par exemple, on dira "il existe un nombre entier plus grand que 2", ou bien "il existe un nombre plus petit que n et plus grand que $n - 2$" ; l'emploi de pareils termes engage celui qui s'en sert dans la profession de foi que Kronecker tenait pour inadmissible à moins que, bien entendu, "l'existence" soit prouvée par une construction. Or, l'existence n'est pas démontrée pour les groupes (tels qu'ils sont définis ci-dessus) qui apparaissent dans la théorie de Cantor.

Ces deux manières de s'exprimer divisent les mathématiciens en deux types : les hommes qui disent "nous pouvons" croient (peut-être dans leur subconscient) que les mathématiques sont une invention purement humaine ; ceux qui disent "il existe" croient que les mathématiques ont une existence propre, extra-humaine, et que nous rencontrons simplement les "vérités éternelles" des mathématiques dans notre voyage à travers l'existence, de la même façon qu'un homme qui se promène dans une ville traverse un certain nombre de rues sans se préoccuper d'en faire le plan.

Les théologiens sont des hommes qui disent "il existe" ; les sceptiques prudents sont pour la plupart des hommes qui disent "nous". "Il existe une infinité de nombres pairs ou de nombres premiers" disent les avocats de l'existence extra-humaine ; "produisez-les", disent Kronecker et les partisans du “nous”.

Que cette distinction n’est pas un pur lieu commun, on peut en juger par un exemple du Nouveau Testament : “le Christ affirmait que le Père existe” ; Philippe demanda : “Montrez-nous le Père et cela nous suffit.” Cantor est presque entièrement du parti “existence” : il peut se faire, à ce propos, que la passion de Cantor pour la théologie ait déterminé cette allégeance ; mais s’il en était ainsi, il faudrait expliquer pourquoi Kronecker, également versé dans la théologie chrétienne, était le partisan enragé du “nous”, que nous connaissons. Comme dans toutes les questions de ce genre, les munitions de chaque parti sont bonnes à prendre dans n’importe quelle poche.

Un cas frappant et important de la manière dont les partisans de “l’existence” considèrent la théorie des groupes nous est donné par ce qui est connu sous le nom de postulat de Zermelo (1904). “Pour chaque groupe M dont les éléments sont des groupes P (c’est-à-dire que M est un groupe de groupes, une classe de classes), les groupes P étant supposés sans lacunes et sans chevauchements, il existe au moins un groupe N qui contient précisément un élément de chacun des groupes P qui constituent M.” La comparaison de cet énoncé avec la définition précédente d’un groupe (ou classe) montrera que les partisans du “nous” ne considéreraient pas ce postulat comme évident par lui-même si le groupe M comprenait, par exemple, une infinité de segments de droite sans chevauchements. Cependant, le postulat paraît raisonnable ; les essais pour le démontrer ont échoué ; il est d’une importance considérable dans toutes les questions relatives à la continuité.

Un mot sur la manière dont ce postulat a été introduit dans les mathématiques nous suggèrera un autre des problèmes de la théorie de Cantor encore non résolus. Un groupe de choses distinctes, décomptables, comme les briques d’un mur, peut aisément être ordonné : il nous suffit de les compter, de la façon qui nous vient à l’idée. Mais comment ferions-nous pour ordonner tous les points d’une ligne droite ? On ne peut pas les compter 1, 2, 3, 4,... ; la tâche nous paraît désespérée si nous considérons qu’entre deux points quelconques de la droite “nous pouvons trouver” ou bien “il existe” un autre point de cette droite. Si chaque fois que nous comptons deux briques adjacentes dans le mur, une autre venait s’intercaler entre les deux, notre compte serait légèrement brouillé. Et cependant, les points d’une ligne droite paraissent être rangés dans un certain ordre, nous pouvons dire qu’un point est à la gauche où à la droite d’un autre. Les tentatives pour ordonner les points d’une droite n’ont pas réussi ; Zermelo a proposé son postulat pour en faciliter la tentative, mais ce dernier lui-même n’est pas accepté universellement comme une hypothèse raisonnable ou susceptible d’être employée en toute sécurité.

La théorie de Cantor contient, sur l’infini réel et sur l’arithmétique des nombres transfinis (infinis), beaucoup plus que nous ne pouvons en dire ici ; comme la théorie est encore dans la période de controverse, nous l’abandonnerons après l’exposé d’une dernière énigme. “Existe”-t-il ou pouvons-nous “construire” un groupe infini qui ne soit semblable (au sens technique de la mise par paires des éléments un à un) ni au groupe de tous les nombres entiers rationnels positifs, ni au groupe de tous les points d’une ligne ? On ne connaît pas encore la réponse.

Cantor est mort dans un asile d’aliénés à Halle le 6 janvier 1918, à l’âge de soixante-treize ans. Son génie avait fini par être reconnu, des honneurs lui avaient été décernés, et même son ancien ressentiment contre Kronecker était oublié ; ce fut sans doute pour Cantor une satisfaction de se rappeler que tous deux s'étaient réconciliés, au moins superficiellement, avant le décès de Kronecker, en 1891. Si Cantor avait vécu jusqu'à nos jours, il aurait pu s'enorgueillir justement de la tendance vers un plus grand rigorisme dans toutes les mathématiques, car ses propres efforts pour établir l'analyse (et l'infini) sur des bases solides ont fortement contribué à ce mouvement.

Si nous jetons un regard en arrière sur le long effort réalisé pour rendre les concepts de nombre réel, de continuité, de limite, et d'infini, précis et d'un usage plus conséquent en mathématiques, nous voyons que Zénon et Eudoxe ne sont pas aussi éloignés de Weierstrass, Dedekind et Cantor que les vingt-quatre ou vingt-cinq siècles qui séparent l'Allemagne moderne de la Grèce antique paraissent l'impliquer. Sans doute, nous avons une conception plus nette de la nature des difficultés rencontrées que nos prédécesseurs, parce que les mêmes problèmes non résolus nous apparaissent sous des aspects et dans des domaines dont les anciens n'avaient pas la moindre idée ; mais dire que nous sommes venus à bout de ces antiques difficultés serait une grossière inexactitude des faits. Néanmoins, le compte net fait ressortir un gain plus considérable que celui que nos prédécesseurs pouvaient revendiquer ; nous allons plus au fond des choses qu'ils n'ont jamais jugé nécessaire de le faire et nous découvrons qu'il y a avantage à remplacer certaines "lois" qu'ils ont acceptées pour leur raisonnement - par exemple, celles de la logique d'Aristote - par d'autres - conventions pures - dans nos tentatives pour coordonner nos expériences. Comme nous l'avons déjà dit, l'œuvre révolutionnaire de Cantor a donné à notre activité actuelle l'impulsion initiale ; mais on a vite découvert, vingt ans avant la fin de Cantor, que sa révolution était ou trop révolutionnaire ou pas assez ; aujourd'hui, c'est la deuxième opinion qui prévaut. C'est le mathématicien italien Burali-Forti qui a tiré le premier coup de feu de la contre-révolution en faisant ressortir une contradiction flagrante dans le raisonnement du type utilisé par Cantor dans sa théorie des groupes infinis ; ce paradoxe particulier n'est d'ailleurs que le premier de beaucoup d'autres, et comme il exigerait de longues explications pour le rendre intelligible, nous exposerons à sa place celui de Russell (en 1908).

Nous avons déjà cité Frege, qui a défini le nombre cardinal d'une classe donnée en disant que c'est "la classe de toutes les classes semblables à une classe donnée" ; Frege avait passé des années à essayer d'établir la mathématique des nombres sur une solide base logique ; l'œuvre de toute sa vie se trouve dans son ouvrage *Grundgesetze der Arithmetik* (Les lois fondamentales de l'arithmétique) dont le premier volume parut en 1893, le second en 1903 ; il fait usage du concept de groupes ; mais il fourmille aussi d'invectives plus ou moins sarcastiques à l'adresse des mathématiciens qui ont écrit avant lui sur les fondements de l'arithmétique, pour leurs bévues manifestes et leurs bêtises multiples. Le second volume se termine par cet aveu : "Il n'est rien de plus désagréable pour un homme de science que de voir ses fondations s'écrouler juste au moment où son œuvre se termine. J'ai été mis dans cette situation par une lettre de M. Bertrand Russell reçue au moment où ce travail était presque sous presse." Russell avait envoyé à Frege son ingénieux paradoxe du "groupe de tous les groupes qui ne sont pas membres d'eux-mêmes". Ce groupe est-il membre de lui-même ? Quelle que soit la réponse, on trouve avec un peu de réflexion qu'elle est fausse. Or, Frege avait usé largement des "groupes de tous les groupes".

On a proposé plusieurs moyens pour éliminer les contradictions qui commençaient à éclater comme un tir de barrage sur la théorie Cantor-Dedekind-Frege des nombres réels, de la continuité et de l'infini ; tous les trois abandonnèrent la partie, battus et découragés. Russell proposa son "principe du cercle vicieux" comme remède : "ce qui comprend la totalité d'un groupe ne peut pas être un membre du groupe ; plus tard, il mit en avant son “axiome de l’irréductibilité” ; comme il est pratiquement abandonné, nous n’en parlerons pas. Pendant un certain temps, ces replâtrages eurent beaucoup de succès, sauf chez les mathématiciens allemands qui ne les avalèrent jamais. Progressivement, au fur et à mesure que l’examen critique de tout le raisonnement mathématique faisait du progrès, la physique fut jetée par-dessus bord et un effort concerté fut entrepris pour trouver, avant de lui administrer de nouveaux médicaments, de quoi souffrait vraiment le patient dans son système des nombres réels et irrationnels.

L’effort actuel pour comprendre en quoi consistent nos difficultés a débuté par le travail de David Hilbert, né en 1862, qui a été publié à Goettingen en 1899 et par celui de L. E. J. Brouwer, né en 1881, paru à Amsterdam en 1912. Le but commun de ces deux savants et de leurs nombreux successeurs est d’établir le raisonnement mathématique sur des bases solides, bien que leurs méthodes et leur philosophie violemment soient opposées. Il paraît invraisemblable que chacun puisse avoir aussi entièrement raison que l’un et l’autre semblent le croire.

Hilbert revient à l’antiquité grecque pour poser les bases de sa philosophie et de ses mathématiques. Reprenant le programme pythagoricien d’une série de postulats rigidement et complètement établis, d’où l’argumentation mathématique doit procéder par un raisonnement strictement déductif, Hilbert fit un programme de développement mathématique à base de postulats également, mais plus précis que celui des Grecs en 1899, il a publié la première édition de son ouvrage classique sur les fondements de la géométrie. Hilbert pose une condition, à laquelle les Grecs ne paraissent pas avoir pensé, c’est de prouver que les postulats proposés pour la géométrie sont conséquents en eux-mêmes, c’est-à-dire sans contradictions internes cachées. Or pour fournir une preuve de ce genre en géométrie, on montre que toute contradiction dérivant en géométrie des postulats implique une contradiction en arithmétique. Ainsi donc le problème revient à démontrer que l’arithmétique est elle-même conséquente et il en reste là aujourd’hui.

Nous voici donc ramenés une fois de plus à interroger le sphinx pour qu’il nous dise ce que c’est que le nombre. Dedekind et Frege, pour expliquer les nombres qui ont embarrassé Pythagore, ont eu recours à l’infini, Dedekind, en définissant les nombres irrationnels par ses classes infinies, Frege en définissant le nombre cardinal par sa classe de toutes les classes semblables à une classe donnée. Hilbert, lui aussi, a cherché la réponse dans l’infini, qui, croit-il, est nécessaire pour comprendre le fini ; il exprime avec enthousiasme sa foi dans le cantorisme qui, d’après lui, finira par sortir du purgatoire où il se débat maintenant. “La théorie de Cantor me paraît le fruit le plus admirable de l’esprit mathématique et véritablement une des applications les plus sublimes des procédés intellectuels de l’homme.” Cependant il reconnaît que les paradoxes de Burali-Forti, Russell et autres ne sont pas résolus ; mais sa foi triomphe de tous les doutes “Personne ne nous chassera du paradis que Cantor a créé pour nous.”

Mais, à ce moment d’exaltation, apparaît Brouwer brandissant quelque chose qui ressemble de suspecte façon à l’épée flamboyante de l’archange. On voit la scène : Dedekind, dans le rôle d’Adam, et Cantor, déguisé en Ève, à son côté, jettent des regards pleins d’appréhension vers la porte du paradis sous l’œil sévère de l’implacable Hollandais. Selon Brouwer, la méthode des postulats, proposée par Hilbert pour se libérer de la contradiction, arrivera à son but, mais on n’obtiendra de cette manière rien qui ait quelque valeur mathématique ; une théorie fausse qui n’est pas réfutée par une contradiction n'en est pas moins fausse ; de même qu'une conduite criminelle qui n'est pas réprimée par les tribunaux, n'en est pas moins criminelle".

La source de l'objection de Brouwer à la "conduite criminelle" de ses adversaires est quelque chose de nouveau, du moins en mathématiques. Il s'élève contre l'usage immodéré de la logique aristotélicienne, particulièrement quand on traite des groupes infinis, et il maintient que cette logique doit entraîner des contradictions lorsqu'elle s'applique à des groupes qui ne peuvent pas être construits de façon précise, au sens de Kronecker (il faut donner un procédé d'après lequel les éléments du groupe peuvent être produits). La loi du "moyen terme exclu" (c'est-à-dire qu'une chose doit posséder telle propriété, ou ne pas la posséder, par exemple qu'un nombre est premier ou ne l'est pas), n'est utilisable légitimement que lorsqu'on l'applique à des groupes finis, en se basant sur l'expérience humaine de ces groupes ; mais il n'y a aucune raison de supposer qu'une logique, adéquate pour le fini, continuera à produire des résultats exempts de contradiction lorsqu'on l'appliquera à l'infini. Ceci paraît assez raisonnable quand nous nous rappelons que la vraie définition du groupe infini précise qu'une portion d'un groupe infini peut contenir exactement autant de choses que le groupe entier (comme nous l'avons relevé plusieurs fois) ; or cette situation ne se produit jamais pour un groupe fini, dans lequel "portion" signifie quelque et non pas tout (contrairement à ce qui se passe pour le groupe infini).

Nous touchons là du doigt ce que certains considèrent comme la source même de trouble dans la théorie de Cantor de l'infini réel. La définition du groupe, d'après laquelle toutes les choses jouissant d'une certaine qualité sont réunies pour former un "groupe" ou "classe", ne convient pas comme base de la théorie des groupes, en ce sens que la définition n'est pas constructive, au sens de Kronecker, ou qu'elle suppose une construction dont aucun mortel n'est capable. Brouwer prétend qu'en pareille situation l'emploi de la loi du simple moyen terme exclu est ou tout au plus un guide heuristique vers des propositions qui peuvent être vraies, mais qui ne le sont pas nécessairement même, lorsqu'elles ont été déduites par l'application stricte de la logique aristotélienne ; il déclare qu'au cours de la dernière moitié du XIXe siècle de nombreuses théories fausses, y compris le cantorisme, ont été érigées sur cette fondation pourrie.

Une pareille révolution dans les éléments de la pensée mathématique ne se fera pas toute seule ; au mouvement radical de Brouwer vers la gauche, répondront les exclamations indignées de la droite réactionnaire. D'après Hilbert (le champion du statu quo), Weyl (qui suit Brouwer dans la révolte) et Brouwer marchent surtout sur les traces de Kronecker : "ils essaient d'établir les mathématiques en jetant par-dessus bord tout ce qui ne leur convient pas et en y mettant l'embargo. Le résultat est de démembrer notre science et de courir le risque de perdre une large part de nos acquisitions les plus précieuses. Weyl et Brouwer condamnent les notions générales des nombres irrationnels, des fonctions (même de celles qui interviennent dans la théorie des nombres), des nombres transfinis de Cantor, etc... ; ils condamnent le théorème qu'un groupe infini d'entiers positifs en contient un moindre, et même la loi d'exclusion du moyen terme comme par exemple l'assertion suivante : ou bien il n'y a qu'un nombre fini de nombres premiers ou bien il y en a une infinité. Voilà des exemples des théorèmes et des modes de raisonnement qu'ils s'interdisent. Je crois que leurs efforts se montrent aussi impuissants aujourd'hui que ceux de Kronecker voulant abolir les nombres irrationnels (Weyl et Brouwer nous permettent du moins d'en conserver un). Non ! le programme de Brouwer n'est pas une révolution, c'est simplement la réédition d'un coup de main qui, tenté jadis avec de vieilles méthodes, mais alors avec plus d'entrain, n'en avait pas moins échoué complètement. Aujourd'hui, l'État [les mathématiques] est parfaitement armé et fortifié grâce aux travaux de Frege, Dedekind et Cantor. Les efforts de Brouwer et de Weyl sont d'avance condamnés à l'insuccès."

À ceci, l'autre parti réplique par un haussement d'épaules et poursuit résolument sa tâche grande et foncièrement nouvelle, de rétablir les mathématiques, en particulier les fondements de l'analyse, sur une base plus ferme que toutes celles qu'ont jamais bâties les hommes depuis plus de vingt-cinq siècles, de Pythagore à Weierstrass.

Que seront devenues les mathématiques dans une génération d'ici, alors que, espérons-le, ces difficultés auront été résolues ? Au prophète ou au septième fils du prophète de plonger sa tête dans le piège de la prédiction ! Mais s'il existe quelque continuité dans l'évolution des mathématiques, et la majorité des observateurs de sang-froid pense qu'elle existe, nous croyons que les mathématiques à venir seront plus solides, et d'un contenu plus vaste et plus riche, que celles que nos prédécesseurs ou nous-mêmes avons connues.

Déjà les controverses du premier tiers du siècle ont ajouté de nouveaux domaines (y compris une logique entièrement neuve) au vaste empire des mathématiques ; le nouveau se consolide et se coordonne rapidement avec l'ancien. Si nous pouvons risquer une prédiction, nous dirons que ce qui viendra sera plus frais, plus jeune à tous points de vue, plus proche de la pensée et des besoins humains, plus dégagé de tout recours à des entités extra-terrestres pour se justifier, que ce que l'on est en train de refaçonner vigoureusement. L'essence des mathématiques est la jeunesse éternelle. Comme l'a dit Cantor, "l'essence des mathématiques réside dans leur liberté" ; la révolution actuelle n'est qu'une nouvelle affirmation de cette liberté.