## Transcription en LaTeX d'un chapitre du livre de E. T. Bell *Les grands mathématiciens*

# Chapitre XXIII
# Boole
## Complète indépendance.

*Les mathématiques pures ont été découvertes par Boole dans un ouvrage qu'il a intitulé* "Les lois de la Pensée"*.*

Bertrand Russell

"Oh ! Nous ne lisons jamais rien de ce que font les mathématiciens anglais". Telle est la réponse spécifiquement continentale d'un éminent mathématicien européen auquel on demandait s'il avait vu certain travail récent d'un des mathématiciens anglais de premier plan : le "nous", de sa sincère supériorité, comprenait les mathématiciens du continent en général.

Les mathématiciens n'aiment pas à raconter ce genre d'histoire sur eux-mêmes, mais celle-ci fait ressortir admirablement cette caractéristique des mathématiciens anglais, leur originalité insulaire, qui a été la principale prétention de l'école anglaise à la distinction : c'est pourquoi j'ai choisie cette caractéristique - l'originalité insulaire - comme une introduction idéale à la vie et aux œuvres d'un des mathématiciens les plus insulaires que l'Angleterre ait jamais produits, Georges Boole. Le fait est que les mathématiciens anglais ont, le plus souvent, suivi leur voie propre avec sérénité, étudiant ce qui les intéressait personnellement, comme s'ils jouaient au cricket, uniquement pour se distraire, avec un dédain égoïste pour ce qu'à pleins poumons d'autres proclament dans le monde être de suprême importance. Parfois, comme dans leur idolâtrie prolongée à l'égard des méthodes de Newton, cette indifférence pour les idées directrices du moment a coûté cher à l'école anglaise ; mais, dans l'ensemble, cette attitude "c'est à prendre à ou laisser" a ouvert plus de nouveaux domaines aux mathématiques que ne l'aurait pu faire l'imitation servile des maîtres continentaux. La théorie de l'invariance est un cas de ce genre, celle du champ électrodynamique de Maxwell en est un autre.

Bien que l'école anglaise possède sa bonne part de réalisateurs puissants d'idées qui ont germé ailleurs, sa plus grande contribution au progrès des mathématiques se trouve du côté de l'originalité ; l'œuvre de Boole en est un exemple frappant. Lorsqu'elle parut pour la première fois, elle fut ignorée en tant que mathématique ; il n'y eut guère que ses compatriotes les moins orthodoxes qui reconnurent qu'il y avait là le germe de quelque chose d'éminemment intéressant pour l'ensemble des mathématiques. Aujourd'hui, l'évolution naturelle des idées initiales de Boole est rapidement devenue une des sections majeures des mathématiques pures, et de nombreux chercheurs de tous les pays ont étendu ces idées à tous les domaines des mathématiques où l'on essaie d'asseoir sur des bases plus solides les conquêtes réalisées. Comme l'a fait remarquer Bertrand Russell il y a quelques années, Georges Boole a découvert les mathématiques pures dans son ouvrage *Les Lois de la Pensée*, publié en 1854 : c'est peut-être une exagération, mais cela mesure l'intérêt que l'on attribue aujourd'hui à la logique mathématique et à ses ramifications ; d'autres, avant Boole, notamment Leibniz et de Morgan, avaient rêvé d'ajouter la logique au domaine de l'algèbre ; Boole a

Référence :
https://www.bibliotheque.nat.tn/KHNU/doc/SYRACUSE/90812/e-t-bell-les-grands-mathematiciens-zenon-eudox-archimede-descartes-kummer-et-dedekind-poncare-cantor?$_lg = fr - FR$.

Transcription : Denise Vella-Chemla, août 2023.

réalisé leur rêve.

Boole ne sortait pas, comme certains autres créateurs mathématiciens, des couches les plus inférieures de la société. Son sort fut plus rude ; il était né le 2 novembre 1815, à Lincoln, et était le fils d'un simple boutiquier. Si nous en croyons les descriptions des écrivains anglais de ce bon vieux temps, être le fils d'un petit commerçant c'était être damné par prédestination. La classe sociale à laquelle appartenait le père de Boole était traitée avec un mépris encore plus prononcé que les laveuses de vaisselle ou les seconds valets de pied ; les basses classes étaient inexistantes aux yeux des "classes supérieures" y compris, dans celles-ci, les gros négociants en vins et les bailleurs de fonds.

C'est un euphémisme que de donner le nom de purgatoire aux premiers efforts de Boole pour s'instruire lui même dans le milieu où Dieu s'était plu à le faire naître. Par un acte de la divine Providence, la haute intelligence de Boole avait été affectée à la plus basse classe sociale ; elle n'avait qu'à y rester et qu'à y cuire dans son jus avec ses prétentions ; en Amérique, Abraham Lincoln, l'aîné de Boole de six ans, soutenait à peu près à la même époque une lutte pénible ; mais du moins il était encouragé et non raillé.

Les écoles où les jeunes messieurs apprenaient à se bousculer entre eux pour se préparer à leurs futurs rôles de directeurs dans les organisations d'ateliers et de mines de charbon qui commençaient à être en vogue, n'étaient pas faites pour des garçons comme Boole ; non son Ecole Nationale était chargée surtout de maintenir le pauvre à sa vraie place, à son sordide niveau.

Dans ces jours incompréhensibles de fumeuse révolution industrielle, une teinte de latin, un vernis encore plus léger de grec était un des signes distinctifs d'un gentleman ; bien peu de ces jeunes gens savaient assez de latin pour le lire sans traduction ; néanmoins, la connaissance feinte de la grammaire latine était une marque de distinction et sa syntaxe, apprise par cœur, était considérée comme une discipline mentale de la plus grande utilité pour préparer à la possession et l'administration des biens fonciers. Bien entendu, on n'enseignait pas le latin à l'école où Boole fut autorisé à entrer. S'abusant, par une erreur pathétique de jugement, sur les capacités qui permettaient à la classe possédante de gouverner ceux qui étaient nés à un échelon inférieur de fortune, Boole décida qu'il lui fallait apprendre le latin et le grec s'il voulait jamais sortir du bourbier ; Boole se trompait ; le latin et le grec n'étaient pour rien dans les obstacles dressés devant lui. Il apprit néanmoins le latin tout seul, avec le simple encouragement sympathique de son pauvre père qui, victime de la pauvreté et sachant qu'il n'en sortirait jamais lui-même, faisait ce qu'il pouvait pour ouvrir à son fils les portes qui s'étaient fermées pour lui. Il ne savait pas le latin. Le jeune Boole eut recours à un petit libraire, ami de son père, qui ne put que lui donner les premiers éléments de la grammaire. Quiconque a vu un instituteur, même capable, s'ingénier à faire avaler à un garçon de huit ans les *Commentaires de César* peut se rendre compte des efforts que devait faire Boole, livré à lui-même. À l'âge de douze ans, il en savait cependant assez pour traduire une ode d'Horace en anglais et en vers ; son père, tout fier, mais ne comprenant rien à la valeur technique de la traduction, la fit imprimer dans la feuille locale ; ce fut un beau tapage à l'école, en partie flatteur pour Boole, en partie humiliant.

Un professeur d'études classiques nia qu'un garçon de douze ans eût put venir à bout d'une telle traduction ; des garçons de douze ans en savent souvent davantage sur certaines choses que leurs aînés oublieux ne les en croient capables. Cependant, Boole fut humilié des fautes que l'on ne manqua pas de relever dans sa traduction et décida de suppléer lui-même aux lacunes de son instruction. Entre temps, il avait commencé le grec, et dès lors, décidé à arriver à la perfection ou à tout abandonner, il se mit d'arrache-pied, pendant deux ans, à étudier le grec et le latin, toujours tout seul ; l'effet de ce labeur se retrouve danss la distinction et la latinité marquée des écrits de Boole.

Le père de Boole, qui lui-même, par son propre travail, était parvenu considérablement au delà du peu qu'on lui avait appris à l'école, donna à son fils les premières leçons de mathématiques ; il essaya aussi d'intéresser son fils à son dada, la fabrication des instruments d'optique ; mais celui-ci, poussé par sa propre ambition, ne voulait pas démordre de l'idée que les classiques étaient la clef des situations supérieures. Après avoir terminé ses classes, il suivit des cours de commerce ; cette fois son diagnostic était plus juste, mais cela ne lui fut pas d'un grand secours. À seize ans, il comprit qu'il devait aider ses pauvres parents ; l'enseignement lui offrait l'occasion la plus immédiate de toucher des gages fixes ; à l'époque de Boole, les pions ne touchaient pas de traitement, mais des gages ; la différence entre les deux était plus que d'ordre monétaire. Le jeune Boole a bien pu être un des pions de Squeers qui ont servi de modèle à Dickens dans son Nicholas Nickleby ; il était affecté à deux écoles.

Boole passa quatre ans plus ou moins heureux à professer dans cette école élémentaire ; mais au moins les nuits fraîches, pendant lesquelles ses élèves dormaient profondément, lui appartenaient. Cependant, il était encore sur la mauvaise voie. Un troisième diagnostic sur les causes de son indignité sociale ressembla à son second, mais fut néanmoins notablement meilleur que les deux premiers. Ne disposant d'aucun capital (car tout ce qu'il gagnait suffisait à peine à soutenir ses parents et à s'entretenir chichement lui-même), il jetait un œil d'envie sur les professions libérales. Il ne fallait pas songer à l'armée où, pour être officier, on devait, à cette époque, acheter un brevet, et non plus au barreau qui exigeait des moyens financiers et des connaissances de droit qu'il ne possédait pas ; l'enseignement, dans la voie où il était engagé alors, n'était guère recommandable. Que restait-il ? L'Église ! et Boole décida d'entrer dans le clergé.

En dépit de tout ce qu'on peut dire pour ou contre le bon Dieu, les critiques les plus sévères ne sauraient lui dénier le sens de l'humour ; sentant le ridicule d'un Georges Boole devenant ecclésiastique, Il le détourna habilement vers des voies moins déraisonnables ; d'autre part, la situation de plus en plus difficile de ses parents le poussa à renoncer à toute idée de devenir une Éminence. Mais ses quatre années de préparation privée (et de privation rigide) en vue de la carrière qu'il projetait ne furent pas entièrement gaspillées ; il avait acquis une maîtrise absolue du français, de l'allemand et de l'italien, et tout cela devait lui rendre des services inappréciables.

À la fin, il trouva sa voie. Le premier enseignement de son père portait maintenant ses fruits. Dans sa vingtième année, Boole ouvrit une école privée. Il lui fallait enseigner un peu de mathématiques, et les premières leçons qu'il avait reçues de son père lui servirent ; mais bientôt son intérêt s'éveilla ; les manuels ordinaires de l'époque, exécrables, suscitèrent d'abord son étonnement, ensuite son mépris : était-ce cela, les mathématiques ? Que disaient les grands maîtres ? Comme avaient fait Abel et Galois, Boole s'adressa aux grands quartiers-généraux pour ses ordres de marche ; n'oublions pas qu'en fait d'instruction mathématique il n'avait pas dépassé les rudiments. Pour nous faire quelque idée de sa capacité mentale, représentons-nous cet étudiant isolé de vingt ans s'assimilant, sans aucune aide, la *Mécanique céleste* de Laplace, un des chefs-d'œuvre les plus durs à digérer pour un étudiant appliqué parce que le raisonnement mathématique y est plein de lacunes et de déclarations énigmatiques telles qu'il est aisé de voir ; regardons-le ensuite faisant une étude complète et réfléchie de ce monument éminemment abstrait, la *Mécanique analytique* de Lagrange où l'on ne trouve pas une seule figure pour éclairer le raisonnement. Malgré tout, Boole, avec ses connaissances qu'il ne devait qu'à lui seul, trouva sa voie et vit où il allait. De ses efforts sans aucun guide, sortit bientôt sa première contribution aux mathématiques ; c'était un mémoire sur le calcul des variations.

Un autre résultat heureux que Boole tira de tout ce travail solitaire mérite plus qu'une simple mention ; il découvrit les invariants. Nous avons déjà expliqué l'importance de cette grande découverte que Cayley et Sylvester devaient développer pleinement ; répétons ici que sans la théorie mathématique de l'invariant (qui est sortie des anciens travaux d'algèbre) la théorie de la relativité aurait été impossible. Ainsi donc, au seuil de sa carrière scientifique, Boole remarqua qu'il avait sous la main une chose que Lagrange lui-même aurait pu voir aisément ; il la saisit et constata qu'il possédait une gemme de la plus belle eau. Que Boole ait aperçu ce qui avait échappé à d'autres, cela tient certainement à son sentiment profond de la symétrie et de la beauté des relations algébriques (bien entendu lorsqu'elles sont à la fois belles et symétriques, ce qui n'arrive pas toujours) ; d'autres pouvaient avoir pensé que sa trouvaille était simplement ingénieuse ; Boole reconnut qu'elle était d'ordre plus élevé. À l'époque de Boole, il n'était pas facile de publier une étude mathématique, à moins d'être membre de quelque société savante possédant une revue ou des recueils de rapports. Heureusement pour Boole, le Cambridge Mathematical Journal venait d'être fondé, en 1837, sous la direction compétente d'un mathématicien écossais, D. F. Gregory. Boole lui soumit quelques-uns de ses travaux ; leur originalité et leur style impressionnèrent favorablement Gregory et une correspondance mathématique cordiale fut le début d'une amitié qui dura toute la vie de Boole.

Cela nous entraînerait trop loin d'étudier ici la grande contribution que l'école anglaise apportait à cette époque à la compréhension de l'algèbre en tant qu'algèbre, c'est-à-dire en tant que développement abstrait des conséquences d'une série de postulats, sans présupposer nécessairement aucune interprétation en application aux nombres ou à quoi que ce soit d'autre ; mais nous pouvons dire que la conception moderne de l'algèbre a commencé avec les réformateurs anglais Peacock, Herschel, de Morgan, Babbage, Gregory et Boole. Ce qui était une nouveauté, presque une hérésie lorsque Peacock publia son Traité d'Algèbre en 1830 est aujourd'hui un lieu commun dans tout manuel scolaire sérieux ; une fois pour toute, Peacock rompait avec cette superstition que $x, y, z,...$ dans des relations telles que $x + y = y + x, xy = yx, x(y + z) = xy + xz$, que nous trouvons en algèbre élémentaire, représentent nécessairement des nombres ; ce n'est pas vrai, et c'est là une des choses les plus importantes concernant l'algèbre, et la source de ses possibilités dans les applications. Ces $x, y, z...$ sont simplement des signes arbitraires, combinés convenablement dans certaines opérations, l'une représentée par $+$, l'autre par $\times$ (ou simplement $xy$ au lieu de $x \times y$), d'accord avec des postulats posés dès le début, par exemple $z + y = y + z$.

Sans cette réalisation que l'algèbre n'est en elle-même rien de plus qu'un système abstrait, celle-ci aurait pu rester embourbée dans l'arithmétique du XVIII$^{e}$ siècle, incapable de progresser jusqu'à ses variantes modernes et si grandement utiles, imaginées par Hamilton. Notons seulement que cette rénovation de l'algèbre a fourni à Boole sa première occasion de produire l'œuvre magnifique que ses contemporains ont appréciée. De sa propre initiative, il a distingué entre les symboles des opérations mathématiques et les matières sur lesquelles ces symboles travaillent, et s'est mis à étudier ces opérations pour leur propre compte. Comment se combinent-elles ? Étaient-elles aussi subordonnées à une sorte d'algèbre symbolique ? Il trouva qu'elles l'étaient en effet. Son travail dans cette direction est extrêmement intéressant, mais il est éclipsé par l'œuvre qui est véritablement sienne, la création d'un système simple, pratique, de logique symbolique ou mathématique.

Pour présenter convenablement la remarquable découverte de Boole, il nous faut faire une légère digression et rappeler une célèbre querelle de la première moitié du XIXe siècle qui fit un bruit du diable à l'époque, mais qui est aujourd'hui presque oubliée, à l'exception des historiens de philosophie pathologique. Nous avons cité tout à l'heure Hamilton ; il y a eu deux Hamilton, dont les noms étaient connus à cette époque, le mathématicien irlandais Sir William Rowan Hamilton (1805-1865) à qui nous avons consacré un chapitre et le philosophe écossais Sir William Hamilton (1788-1856). Après une carrière médiocre d'avocat en Écosse, après des candidatures malheureuses à des fonctions officielles dans l'Université, l'éloquent philosophe devint finalement professeur de logique et de métaphysique à l'Université d'Edimbourg. Hamilton le mathématicien a été, comme nous l'avons vu, un des mathématiciens remarquables du XIXe siècle ; c'est peut-être malheureux pour l'autre Hamilton, car ce dernier n'a jamais fait de mathématiques le moins du monde, et des lecteurs hâtifs les confondent tous les deux, ce qui doit certainement les faire tressaillir l'un et l'autre dans leur tombe.

Or, s'il est quelqu'un de plus obtus au point de vue mathématique qu'un métaphysicien écossais à la tête dure, c'est probablement un métaphysicien allemand à tête encore plus dure, mathématiquement parlant. Pour trouver quelque chose de plus fort que l'absurdité grotesque de certaines déclarations de l'Écossais Hamilton au sujet des mathématiques, il suffit de regarder ce que Hegel a dit de l'astronomie ou Lotze de la géométrie non-euclidienne. Ce fut le malheur du métaphysicien Hamilton d'avoir été trop obtus ou trop paresseux pour posséder plus qu'une teinture la plus banale des mathématiques élémentaires de l'école ; mais l'omniscience était son faible et lorsqu'il commençait à disserter ou à écrire sur la philosophie, il se sentait obligé de dire au monde combien peu de valeur avaient les mathématiques.

L'attaque des mathématiques par Hamilton est probablement le plus célèbre de tous les nombreux assauts furieux auxquels celles-ci ont survécu, sans en pâtir. Il y a moins de dix ans, de longs extraits des diatribes d'Hamilton ont été chaleureusement applaudis lorsqu'un pédagogue enthousiaste les a débités devant une nombreuse assistance, à la “National Educational Association” américaine ; au lieu d'applaudir, les auditeurs auraient mieux profité de la conférence s'ils s'étaient arrêtés pour avaler un peu de la philosophie d'Hamilton en manière de sauce obligatoire pour mieux goûter son hareng mathématique. Pour être loyal à son égard, nous citerons quelques-uns de ses traits les plus vifs, laissant au lecteur le soin d'en faire l'usage qu'il lui plaira.

“Les mathématiques glacent et dessèchent l'esprit” ; “une étude exagérée des mathématiques rend l'esprit absolument incapable de ces énergies intellectuelles que la vie et la philosophie exigent” ; “les mathématiques ne peuvent pas du tout conduire à des habitudes logiques” ; “en mathématiques, la sottise est élevée au rang de talent, et le talent rabaissé à celui d'incapacité” ; “les mathématiques peuvent déformer, mais ne peuvent jamais redresser l'esprit".

Ce n'est là que menue grenaille : nous n'avons pas la place de présenter les boulets de canon. L'ensemble de l'attaque fait beaucoup d'impression sur ceux qui, des mathématiques, savent encore moins qu'un enfant intelligent de dix ans. Un dernier coup mérite une mention spéciale, car il fait intervenir une figure mathématicienne importante dans cette guerre oratoire ; c'est celle de de Morgan (1806-1871), mathématicien d'une vigoureuse indépendance, grand logicien, qui a préparé les voies pour Boole, ennemi inpitoyable, et toujours de bonne humeur, des charlatans et des farceurs, enfin père du célèbre romancier du même nom. Hamilton déclare : "Néanmoins, si M. de Morgan avait été moins mathématicien, il aurait pu être plus philosophe". De Morgan, qui avait acquis quelque célébrité par ses découvertes en logique, s'était, dans un moment de distraction, laissé entraîner dans une controverse avec Hamilton au sujet du fameux principe de la quantification du prédicat ; il est inutile d'expliquer ce qu'est ce mystère (ou ce qu'il fut) ; il est mort et enterré. De Morgan avait apporté une véritable contribution au syllogisme ; Hamilton crut avoir découvert le diamant de de Morgan dans sa propre gangue ; l'irascible philosophe-légiste écossais accusa publiquement de Morgan de plagiat, et la lutte se trouva engagée ; du côté de de Morgan, elle prit une tournure de plaisanterie joyeuse, car il ne perdait jamais son sang-froid ; Hamilton n'avait jamais su le conserver. S'il n'y avait eu là qu'une de ces chamailleries qui déparent l'histoire scientifique, ce fait n'aurait mérité qu'une mention passagère, mais il a une importance historique parce qu'à cette époque (1848), Boole était un admirateur et un grand ami de de Morgan ; il vint à son aide. Toujours petit professeur, il était néanmoins en relation personnelle ou par correspondance avec maints grands mathématiciens de Grande-Bretagne. Sans doute, le sarcastique de Morgan n'avait pas besoin d'aide, mais Boole le soutint simplement parce qu'il voyait qu'il avait raison et qu'Hamilton avait tort. Et c'est ainsi, qu'en 1848, Boole publia une petite étude, *L'analyse mathématique de la logique*, sa première contribution publique au vaste sujet que cette étude inaugurait et qui devait lui valoir sa renommée par la hardiesse et la perspicacité de ses vues. La brochure excita l'admiration de de Morgan, qui se hâta de reconnaître que c'était l'œuvre d'un maître ; elle n'était que la promesse de plus grandes choses qui devaient arriver six ans plus tard, mais Boole avait définitivement défriché un sol vierge.

Entre temps, sourd aux conseils de ses amis mathématiciens qui lui conseillaient d'aller à Cambridge et d'y suivre les cours de mathématiques orthodoxes, Boole restait courbé sur son ingrat labeur de maître d'école, sans se plaindre, parce que ses parents étaient maintenant entièrement à sa charge. Un beau jour cependant, sa réputation commençante de chercheur et de conférencier lui valut d'être nommé professeur de mathématiques du Queen's College, qui venait de s'ouvrir à la cité de Cork en Irlande ; c'était en 1849.

Inutile de dire qu'après n'avoir connu jusque-là que la pauvreté et le dur labeur, Boole fit un excellent usage de sa nouvelle liberté relative ; aujourd'hui nous trouverions ses occupations fort lourdes ; il les jugeait légères en comparaison de la triste corvée à laquelle il était accoutumé. Il se mit à produire divers travaux remarquables, mais il s'attacha surtout à polir son œuvre maîtresse ; en 1854, il la publia sous le titre "*Une étude des lois de la pensée*", sur lesquelles sont fondées les théories mathématiques de la logique et des probabilités. Boole avait alors trente ans, âge un peu avancé pour un mathématicien pour produire une œuvre d'une si profonde originalité ; mais la route longue et pénible que Boole a dû suivre, comme nous l'avons vu, pour parvenir à son but, explique ce phénomène (comparez les carrières de Boole et de Weierstrass).

Quelques extraits donneront une idée de la manière de Boole et de l'objet de son œuvre :

> *L'objet du présent traité est d'étudier les lois fondamentales de ces opérations de l'esprit par lesquelles s'accomplit le raisonnement, de les exprimer dans la langue du calcul, puis d'établir sur cette base la science de la logique et d'en construire la méthode, de faire de ce procédé lui-même la base d'une méthode générale pour l'application de la doctrine mathématique des probabilités, enfin de recueillir de ces divers éléments de vérité, mis à la lumière au cours de ces recherches, quelques indices vraisemblables sur la nature et la constitution de l'esprit humain...*
>
> *Est-ce une erreur de considérer cela comme la vraie science de la logique qui, en posant certaines lois élémentaires, confirmées par le même témoignage de l'esprit, nous permet d'en déduire, par des procédés uniformes, la chaîne entière de ses conséquences secondaires et fournit, pour ses applications pratiques, des méthodes d'une généralité absolue ?...*
>
> *Il existe, en effet, certains principes généraux fondés sur la véritable nature du langage, par lesquels l'usage de symboles, qui ne sont que les éléments du langage scientifique, se trouve déterminé. Dans une certaine limite, ces éléments sont arbitraires. Leur interprétation est purement conventionnelle : nous avons la faculté de les employer dans n'importe quel sens qu'il nous plaît. Mais cette faculté est limitée par deux conditions indispensables : d'abord que nous ne nous écartions jamais, dans le cours du raisonnement, du sens une fois admis conventionnellement ; ensuite, que les lois qui régissent le procédé soient basées exclusivement sur le sens fixé ci-dessus ou sur la signification des symboles employés. Conformément à ces principes, tout accord qui peut être établi entre les lois des symboles de la logique et celles de l'algèbre ne peut résulter que d'un accord de procédés. Les deux domaines d'interprétation restent distincts et indépendants, chacun est soumis à ses lois et à ses conditions propres.*
>
> *Or, les recherches réelles contenues dans les pages suivantes présentent la logique, sous son aspect pratique, comme un système de procédés exécutés à l'aide de symboles ayant une interprétation définie et soumis à des lois uniquement fondées sur cette interprétation. Mais en même temps elles montrent que ces lois ont une forme identique aux lois des symboles généraux de l'algèbre, avec cette seule addition que les symboles de la logique sont en outre soumis à une loi spéciale auxquels les symboles de quantité, comme tels, ne sont pas soumis [par exemple, dans l'algèbre de la logique, la loi $x^2 = x$ que l'on peut interpréter. entre autres, comme "la classe de tout ce qui est commun à une classe $x$ et qui elle-même est simplement la classe". Autrement dit, il n'est pas vrai, en algèbre ordinaire, que tout r soit égal à son carré, tandis que c'est vrai dans l'algèbre logique de Boole.]*

Le livre en question suit fidèlement ce programme. Boole a réduit la logique à un type d'algèbre extrêmement facile et simple. Le "raisonnement", sur une matière appropriée, devient, dans cette algèbre, une question de manipulations élémentaires de formules bien plus simples que la plupart de celles qui sont traitées dans un manuel d'algèbre de deuxième année. Ainsi donc, la logique elle-même a été soumise à l'autorité des mathématiques.

Depuis le travail de découverte de Boole, son invention a été modifiée, perfectionnée, généralisée et étendue dans de nombreuses directions. Aujourd'hui la logique symbolique ou mathématique est indispensable à toute tentative sérieuse de comprendre la nature des mathématiques et l'état de ses fondations sur lesquelles repose toute sa colossale superstructure. La complexité et la délicatesse des difficultés explorées par le raisonnement symbolique défieraient, on peut l'affirmer, la raison humaine si nous n'avions à notre disposition que les anciennes méthodes, d'avant Boole, des arguments logiques verbaux. L'originalité hardie de l'ensemble du projet de Boole n'a nul besoin de poteau indicateur ; c'est, en soi, une véritable pierre miliaire.

Depuis 1899, où Hilbert a publié son ouvrage classique sur les fondements de la géométrie, on a formulé avec beaucoup d'attention les postulats des diverses branches des mathématiques. Ce mouvement remonte jusqu'à Euclide, mais, pour quelque raison. singulière, la méthode euclidienne a été longtemps négligée en tout, sauf en géométrie, peut-être parce que les techniques imaginées par Descartes, Newton, Leibniz, Euler, Gauss et d'autres ont fourni aux mathématiciens amplement de quoi traiter leurs sujets librement et en quelque sorte sans risques. Nous avons déjà vu que l'école anglaise a appliqué la méthode à l'algèbre dans la première moitié du XIX[e] siècle ; les succès qu'elle obtint ne paraissent pas avoir fait grande impression sur les travaux de ses contemporains et de leurs successeurs immédiats de cette école, et c'est seulement grâce aux travaux d'Hilbert que la méthode de postulats est parvenue à se faire admettre comme la manière la plus claire et la plus rigoureuse d'aborder toute discipline mathématique. Aujourd'hui, cette tendance à l'abstraction, dans laquelle les symboles et les règles d'opération sur une question particulière sont dégagés de toute signification et discutés uniquement au point de vue de la forme, fait fureur, au point de faire négliger les applications (mathématiques ou pratiques) qui, d'après certains, sont la justification ultime de toute activité scientifique. Il n'en est pas moins vrai que la méthode abstraite fournit des aperçus que des méthodes moins rigoureuses ne donnent pas ; en particulier, elle permet de voir très aisément la véritable simplicité de l'algèbre de logique de Boole.

C'est pourquoi nous allons énoncer les postulats de cette algèbre, et nous verrons qu'ils peuvent effectivement permettre d'interpréter convenablement la logique classique. Nous empruntons le groupe suivant de postulats à un article de E. V. Huntington, paru dans les *Transactions of the American Mathematical Society* (t. XXXV, 1935, pp. 274-304) ; quiconque a fait seulement une semaine d'algèbre peut comprendre cet article, qui se trouve dans toutes les grandes bibliothèques. Comme le fait remarquer Huntington, ce premier groupe de postulats n'est pas aussi élégant que certains autres ; nous l'avons choisi de préférence, parce que son interprétation au moyen de l'inclusion de classe comme en logique formelle est plus facile que pour d'autres.

Ces postulats s'énoncent au moyen de symboles, $K, +, \times$, où $K$ est une classe d'éléments $a, b, c,$... indéterminés (entièrement arbitraires, sans aucune signification ni propriété assignée en dehors de celles établies par les postulats) et où $a+b$, $a \times b$ (que l'on écrit aussi $ab$) sont les résultats de deux opérations binaires non définies, $+$, $\times$ (binaires parce que chacun des $+$, ou $\times$, opère sur deux éléments de $K$). Il y a dix postulats, numérotés de I a à VI :

I*a*. Si $a$ et $b$ sont de la classe $K$, $a+b$ est de la classe $K$.

I$b$. Si $a$ et $b$ sont de la classe $K$, $ab$ est de la classe $K$.

II$a$. [ Il existe un élément $Z$ tel que $a + Z = a$ pour tout élément $a$.

III$a$. $a + b = b + a$

II$b$. Il existe un élément $U$ tel que $a \times U = a$ pour tout élément $a$

III$b$. $ab = ba$.

IV$a$. $a + bc = (a + b)(a + c)$.

IV$b$. $a(b + c) = ab + ac$.

V. Pour tout élément $a$, il y a un élément $a'$ tel que $a + a' = U$ et $aa' = Z$.

VI. La classe $K$ comprend au moins deux éléments distincts.

On voit aisément que ces postulats sont satisfaits si l'on interprète les symboles comme il suit : $a, b, c$,... sont des classes, $a + b$ est la classe de toutes les choses qui existent dans au moins une des classes $a, b$ ; $ab$ est la classe de toutes les choses qui se trouvent dans les deux classes $a$ et $b$ ; $Z$ est ce qu'on appelle la "classe nulle", celle qui n'a pas de membres ; $U$ est la "classe universelle", celle qui contient toutes les choses dans toutes les classes à l'étude. Alors le postulat V dit qu'étant donné une classe quelconque $a$, il y a une classe $a'$ formée de toutes les choses qui ne sont pas dans $a$. À noter que d'après le postulat VI, $U$ et $Z$ ne sont pas une même classe.

Il paraît plutôt remarquable qu'en partant de ce groupe simple et évident de postulats, on puisse bâtir symboliquement l'ensemble de la logique classique, au moyen de l'algèbre facile créée par les postulats. On tire de ceux-ci la théorie de ce qu'on peut appeler les "équations logiques" ; on met les problèmes de logique en équations dites et on résout celles-ci par les procédés de l'algèbre : on traduit de nouveau les solutions en expressions de la logique, ce qui donne la solution du problème initial.

Nous terminerons cet exposé par l'équivalent symbolique d'"inclusion", qui peut être interprétée aussi comme "implication", lorsque les éléments de $K$ sont des propositions, plutôt que des classes.

*La relation $a < b$ (qui se lit $a$ est compris dans $b$) est définie par une quelconque des équations suivantes* :

$$a + b = b \qquad ab = a \qquad a' + b = U \qquad ab' = Z.$$

Pour montrer que ces équations conviennent, prenons par exemple la seconde : elle dit que si $a$ est compris dans $b$, tout ce qui est à la fois dans $a$ et $b$ fait le total de $a$. Au moyen des postulats énoncés, on peut démontrer les théorèmes suivants sur l' inclusion (avec des milliers d'autres plus compliqués, si l'on veut). Les exemples choisis s'accordent tous avec notre conception intuitive de ce que nous entendons par "inclusion" :

1. $a < a$.

2. Si $a < b$ et $b < c$, alors $a < c$.

3. Si $a < b$ et $b < a$, alors $a = b$.
4. $Z < a$ (si $Z$ est l'élément défini par le postulat IIa, il est démontré qu'il est le seul élément satisfaisant à IIa).
5. $a < U$ (où $U$ est l'élément défini par IIb également le seul satisfaisant à IIb).
6. $a < a + b$ ; et si $a < y$ et $b < y$, alors $a + b < y$.
7. $ab < a$ ; et si $x < a$ et $x < b$ alors $x < ab$.
8. Si $x < a$ et $x < a'$, alors $x = Z$ ; et si $a < y$ et $a' < y$ alors $y = U$.
9. Si $a < b'$ est faux, alors il y a au moins un élément $x$, distinct de $Z$, tel que $x < a$ et $x < b$.

Il peut être intéressant d'observer qu'en arithmétique et en algèbre, $<$ est le symbole de “plus petit que”. Notons que si $a, b, c$,... sont des nombres réels, et si $Z$ représente le zéro, l'équation (2) est satisfaite, avec cette interprétation du signe $<$ et de même l'équation (4), pourvu que $a$ soit positif, mais (1) n'est pas satisfaite, et non plus la deuxième partie de (6), car nous voyons que $5 < 10, 7 < 10$, mais $5 + 7 < 10$ est faux.

On peut aisément se rendre compte de la puissance étonnante et de la grande commodité de la méthode en voyant ce qu'elle est capable de faire dans toute étude sur la logique symbolique ; mais, comme on l'a déjà fait ressortir, l'importance de ce raisonnement symbolique réside dans ses possibilités d'application aux questions délicates concernant les fondements de toutes les mathématiques ; l'esprit humain serait probablement incapable d'aborder ces questions s'il ne disposait pas de cette méthode précise qui permet de fixer les significations des mots ou autres symboles une fois pour toutes.

Comme il arrive de toutes les nouveautés, la logique symbolique a été négligée pendant plusieurs années après sa découverte. En 1910, nous voyons des mathématiciens éminents la mépriser en déclarant que ce n'est qu'une curiosité philosophique sans aucune signification mathématique. Les travaux de Whitehead et de Russell publiés dans les Principia Mathematica (1910-1913) ont, pour la première fois, persuadé à tout corps important de mathématiciens professionnels que la logique symbolique pouvait mériter une attention sérieuse. Mentionnons quelqu'un qui a manifesté une haine vivace à l'égard de la logique symbolique, c'est Cantor, dont nous examinerons les travaux sur l'infini au dernier chapitre. Par une de ces petites ironies qui font de l'histoire des mathématiques une lecture si amusante pour un esprit ouvert, la logique symbolique devait jouer un rôle important dans la critique drastique de l'œuvre de Cantor, qui amena son auteur à perdre sa foi en lui-même et en sa théorie.

Boole ne survécut pas longtemps à la publication de son œuvre maîtresse. L'année d'après, toujours poursuivi inconsciemment par cet ardent désir de respectabilité sociale qu'il avait déjà essayé de satisfaire en apprenant le latin et le grec, il épousa Marie Everest, nièce d'un professeur de grec au Queen's College. Sa femme devint son élève dévouée ; après la mort de son mari, Mary Boole appliqua certaines des idées qu'il lui avait inculquées à humaniser et rationaliser l'éducation des jeunes enfants. Dans une brochure intitulée *Psychologie de Boole*, elle rappela une spéculation intéressante de son mari où les lecteurs des *Lois de la pensée* reconnaîtront implicitement, encore que non exprimée, la philosophie personnelle du maître. Boole dit un jour à sa femme, en 1832, qu'à l'âge de dix-sept ans l'idée lui était venue tout à coup au cours d'une promenade champêtre qu'en dehors des connaissances acquises par l'observation directe, l'homme en retire d'autres de quelque source indéfinissable et invisible, que Mary Boole appelle "l'inconscient". Dans un chapitre ultérieur, il sera intéressant d'entendre Poincaré exprimer une opinion similaire au sujet de la genèse des inspirations mathématiques dans "l'esprit subconscient". De toute façon, Boole, quand il a écrit ses *Lois de la pensée*, était inspiré, si jamais mortel le fût.

Boole mourut, honoré et de plus en plus célèbre, à l'âge de cinquante ans, le 8 décembre 1864. Sa fin prématurée fut amenée par une pneumonie contractée un certain jour où, ne voulant pas manquer une conférence qu'il avait promise, il avait été trempé jusqu'aux os. Il s'est parfaitement rendu compte qu'il avait accompli une œuvre grandiose.