Une interview de Jean-Pierre Serre

par Martin Raussen et Christian Skau
Sociétés norvégienne et danoise de mathématiques

Le 3 juin 2003, Jean-Pierre Serre a reçu des mains du roi Harald de Norvège le premier Prix Abel, destiné à récompenser d'éminents mathématiciens et, à travers eux, à attirer l'attention - en particulier des jeunes - sur les mathématiques.

La Newsletter *de l'*"European Mathematical Society" *de septembre 2003 consacre plusieurs pages à cet événement et publie une interview en anglais de Jean-Pierre Serre. Nous proposons à nos lecteurs une traduction*[1] *de cet entretien, réalisé le 2 juin 2003 à Oslo par Martin Raussen et Christian Skau sous l'égide des Sociétés norvégienne et danoise de mathématiques, qui l'ont publié dans leur* Newsletter.

De très nombreux autres périodiques ont commenté la nomination de Jean-Pierre Serre. Pour rester dans la langue francaise, on trouvera dans SMP (périodique d'informations générales scientifiques publié par le CNRS) un article très agréable de Maurice Mashaal.

Topologie

Martin Raussen et Christian Skau : Tout d'abord, permettez-nous de vous féliciter d'être le premier lauréat du prix Abel. Vous avez commencé votre carrière par une thèse consacrée à la topologie algébrique. C'était à l'époque, en France tout au moins, une discipline très neuve, et pas l'une des plus répandues. Pourquoi avoir choisi ce sujet ?

Jean-Pierre Serre : Je participais alors au séminaire Cartan de topologie algébrique. Mais Cartan ne proposait pas de sujet de recherche à ses étudiants : ils devaient s'en choisir un, après quoi il les aidait. C'est ce qui m'est arrivé. Je me suis aperçu que la théorie de Leray (sur les fibrés et leurs suites spectrales) pouvait s'appliquer à bien plus de situations qu'on ne le

Référence de l'article : RMS, Volume 114, n° 3 (2003-2004).

1. Traduit de l'anglais par Bernard Randé.

pensait et que, convenablement étendue, elle pourrait être utilisée pour calculer des groupes d'homotopie.

M. R. ET C. S. : Je crois que l'on peut à juste titre affirmer que les méthodes et les résultats de votre thèse ont révolutionné l'homotopie et lui ont donné sa forme moderne.

J.-P. S. : Ils ont certainement ouvert de nombreuses voies. Avant cette thèse, les groupes d'homotopie des sphères étaient presque complètement *terra incognita* ; on ne savait même pas qu'ils étaient de type fini ! Un aspect intéressant de la méthode que j'ai introduite était son caractère algébrique. En particulier, elle permettait des calculs locaux, au sens de la localisation en théorie des nombres, relativement à un nombre premier fixé.

M. R. ET C. S. : J'ai entendu dire que l'un des points cruciaux dans cette affaire était de définir quelque chose qui ressemblait à un fibré sans en être un exactement.

J.-P. S. : Il est vrai que, pour appliquer la théorie de Leray, j'ai eu besoin de construire des espaces fibrés qui ne répondaient pas à la définition standard. De façon plus précise, j'avais besoin d'associer à chaque espace X un espace E fibré sur X dont l'homotopie soit triviale (par exemple un espace contractile). Mais comment ? Une nuit de 1950, dans le train, au retour de nos grandes vacances, j'ai vu la solution en un éclair : on prend pour E l'espace des chemins de X, d'origine fixée, la projection étant alors l'application d'évaluation qui à un chemin associe son extrémité. La fibre n'est autre que l'espace des lacets. Sans aucun doute, c'était bien ça ! J'en ai réveillé ma femme pour lui en parler... (Bien entendu, il me restait à montrer que la projection en question méritait d'être appelée fibration, et que l'on pouvait lui appliquer la théorie de Leray. Un travail technique, certes, mais pas si facile.) Il est étrange qu'une construction si simple ait eu tant de conséquences.

Thèmes et syle de travail

M. R. ET C. S. : Cette histoire d'illumination soudaine rappelle celle rapportée par Hadamard dans son petit livre *La psychologie de l'invention en mathématiques*, qui raconte comment Poincaré a eu une révélation brutale en montant dans le tramway. Êtes-vous enclin à privilégier l'inspiration, le travail systématique, ou un mélange des deux ?

J.-P. S. : Il y a des sujets auxquels je reviens périodiquement (les représentations l-adiques, par exemple), mais pas systématiquement. J'y vais au flair. Quant aux éclairs que décrit Hadamard, c'est tout juste si j'en ai vécu deux ou trois en cinquante ans. Des moments merveilleux... mais bien trop rares !

M. R. ET C. S. : De tels éclairs surviennent, j'imagine, après de longs efforts ?

J.-P. S. : Efforts, non. Il s'agit plutôt d'une longue maturation et d'un travail inconscient, comme l'explique si bien le joli livre de Littlewood, *A Mathematician's Miscellany.*

M. R. ET C. S. : À la suite de votre période topologique, vous vous êtes essentiellement consacré à la théorie des nombres et à la géométrie algébrique.

J.-P. S. : Vous savez, on pourrait croire que je travaille dans des domaines très variés, mais ces domaines sont en fait liés. Je n'ai pas l'impression de changer. Par exemple, en théorie des nombres, en théorie des groupes aussi bien qu'en géométrie algébrique, j'utilise des notions topologiques, telles que la cohomologie, les faisceaux et les obstructions. Ainsi, j'ai pris grand plaisir à travailler sur les représentations l-adiques et les formes modulaires : on doit utiliser la théorie des nombres, la géométrie algébrique, les groupes de Lie réels et l-adiques, les q-séries de la combinatoire. Un mélange merveilleux.

M. R. ET C. S. : Votre façon de penser est-elle de nature plutôt géométrique, plutôt algébrique, ou bien les deux à la fois ?

J.-P. S. : Plutôt algébrique, mais je comprends mieux le langage géométrique que le langage algébrique : entre un groupe de Lie et une bigèbre, je choisis le groupe de Lie ! Pourtant, je ne me considère pas comme un vrai géomètre, comme Bott et Gromov.

J'aime aussi beaucoup l'analyse, mais je ne peux pas non plus prétendre être un véritable analyste. Le vrai analyste voit au premier regard ce qui est grand, petit, probablement petit et démontrablement petit (ce qui nest pas la même chose). Cette vision intuitive me fait défaut, et j'ai besoin d'écrire noir sur blanc des inégalités explicites.

M. R. ET C. S. : Au cours de votre longue carrière, vous avez travaillé sur un grand nombre de sujets différents. Parmi les théories que vous avez créées et les résultats que vous avez obtenus, lesquels vous tiennent le plus à cœur ?

J.-P. S. : Une question délicate ! Demanderiez-vous à une mère lequel de ses enfants elle préfère ? Je peux simplement dire que certains de mes articles furent très faciles à écrire et d'autres réellement difficiles. L'article FAC, sur les faisceaux algébriques cohérents, appartient à la première catégorie. Quand je l'ai écrit, j'ai eu l'impression de copier un texte qui existait déjà ; cela ne m'a demandé pratiquement aucun effort. En revanche, je me rappelle un article sur les sous-groupes ouverts des groupes profinis, qui m'a donné tellement de mal que, jusqu'au bout, je n'arrivais pas à savoir si je démontrais le théorème ou si je contruisais un contre-exemple ! Autre cas d'article difficile : celui dédié à Manin, dans lequel j'énonçais des conjectures très précises (et très téméraires) sur les représentations galoisiennes modulaires (modulo p) ; celui-là fut même si éprouvant que, lorsque je l'eus terminé, je m'arrêtai de publier pour plusieurs années.

Du côté plaisir, il me faut mentionner un article dédié à Borel, sur les produits tensoriels de représentations en caractéristique p. J'ai toujours beaucoup aimé la théorie des groupes, et j'y ai même démontré quelques théorèmes. Mais ce résultat sur les produits tensoriels, obtenu quand j' approchais soixante-dix ans, fut le premier qui m'ait véritablement donné du plaisir. J'ai eu le sentiment que la théorie des groupes, après quarante ans de cour assidue, consentait à me faire une bise.

M. R. ET C. S. : Comme mathématicien, vous êtes resté en première ligne pendant plus de cinquante ans. Hardy a fait cette remarque, souvent reprise, que les mathématiques sont un jeu de jeune homme. N'est-ce pas complètement faux ? N'êtes-vous pas le contre-exemple parfait ?

J.-P. S. : Pas complètement : avez-vous remarqué que le Prix Abel fait principalement référence à des travaux effectués avant mes trente ans ? Il est cependant certain que les gens de ma génération (Atiyah, Borel [2], Bott, Shi-

2. Armand Borel est décédé le 11 août 2003.

mura, etc.) continuent à travailler plus longtemps que ceux de la génération précédente (avec de remarquables exceptions, comme Elie Cartan, Siegel, Zariski). J'espère que cette évolution va continuer.

Rapports à l'histoire des mathématiques

M. R. ET C. S. : Puisque le prix que vous avez reçu porte le nom d'Abel, nous voudrions remonter avec vous à son époque. Les équations algébriques étudiées par Galois et Abel, alors qu'ils sortaient de la théorie de la transformation des fonctions elliptiques, se sont révélées de la plus haute importance pour l'étude arithmétique des courbes elliptiques. Vous qui avez contribué à cette étude, auriez-vous des commentaires à faire au sujet de cette relation étonnante ?

J.-P. S. : C'est vrai, les courbes elliptiques sont à la mode, et pour de bonnes raisons, qui vont du programme de Langlands à la cryptographie. Dans les années soixante et soixante- dix, j'ai passé pas mal de temps à étudier leurs points d'ordre fini (*alias* modules de Tate) et leurs groupes de Galois. Un jeu très amusant : on doit combiner des informations d'origines très différentes : décompositions de Hodge-Tate, inertie modérée, éléments de Frobenius, les théorèmes de finitude à la Siegel... J'aime bien ça.

M. R. ET C. S. : Hermite a dit un jour qu'Abel avait donné du travail aux mathématiciens pour les cent-cinquante années à venir. Êtes-vous d'accord ?

J.-P. S. : Je n'aime pas les grandes déclarations de ce genre. Elles sous-entendent que leur auteur sait ce qui va arriver cent ans après. Quelle prétention !

M. R. ET C. S. : Dans l'introduction de l'un de ses articles, Abel écrit qu'on devrait s'efforcer de formuler les problèmes de façon à rendre toujours possible leur résolution. Il dit que c'est toujours réalisable, et il ajoute même qu'une formulation adéquate contient en germe la solution du problème.

J.-P. S. : Un point de vue optimiste ! Grothendieck serait sûrement d'accord. Quant à moi, je crains qu'il ne s'applique qu'aux questions d'algèbre, et pas à celles d'arithmétique. Par exemple, qu'aurait pensé Abel de l'hypothèse de Riemann ? Qu'elle est mal formulée ?

Rôle des démonstrations

M. R. et C. S. : Vous arrive-t-il en mathématiques de savoir que quelque chose est vrai sans en avoir de démonstration ?

J.-P. S. : Bien entendu, c'est très fréquent. Mais il faut distinguer entre le but ultime (la modularité des courbes elliptiques, dans le cas de Wiles), dont on perçoit avec certitude qu'il est vrai, et les résultats intermédiaires (lemmes, etc.) qui peuvent être inaccessibles (comme Wiles s'en est aperçu lors de sa première tentative), voire carrément faux (c'est ce qui est arrivé à Lafforgue).

M. R. et C. S. : Une démonstration a-t-elle toujours une valeur en soi ? Je songe, par exemple, à celle du théorème des quatre couleurs.

J.-P. S. : Nous sommes là dans une zone délicate : celles des démonstrations assistées par ordinateur. Ce ne sont pas des démonstrations au sens usuel : on ne peut pas les vérifier ligne par ligne. Elles sont particulièrement sujettes à caution lorsqu'elles affirment donner des listes complètes.

Je me rappelle ainsi avoir reçu, dans les années quatre-vingt-dix, une liste des sous-groupes d'indice donné d'un certain groupe discret. L'ordinateur avait trouvé, disons vingt de ces sous-groupes. Comme je connaissais bien ces groupes, j'ai pu facilement en trouver à la main une trentaine. J'ai écrit aux auteurs. Ils m'ont expliqué la raison de leur erreur : une partie du calcul avait été effectuée au Japon, une autre en Allemagne, mais ils avaient oublié une partie intermédiaire. Typique !

D'un autre côté, les démonstrations assistées par ordinateur sont souvent plus convaincantes que beaucoup de démonstrations classiques fondées sur des diagrammes déclarés commutatifs, des flèches prétendument identiques et des détails laissés au lecteur.

M. R. et C. S. : Qu'en est-il de la démonstration conduisant à la classification des groupes finis simples ?

J.-P. S. : Bonne question ! Je me suis disputé pendant des années avec les spécialistes de théorie des groupes, qui prétendaient que le Théorème de la

Classification était bien un théorème, autrement dit qu'il avait été démontré. C'était en effet ce qu'avait annoncé Gorenstein en 1980, mais on s'était aperçu qu'il y avait un trou (la classification des groupes quasi-minces). Chaque fois que j'interrogeais un spécialiste, il me répondait en substance Non, non, ce n'est pas un trou, c'est quelque chose qui n'a pas encore été écrit, mais il y a 800 pages là-dessus qui attendent d'être complétées pour être publiées. Pour moi, c'était exactement la définition d'un trou, et je ne voyais pas pourquoi il n'était pas reconnu comme tel. Heureusement, Aschbacher et Smith ont maintenant écrit un texte de plus de 1200 pages afin de combler ce trou. Quand il aura été vérifié par d'autres spécialistes, ce sera le moment de fêter l'événement.

M. R. et C. S. : Mais à quoi peut servir une démonstration de 1200 pages ?

J.-P. S. : En réalité, la démonstration complète de la classification fait bien plus que 1200 pages, peut-être dix fois plus : le seul énoncé du théorème est lui-même extrêmement long puisque, pour être utilisable, il doit contenir la description détaillée, non seulement des groupes de Chevalley, mais aussi des 26 groupes sporadiques. C'est un beau théorème, qui a des applications très surprenantes. Je ne pense pas que son usage pose problème aux mathématiciens d'autres domaines : il leur suffit de préciser quelle partie de leur démonstration en dépend.

Problèmes mathématiques importants

M. R. et C. S. : Pensez-vous qu'il y ait en mathématiques des domaines cruciaux ou dominants ? Y a-til des sujets plus importants que d'autres ?

J.-P. S. : C'est une question délicate. Il y a évidemment des branches des mathématiques qui sont moins importantes : celles où l'on fait joujou avec quelques axiomes et leurs relations logiques. Mais on ne peut pas être dogmatique à ce sujet. Il arrive qu'un domaine délaissé devienne intéressant et noue des relations nouvelles avec d'autres branches des mathématiques.

En revanche, certaines questions jouent un rôle clairement central dans notre compréhension du monde mathématique : l'hypothèse de Riemann et le programme de Langlands en sont des exemples frappants. Sans oublier la conjecture de Poincaré qui pourrait bien n'être plus une conjecture, grâce à Perelman !

M. R. ET C. S. : Avez-vous des renseignements ou un sentiment à propos de la justesse de la démonstration ?

J.-P. S. : Un sentiment ? Qui se soucie des sentiments ! Des renseignements ? Pas vraiment, mais j'ai entendu des gens à l'IHES et au MIT qui se passionnaient pour cette esquisse de preuve. Un côté intéressant de la méthode de Perelman, c'est son utilisation de l'analyse à l'égard d'un problème de pure topologie. C'est très satisfaisant.

M. R. ET C. S. : Nous avons déjà fait un pas dans l'avenir en parlant de la conjecture de Poincaré. Quels sont les problèmes importants que vous aimeriez voir résolus dans un proche avenir ? Par exemple, êtes-vous d'accord avec la grande importance des problèmes du Clay Millenium Prize ?

J.-P. S. : Ah ! Les problèmes de Clay à un million de dollars ! Drôle d'idée : tant d'argent pour un seul problème... mais comment me permettre de critiquer cela après avoir reçu le prix Abel ? Pourtant, j'y vois un risque, celui que les gens hésitent à discuter ouvertement de leurs résultats intermédiaires, comme c'est arrivé il y a dix ans avec le théorème de Fermat.

Quant au choix des questions retenues par le Clay Institute, je le trouve très bon. L'hypothèse de Riemann et la conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer y figurent très légitimement. La conjecture de Hodge aussi, mais pour une autre raison : il est douteux si la réponse est oui ou non. Ce qui importe, c'est de trouver la réponse (j'espère, bien sûr, que cela ne se révèlera pas indécidable...). Le problème P=NP est dans la même catégorie que celui de Hodge, à ceci près qu'il y aurait bien plus d'applications si la réponse était oui.

M. R. ET C. S. : Avez-vous en tête d'autres problèmes de la même ampleur ?

J.-P. S. : Je vous ai déjà dit que le programme de Langlands est l'une des questions majeures des mathématiques d'aujourd'hui. S'il ne figure pas dans la liste de Clay, c'est sans doute qu'il est difficile de le formuler avec toute la précision nécessaire.

M. R. ET C. S. : Outre vos mérites scientifiques, on vous reconnaît des qualités exceptionnelles de conférencier, dont nous pouvons témoigner à la suite de l'exposé d'aujourd hui [3].

J.-P. S. : Merci. Je viens du sud de la France, où l'on aime parler ; pas seulement avec les lèvres, aussi avec les mains et, dans mon cas, avec un morceau de craie. Quand j'ai compris quelque chose, j'ai le sentiment que tout le monde peut le comprendre aussi, et cela m'est un grand plaisir de l'expliquer à d'autres mathématiciens, que ce soient des étudiants ou des collègues. Le revers de la médaille, c'est qu'une assertion fausse me rend presque physiquement malade. Ça m'est insupportable. Quand j'en entends une lors d'un exposé, j'interromps l'orateur, et quand j'en lis une dans une prépublication, un article ou un livre, j'écris à l'auteur (ou, quand il se trouve que c'est moi l'auteur, je rédige une note en vue d'une nouvelle édition). Je ne suis pas sûr que cette habitude m'ait rendu extrêmement populaire chez les conférenciers et les auteurs...

Accessibilité et importance des mathématiques

M. R. ET C. S. : Les mathématiques font preuve d'un foisonnement de sujets et de disciplines qui rend difficile la maîtrise d'une branche, fût-elle mineure. D'autre part, vous en avez fait la démonstration lors de votre conférence d'aujourd'hui, il est essentiel que les différents secteurs s'entre-fertilisent. Comment les jeunes mathématiciens, tout particulièrement, vont-ils se débrouiller dans cette explosion des connaissances et vont-ils pouvoir trouver des choses nouvelles ?

J.-P. S. : Oui, on m'a déjà posé la question lors de l'interview que j'ai donnée à Singapour pour Intelligencer. Ma réponse est que, lorsque l'on est véritablement intéressé par un problème, on ne trouve que très peu de chose dans la littérature existante qui soit vraiment utile. On doit se débrouiller seul. Quant à l'impression d'une explosion des mathématiques, je suis certain qu' Abel l'avait déjà lorsqu'il a commencé à travailler, après Euler, Lagrange, Legendre et Gauss. Mais il a trouvé de nouvelles questions et de nouvelles solutions. Cela n'a pas changé depuis. Il n'y a pas de souci à se faire.

3. Cette interview a été donnée quelques heures après un exposé fait par Jean-Pierre Serre à l'université d'Oslo.

M. R. et C. S. : Un autre problème actuel est que de nombreux jeunes talents (et aussi les faiseurs d'opinion publique) ne trouvent pas les mathématiques très excitantes.

J.-P. S. : En effet. C'est triste à dire, mais il y a de nombreux exemples de cela. Il y a quelques années, on a rapporté les propos d'un ministre français de la recherche affirmant que les mathématiciens ne servent plus à rien, maintenant qu'il suffit d'appuyer sur une touche d'ordinateur. Sans doute croyait-il que les touches et les programmes d'ordinateurs poussent sur les arbres... Pourtant, j'ai bon espoir que les jeunes continuent de découvrir les mathématiques et d'être attirés par elles. Un des aspects heureux de cette cérémonie Abel est la compétition Abel, destinée aux lycéens norvégiens.

Sports et littérature

M. R. et C. S. : Parlez-nous un peu de ce que vous aimez en dehors des mathématiques.

J.-P. S. : Le sport ! Plus précisément : le ski, le ping-pong et la varappe. Je n'ai jamais réellement excellé dans aucun d'entre eux. Par exemple, quand je skiais, je ne savais pas slalomer, alors je préférais aller tout schuss plutôt que d'essayer de tourner. Mais j'y prenais beaucoup de plaisir. Par un effet de l'âge, mes genoux ne fonctionnent plus (l'un d'entre eux a même été remplacé par une prothèse métallo-plastique), et j'ai dû arrêter le sport. La seule sorte de varappe que je fasse à présent, je la fais par procuration : je vais avec des amis à Fontainebleau et je les encourage à escalader des rochers que j'aurais grimpés moi-même il y a dix ans. Ça reste plaisant : mais ça l'est moins qu'une escalade réelle.

Et puis, il y a les films (Pulp Fiction est l'un de mes préférés, et j'aime beaucoup aussi Altman, Truffaut, Rohmer, les frères Coen,...), les échecs, les livres (de toute espèce, de Giono à Böll et Kawabata en passant par les contes de fées et les Harry Potter).

M. R. et C. S. : Monsieur le Professeur, au nom des Sociétés danoise et norvégienne de mathématiques, merci d'avoir accepté cette interview.