Chapitre V

Voyage autour du monde

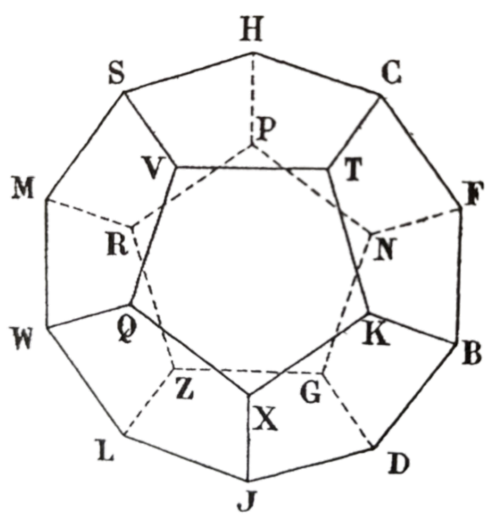
André Sainte-Laguë [1]

Au large on voit mieux le monde,
Et sa tête énorme et ronde
Qui se balance et qui gronde...

A. de Vigny. (*La Frégate "la Sérieuse".*)

Le tour du monde. Régis est un fervent de l'aviation. Ancien marin, il préfère maintenant l'avion qui va plus vite, et a déjà fait je ne sais combien de fois le tour du monde. Il a chez lui un globe terrestre en bois de dimensions respectables et, entre deux voyages, il aime planter dans ce globe des clous dorés indiquant les villes qui lui ont servi d'étapes dans ses derniers voyages. Il attache une ficelle à la ville qui a été son point de départ qu'il enroule ensuite successivement sur toutes les villes traversées, dans l'ordre où elles l'ont été. Passionné en outre par les mathématiques, il s'est fort intéressé, dès qu'il en a connu l'existence, au jeu inventé par le savant anglais Hamilton.

Quoique la terre soit ronde, nous supposerons ici qu'elle soit taillée à facettes et ait la forme de ce que les géomètres appellent, dans leur jargon tiré du grec, un dodécaèdre régulier. Ce mot désigne un polyèdre régulier à 12 facettes et 20 sommets, qui, nous l'espérons, sera assez facile à imaginer par la seule considération du dessin ci-contre il représente en traits pleins les six facettes visibles et en pointillé celles qui sont cachées. Elles sont toutes des pentagones réguliers, identiques entre eux.



Avant de dire de façon précise ce qu'est le problème d'Hamilton, indiquons que Régis s'était proposé, en vue d'un beau voyage à faire, de choisir 20 villes à la surface de la terre. Ayant remarqué en

1. André Sainte-Laguë (1882-1950).

outre qu'il y avait 20 consonnes dans l'alphabet, il avait choisi ses villes de façon que chacune ait un nom commençant par l'une de ces vingt consonnes. Il s'était ainsi arrêté à la liste suivante :

Bakou, Changhai, Djibouti, Foutcheou, Goa, Honolulu,
Jérusalem, Kazan, Libreville, Mexico, Nouméa,
Papeete, Québec, Rio de Janeiro, San-Francisco,
Tomsk, Vladivostok, Washington, Xérès, Zanzibar.

À ces 20 villes correspondaient les 20 initiales mises sur le dessin précédent et nous admettrons que les seuls chemins que nous puissions prendre pour aller de l'une à l'autre correspondent précisément à l'une des arêtes du dodécaèdre.

Ces villes ne sont évidemment pas situées exactement aux sommets d'un dodécaèdre régulier, mais Régis s'était déclaré satisfait par ce choix et nous n'avons pas de raison d'être plus difficile que lui.

Le jeu d'Hamilton. Notre ami s'est fait fabriquer un beau dodécaèdre en bois avec, pour le tenir, un manche planté au milieu d'une facette. Il s'est alors repris à songer au problème d'Hamilton, qui est exactement le suivant :

Il faut faire "le tour du monde" en utilisant les routes indiquées, mais un tour du monde dans lequel on passe une fois, et une seule, par chacune des 20 villes avant de revenir au point de départ. Il y a une condition à respecter en outre : les cinq premières villes du parcours sont données.

Si par exemple on donne les cinq villes K, T, C, F, B (traduisons : Kazan, Tomsk, Changhai, Foutcheou, Bakou), peut-on répondre au problème de Hamilton ?

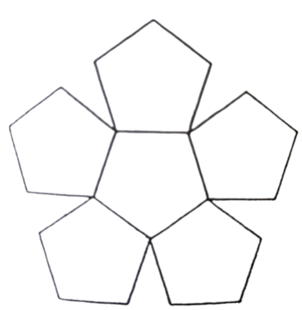
Oui, nous dit Régis, et avec sa ficelle enroulée sur les clous dorés marquant les 20 villes, il nous prie de noter le tour du monde que voici :

K T C F B D G N P H S V Q W M R Z L J X,

ou encore

K T C F B D J L W M R Z G N P H S V Q X.

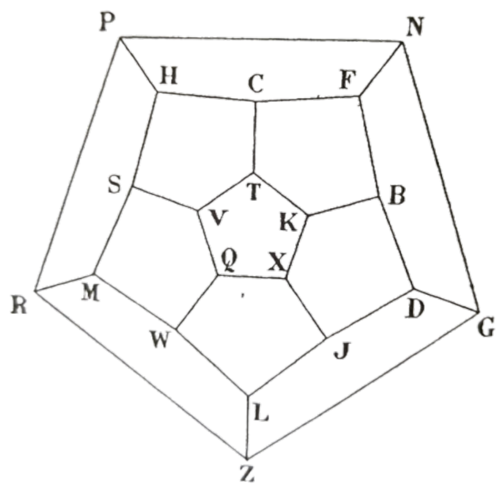
Donnons-lui encore le point de départ suivant : KTCHP : il vous dictera quatre solutions que vous pourrez sans doute retrouver seul, fût-ce en y mettant peut-être un peu plus de temps que lui.



On peut d'ailleurs, pour se livrer à de telles recherches et à défaut de dodécaèdre en bois, en faire un en carton, mais si l'on n'y met pas à l'intérieur un noyau sphérique en bois, il sera difficile de le faire assez solide pour qu'on puisse y planter des clous. Pour construire un tel dodécaèdre, il suffit de découper, dans un carton assez épais, deux fois de suite la figure ci-dessus formée de 5 pentagones réguliers qui sont disposés en étoile autour d'un pentagone central. Naturellement il faut prévoir pour le collage ou la fixation des dispositifs particuliers non représentés : languettes, agrafes, coutures, etc.

Les 5 pentagones en étoile étant relevés autour du fond pentagonal forment une corbeille à cinq panneaux latéraux ayant vers le haut 5 pointes. Si l'on prend une deuxième corbeille identique à la première mais retournée, il suffit de les emboîter de manière que les dents de l'une viennent dans les creux de l'autre, et inversement, pour avoir un dodécaèdre parfait.

L'icosien. On peut à la rigueur se dispenser de faire un tel dodécaèdre et il n'y a qu'à prendre une planchette sur laquelle on a dessiné la figure ci-contre ou toute autre



analogue, à l'imitation d'un jeu anglais appelé jeu icosien et qui se prête fort bien aux recherches du problème d'Hamilton. Avec un peu d'imagination on y reconnaît la forme du dodécaèdre précédent. Supposons en effet que notre dodécaèdre soit formé d'une feuille de caoutchouc vide à l'intérieur et que la face du fond ZRPNG ait été supprimée et réduite à son contour. Mettons la main dans le trou ainsi formé et agrandissons-le considérablement de façon à former avec tout notre dodécaèdre creux en caoutchouc une grande plaque plane pentagonale qui est justement celle que nous venons de représenter. On voit qu'à tout voyage autour du monde représenté sur le dodécaèdre en bois de Régis correspond un voyage exactement identique sur l'icosien, qu'il suffit à cet effet de munir de clous en chacun des sommets représentant les 20 villes.

À vrai dire, l'icosien est un peu moins commode que le dodécaèdre, car, si l'on a en mains le polyèdre régulier lui-même, on se rend beaucoup mieux compte des nombreuses symétries qu'il a et on voit mieux ce fait qu'au fond une face est équivalente à une autre, tandis qu'avec l'icosien, il faut une plus grande habitude pour utiliser de telles remarques.

Dans le jeu anglais, tel qu'il a été réalisé, chaque sommet est marqué par un trou et on a 20 pions numérotés comportant chacun une petite cheville en bois ou en ivoire. On les enfonce, en suivant l'ordre indiqué par les numéros, dans les trous de façon à jalonner le voyage particulier que l'on veut faire.

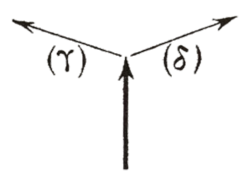
Un dernier mot au sujet de l'icosien. Peut-être voudriez-vous savoir d'où vient ce mot ? Il vient de "eikosi" [2], qui en grec veut dire vingt. Nous verrons d'ailleurs plus loin qu'il y a un polyèdre appelé icosaèdre qui a une parenté extrêmement étroite avec le dodécaèdre.

Et, maintenant, avant d'aborder la théorie, d'ailleurs aussi simple qu'ingénieuse, qui préside à ces beaux voyages autour du monde, je vous souhaite, si vous avez construit un dodécaèdre ou à défaut un icosien, de faire de nombreuses recherches avec l'un ou l'autre. Je suis certain qu'elles vous intéresseront et que vous ne regretterez pas le temps passé à construire le jeu.

Les diverses opérations. Le mathématicien anglais Hamilton a donné une méthode élégante pour traiter son problème de voyage autour du monde, méthode entièrement différente de celle de Hermary dont nous parlerons ensuite.

Considérons diverses "opérations" qui permettent de passer d'une arête du dodécaèdre à une autre. Ces arêtes sont considérées comme ayant un sens ; c'est ce que les mathématiciens appellent un vecteur. Chacune des opérations que nous allons considérer permet ainsi de passer de l'un de ces vecteurs à un autre.

Nous supposerons que le voyageur est chaque fois à la pointe terminale du vecteur que nous venons de définir.



Sur les dessins on a marqué en traits forts l'arête dans sa position initiale. Nous désignerons chacune des diverses "opérations" possibles par une lettre grecque. C'est ainsi qu'un voyageur debout sur le dodécaèdre et qui vient de parcourir une arête peut ou bien tourner à sa droite, ce qui substituera à l'arête déjà parcourue une autre arête et ce sera l'opération δ, ou bien tourner à sa gauche et ce sera l'opération γ.

On peut remarquer qu'après 5 opérations δ, ce que l'on peut écrire $\delta\delta\delta\delta\delta$ ou, en abrégé δ^5, on revient au point de départ, ce que nous écrirons schématiquement $\delta^5 = 1$. De même, $\gamma^5 = 1$. On remarquera aussi que les diverses arêtes qui partent des sommets de la face pentagonale autour de laquelle est en train de tourner le voyageur peuvent être atteintes chacune par deux chemins différents à partir du moment où on a quitté l'arête parcourue en premier lieu. On en déduira de

2. εἰκοσι

nouvelles relations telles que

$$\delta\delta = \gamma\delta\delta\delta\gamma, \quad \delta\gamma\delta = \gamma\delta\delta\gamma, \quad \delta\gamma\gamma\delta = \gamma\delta\gamma$$

ou

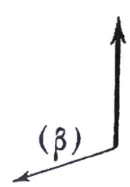
$$\delta^2 = \gamma\delta^3\gamma, \quad \delta\gamma\delta = \gamma\delta^2\gamma, \quad \delta\gamma^2\delta = \gamma\delta\gamma,$$

les deux dernières étant équivalentes.

En échangeant le rôle des lettres γ et δ on aura aussi $\gamma^2 = \delta\gamma^3\delta$. On en peut déduire bien d'autres relations ; mais toutes résultent de celles qui précèdent.

Hamilton définit d'autres opérations, que nous n'aurons pas à utiliser et pour lesquelles nous nous bornerons, par suite, à des indications très sommaires. Désignons par α l'opération qui consiste à renverser ou, si l'on préfère, à retourner bout pour bout une arête. Si donc un voyageur revient sur ses pas, on aura za, et comme, après deux retournements, l'arête considérée est revenue en place avec son sens primitif. on écrira $\alpha^2 = 1$.

β sera l'opération qui fait tourner autour d'un sommet une des trois arêtes qui y aboutissaient, dans un sens fixé à l'avance, de manière à la faire coïncider avec une autre, par exemple avec l'arête parallèle à celle que prend le voyageur dans l'opération δ. En répétant trois fois cette opération, on la ramène en place, ce que l'on peut écrire $\beta^3 = I$.



On verra facilement que l'on a $\delta = \alpha\beta$, ce qui veut dire qu'on commence par changer le sens du parcours sur l'arête qu'on vient de suivre et qu'en faisant tourner cette arête, comme il a été dit lorsqu'on a défini l'opération β, on trouve au total l'opération δ. De même on verra que l'on a $\gamma = \alpha\beta^2$. Il faut bien se garder d'ailleurs de confondre $\alpha\beta$ et $\beta\alpha$ car s'il était permis d'intervertir ces lettres dans les égalités symboliques, on aurait

$$\delta^6 = (\alpha\beta)^6 = \alpha\beta.\alpha\beta.\alpha\beta.\alpha\beta.\alpha\beta.\alpha\beta = \alpha\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha\beta\beta\beta\beta\beta\beta = \alpha^6\beta^6 = \alpha^2.\alpha^2.\alpha^2.\beta^3.\beta^3 = 1.1.1.1.1 = 1,$$

et comme aussi on a symboliquement $\delta^6 = \delta^5\delta = \delta$, on en conclurait que $\delta = 1$, ce qui est absurde.

Vous pourrez encore établir les deux relations $\delta = \gamma\alpha\gamma$ et $\gamma = \delta\alpha\delta$, en employant des méthodes analogues aux précédentes.

Enfin une dernière opération, que nous désignerons par ω, est donnée indifféremment par $\omega = \delta\gamma\delta\gamma\delta = \gamma\delta\gamma\delta\gamma$.

Dans l'un ou l'autre des cas on obtient l'arête opposée à celle qui a servi de point de départ, c'est-à-dire celle qui en résulte par symétrie par rapport au centre du polyèdre. On en conclut que $\omega^2 = 1$, ce qui peut se vérifier simplement.

Deux routes fermées. Revenons au problème de Hamilton et appelons route fermée tout voyage autour du monde qui, passant par les vingt villes (une fois et une seule par chacune), revient au point de départ, et route ouverte toute route qui passe par les vingt villes (une fois et une seule par chaque ville) sans revenir au point de départ.

Hamilton a obtenu des routes fermées à l'aide du seul calcul symbolique qui précède et des opérations δ et γ qui, rappelons-le, indiquent simplement que le voyageur prend la route à droite ou à gauche.

Il a pour cela formé une relation de plus en plus compliquée conduisant toujours à l'unité comme résultat final et comprenant vingt opérations intermédiaires, puisqu'il y a vingt arêtes à parcourir. Voici son calcul :

$$\begin{aligned} 1 = \delta^5 = \delta^2.\delta^3 = (\gamma\delta^3\gamma)\delta^3 \quad &= (\gamma\delta^3)^2 = [\gamma(\gamma\delta^3\gamma)\delta]^2 \\ &= [\gamma^2\delta^3\gamma\delta]^2 = [\gamma^2(\gamma\delta^3\gamma)\delta\gamma\delta]^2 = [\gamma^3\delta^3\gamma\delta\gamma\delta]^2, \end{aligned}$$

qui, développé, contient bien vingt opérations et donne la route fermée suivante répondant à la question :

$$\gamma\gamma\gamma\delta\delta\delta\gamma\delta\gamma\delta\gamma\gamma\gamma\delta\delta\delta\gamma\delta\gamma\delta.$$

La seconde route fermée d'Hamilton s'obtient en intervertissant partout γ et δ.

Solution d'Hamilton. Si vous avez la paresse de suivre tous les raisonnements qui précèdent, il vous suffira de savoir ceci, qu'on peut constater sur le dodécaèdre ou l'icosien : c'est que le voyageur qui a pris en note sur un bout de papier la liste précédente sait à chaque instant ce qu'il doit faire : tourner trois fois à droite, trois fois à gauche, une fois à droite, etc., moyennant quoi il est bien passé dans les 20 villes et est revenu au point de départ.

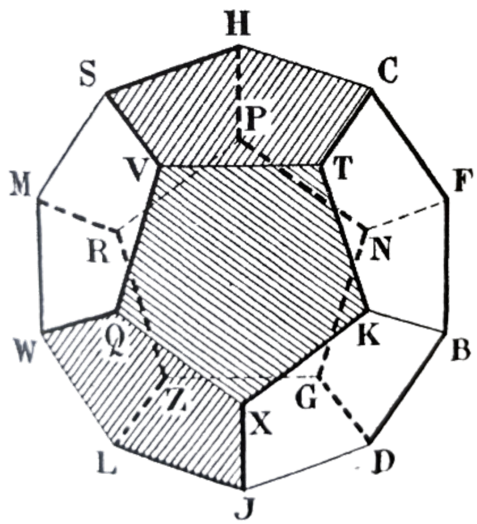
À cela peut-être objecterez-vous : "je vois bien une route fermée que l'on peut, si l'on veut, peindre en rouge sur le dodécaèdre ; mais comment avec cinq villes données pourra-t-on trouver la route à suivre, et cette route existe-t-elle toujours ?".

Pour répondre à cette objection il faut d'abord remarquer que la route précédente ne suppose comme point de départ aucune des vingt villes plus particulièrement choisie qu'une autre. Il y a donc 20 points de départ quelconques autour de chacun desquels rayonnent trois routes, ce qui fait 60 départs possibles. Pour chacun d'eux le voyageur qui veut faire le tour du monde n'a qu'à répéter sa leçon : tourner trois fois à droite, trois fois à gauche, une fois à droite, etc. Une même route peut être commencée en dix points différents, ce qui donne 600 voyages possibles.

C'est ainsi que la route précédente donne, par permutation circulaire, $\gamma\gamma\delta\delta\delta\gamma\delta\gamma\delta\gamma\gamma\gamma\delta\delta\delta\gamma\delta\gamma\delta\gamma$, ou encore $\gamma\delta\delta\delta\gamma\delta\gamma\delta\gamma\gamma\gamma\delta\delta\delta\gamma\delta\gamma\delta\gamma\gamma$, etc.

Si maintenant on veut partir de 5 villes données, il n'y a qu'à regarder comment doit s'effectuer le départ et trouver dans les routes ci-dessus et celles qui s'en déduisent par des permutations circulaires s'il y a un début correspondant à celui dont on a besoin. On verra ainsi que ceci a toujours lieu et par suite que le problème d'Hamilton est résolu dans tous les cas. On peut enfin se demander s'il y a d'autres routes possibles que celles d'Hamilton. Il n'y en pas d'autres. On le verra mieux en analysant la méthode suivante.

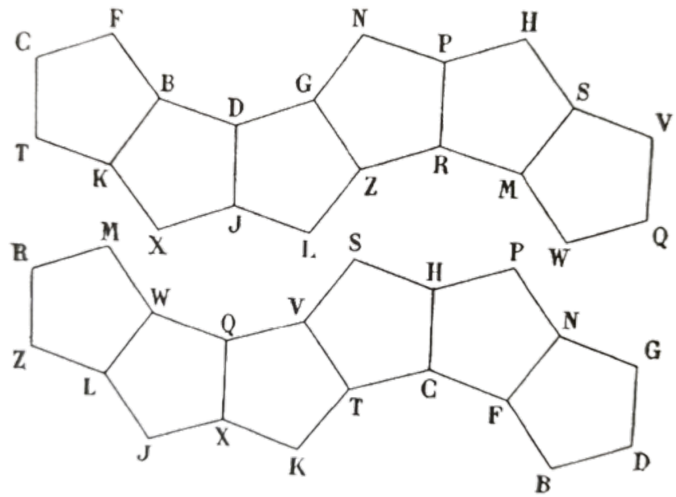
Les demi-dodécaèdres.



Entièrement différente et encore plus ingénieuse au fond que la solution d'Hamilton est celle de Hermary, qui, ayant un dodécaèdre en carton portant tracée en rouge une route fermée quelconque, propose de le fendre tout le long de cette route de façon à en faire deux demi-dodécaèdres. C'est ainsi que nous avons représenté ci-contre en noir et blanc ces deux demi-dodécaèdres, tout au moins pour la partie visible, dans le cas de la route

K T C F B D G N P H S V Q W M R Z L J X.

Une facette pentagonale d'un demi-dodécaèdre ne peut toucher au plus que deux autres facettes pentagonales et par des arêtes non consécutives, sans quoi il y aurait une ville isolée qui ne serait pas sur la route. Donc en passant d'une facette à la voisine, on peut étaler sur un plan toutes les facettes d'un demi-dodécaèdre comme par exemple dans la figure ci-dessous, qui donne les développements



des deux demi-dodécaèdres fournis par la route déjà indiquée :

K T C F B D G N P H S V Q W M R Z L J X.

D'autre part, à chaque fois qu'on rajoute à une telle chaîne de pentagone un nouveau pentagone on introduit trois sommets nouveaux. On en conclut qu'il y a forcément six pentagones dans chaque demi-dodécaèdre, comme c'est bien le cas sur la figure.

Remarquons enfin que tout sommet fait forcément partie de deux facettes pentagonales sur l'un des demi-dodécaèdres et d'une seule sur l'autre. Les deux extrémités d'une chaîne de six pentagones ont forcément deux groupes de trois sommets consécutifs n'appartenant qu'à une seule facette pentagonale, les deux demi-dodecaèdres étalés devant pouvoir se remboîter.

De ces diverses remarques résulte facilement le fait que les deux demi-dodécaèdres ont forcément la forme indiquée dans la figure précédente, car les formes que l'on aurait par symétrie par rapport à un miroir vertical n'en diffèrent pas au fond. On voit donc qu'on peut dire en quelque sorte que la route fermée qui passe par les vingt villes a toujours la même forme.

Si l'on veut, pour répondre au problème d'Hamilton, tracer une route débutant par 5 villes données, il suffira de tracer le début de route et de voir si l'on peut le trouver en un point du contour tracé plus haut. C'est au fond, sous un autre aspect, la méthode déjà donnée pour déduire d'une route d'Hamilton toutes les autres.

Nous vous laissons, ami lecteur, le soin de voir ce qui se passe suivant que l'on impose au voyageur qui veut faire le tour du monde 1, 2, 3, 4, 5, 6, etc. villes de début de son voyage et de vérifier ainsi qu'à partir de 6 villes imposées il n'y a pas toujours de voyage autour du monde possible dans les conditions précisées par Hamilton. Par exemple, le cas qui, avec les notations données plus haut, débute par $\gamma\delta\delta\gamma$ est impossible.

Routes ouvertes. À côté des routes fermées, on peut envisager les routes ouvertes : il faut, en se donnant par exemple les trois premières villes et la ville finale, tracer une route qui passe une fois et une seule par toutes les villes.

On voit d'abord que les trois villes initiales ont toujours la même position respective et que l'on peut, si l'on veut, prendre Vladivostock, Tomsk, Kazan : V, T, K. Quant à la ville finale, elle peut être prise de 17 façons différentes, car on a à chaque fois un nouveau problème. À vrai dire, le cas où elle est Québec ou San-Francisco, Q ou S, est sans intérêt, car, l'arête VQ ou VS n'ayant certainement pas été suivie, en rajoutant cette arête on aura une route fermée, ce qui est un cas connu. Il reste donc au fond 15 cas à examiner.

Nous vous laissons, cher lecteur, le soin de les examiner, et nous nous bornerons à vous donner les résultats que vous devrez trouver suivant le choix de la ville finale :

Bakou :	0	solution,	Noumea :	0	solution,
Changai :	0	solution,	Papeete :	4	solutions,
Djibouti :	2	solutions,	Quebec :	4	solutions,
Foutcheou :	2	solutions,	Rio de Janeiro :	2	solution,
Goa :	1	solution,	San Francisco :	6	solutions,
Honolulu :	0	solution,	Washington :	0	solution,
Jrusalem :	2	solutions,	Xrs :	0	solution,
Libreville :	2	solutions,	Zanzibar :	2	solutions.
Mexico :	0	solution,			

On pourrait encore ne pas se donner les trois premières villes mais seulement la première et la dernière et chercher comment l'on peut aller de l'une à l'autre.

Autres questions. Parmi les questions diverses que l'on peut se poser, tant avec le dodécaèdre en bois de Régis qu'avec l'icosien, citons encore les deux suivantes, que nous ne ferons que mentionner :

On se donne un certain nombre de villes de départ ; il faut qu'après avoir parcouru toutes les villes sauf quelques-unes, dont le nombre mais non les emplacements sont imposés d'avance, on ne puisse plus avancer. Ou bien encore, ayant fixé à l'avance une ville interdite, on pose des questions analogues à celles qui précèdent, mais le voyageur ne peut plus alors passer que par les 19 villes non interdites.

On pourrait aussi remplacer l'icosien par un réseau quelconque dans lequel tous les carrefours sont triangulaires, de façon qu'un voyage quelconque répondant à des conditions fixées d'avance soit toujours caractérisé par une certaine succession de lettres, δ ou γ, résumant les conseils à donner au voyageur qui veut faire le tour du monde : prenez à droite, puis encore à droite, puis à gauche...

Vous voyez qu'il est facile de varier à l'infini les problèmes que l'on pourrait se poser ainsi.

Avec quelques allumettes. Reprenons pour la dernière fois la planchette sur laquelle est dessiné notre icosien et dix allumettes, dont cinq seront blanches et cinq rouges. Peut-on les poser sur les arêtes de l'icosien de façon que les arêtes blanches ainsi marquées soient dix tronçons de route allant de ville à ville et n'ayant deux à deux aucune extrémité commune et qu'il en soit de même des arêtes marquées en rouge, les tronçons de route correspondants n'ayant pas non plus deux à deux d'extrémité commune ?

Voilà un petit problème en apparence compliqué ; mais avec un peu de réflexion vous vous ramènerez à un problème analogue à celui d'Hamilton et verrez ainsi qu'il n'y a nulle difficulté à résoudre la question posée.

Solutions

Le jeu d'Hamilton. Voici les quatre voyages possibles utilisant le début KTCHP donné :

K T C H P N F B D G Z R M S V Q W L J X,
K T C H P R M S V Q W L Z G N F B D J X,
K T C H P R Z G N F B D J L W M S V Q X,
K T C H P R Z L W M S V Q X J D G N F B.

Il n'y en a pas d'autres.

Les diverses opérations. On peut en effet écrire successivement, puisque $\alpha^2 = 1$ et $\beta^3 = 1$:

$$\gamma = \alpha\beta^2 = \alpha\beta\alpha\alpha\beta = \delta\alpha\delta$$

et aussi :

$$\delta = \alpha\beta = \alpha\beta\beta\beta\beta = \alpha\beta\beta\alpha\alpha\beta\beta = \gamma\alpha\gamma.$$

On a aussi, en utilisant des relations déjà établies,

$$\omega = \delta\gamma\delta\gamma\delta = \gamma\delta^2\gamma.\gamma\delta = \gamma\delta.\delta\gamma^2\delta = \gamma\delta.\gamma\delta\gamma,$$

qui montre à l'aide du calcul symbolique que les deux valeurs de ω sont bien les mêmes. De plus :

$$\omega^2 = \delta\gamma\delta\gamma\delta.\delta\gamma\delta\gamma\delta = \delta\gamma\delta.\delta\gamma\delta.\delta\gamma\delta = .\delta\gamma\delta.\delta\delta\gamma\delta = \delta^2.\delta^2.\delta = \delta^5 = 1,$$

relation qui peut donc ainsi s'établir par un calcul symbolique.

Solution d'Hamilton. Les divers débuts possibles pour 5 villes données, c'est-à-dire pour 4 arêtes à parcourir et 3 traversées de carrefours à faire, sont ceux qui résultent de toutes les dispositions possibles des lettres α et γ. On peut d'ailleurs supposer, ce qui ne diminue en rien la généralité de la question, que l'on commence par γ, ce qui donne alors une liste de quatre cas seulement :

$$\gamma\gamma\gamma, \quad \gamma\gamma\delta, \quad \gamma\delta\gamma, \quad \gamma\delta\delta.$$

Or, en consultant la route fermée proposée par Hamilton et celle qu'on en déduit par échange de γ et δ, ce qui donne au fond la même route parcourue en sens inverse, on verra que les cas $\gamma\gamma\gamma, \gamma\gamma\delta$ et $\gamma\delta\delta$ donnent naissance à deux routes d'Hamilton distinctes, tandis que le cas $\gamma\delta\gamma$ donne naissance à quatre routes distinctes.

Routes ouvertes. Voici les chemins correspondant aux diverses routes ouvertes à l'exception de ceux qui aboutissent à San-Francisco (6 routes, correspondant aux six points de départ possibles : $\delta\gamma\delta\delta\delta\gamma, \delta\gamma\delta\gamma\delta\delta, \delta\gamma\delta\gamma\delta\gamma, \delta\gamma\delta\gamma\gamma\gamma, \delta\gamma\gamma\gamma\delta\delta, \delta\gamma\gamma\gamma\delta\gamma$), ou Québec (4 routes, correspondant aux quatre points de départ possibles : $\delta\delta\delta\gamma\delta\gamma, \delta\delta\delta\gamma\gamma\gamma, \delta\delta\gamma\delta\gamma\delta, \delta\delta\gamma\gamma\delta\gamma$), qui sont des portions de routes fermées déjà connues.

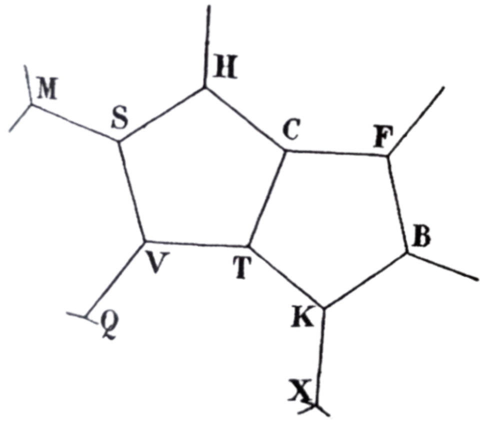
Nous ne donnerons pas le détail des tâtonnements qui conduisent à ces résultats et nous supprimerons dans chaque route les trois premières villes VTK :

Djibouti :	B F C H S M W Q X J L Z R P N G D
Djibouti :	B F C H S M R P N G Z L W Q X J D
Foutcheou :	B D J X Q W L Z G N P R M S H C F
Foutcheou :	B D G N P R Z L J X Q W M S H C F
Goa :	X Q W M S H C F B D J L Z R P N G
Jerusalem :	X Q W L Z G N P R M S H C F B D J
Jerusalem :	X Q W M S H C F B D G N P R Z L J
Libreville :	B D G Z R P N F C H S M W Q X J L
Libreville :	B F C H S M W Q X J D G N P R Z L
Papeete :	X Q W L J D B F C H S M R Z G N P
Papeete :	B D J X Q W L Z G N F C H S M R P
Papeete :	B D G N F C H S M W Q X J L Z R P
Papeete :	B F C H S M R Z L W Q X J D G N P
Rio de Janeiro :	X Q W M S H C F B D J L Z G N P R
Rio de Janeiro :	B D G Z L J X Q W M S H C F N P R
Zanzibar :	X Q W L J D B F C H S M R P N G Z
Zanzibar :	B F C H S M R P N G D J X Q W L Z

Si l'on se donne la première ville et la dernière et si l'on veut chercher comment on peut aller de l'une à l'autre, on voit que, si la première est Vladivostok, il y a seulement 5 cas à considérer, tous les autres se ramenant visiblement à ceux-là. Chacun correspond à l'une des villes terminales d'initiales : T (accessible par le plus court chemin avec une seule arête) ; K (accessible avec deux arêtes) ; B (accessible avec trois arêtes par $\gamma\delta$, cas auquel on ramène F accessible par $\delta\gamma$) ; D (accessible avec quatre arêtes par $\gamma\delta\gamma$, cas auquel on ramènerait $\delta\gamma\delta$) ; G (accessible avec cinq arêtes par $\gamma\delta\gamma\delta$ et diamétralement opposé au point de départ ; on y ramènerait le cas de $\delta\gamma\delta\gamma$).

De V à T il y a 20 routes, qui sont les 20 routes fermées débutant par VT et prises en sens inverse.

Si l'on veut aller de V à K par une route utilisant toutes les villes, ou bien on part par VTC, pour finir en K, ou bien, en prenant la route à l'envers, on part de KTC pour finir en V ; chaque cas fournit autant de routes que si, partant de VTK, on veut finir en C, ce qui, comme on l'a vu, ne donne rien ; donc il n'y a aucune possibilité d'aller, en passant par les 18 autres villes et par une route ouverte, d'une ville à une autre lorsque, n'étant pas réunies par une arête, elles font partie d'une même facette pentagonale.



De V à B, toujours en se reportant aux résultats antérieurs, on voit que si l'on part par VTK, on ne peut arriver en B ; mais si l'on part par VTC, on arrive de deux façons différentes en B par XKB. Reste le cas d'une route qui, allant de V en B, n'utiliserait TK qu'au milieu de la route par un chemin tel que CTKX. On trouvera 10 routes, quatre partant par VSH, deux par VSM, deux par VQW, et enfin deux par VQX.

De V à D, on remarquera que par rotation du dodécaèdre de 120° autour du diamètre VG, les trois chemins, VT, VS, VQ se substituent les uns aux autres, tandis que par rotation du dodécaèdre, D prend les trois positions D, N, Z. On peut donc supposer que l'on part par VT et que l'on se propose d'aboutir soit en D, soit en N, soit en Z. Les deux chemins TK, TC que l'on peut suivre encore à partir de la ville T étant symétriques par rapport au plan diamétral contenant VT, on voit que les routes cherchées sont aussi nombreuses que celles qui, commençant par VTK, aboutissent respectivement en D, N ; N, D ; Z, Z, soit en tout

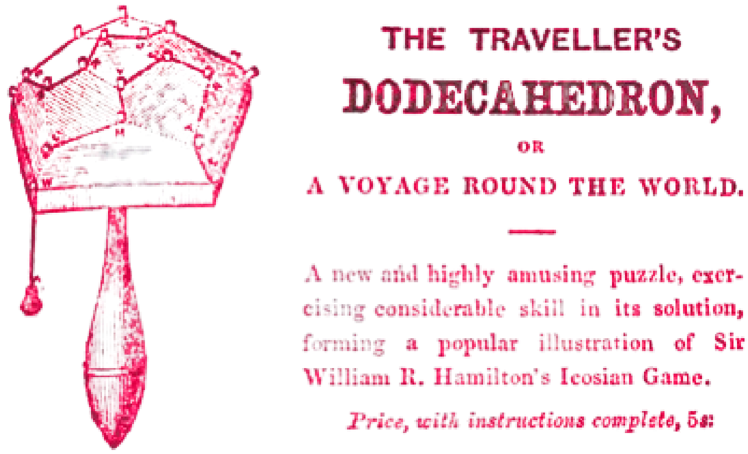
$$2 + 0 + 0 + 2 + 2 + 2 = 8.$$

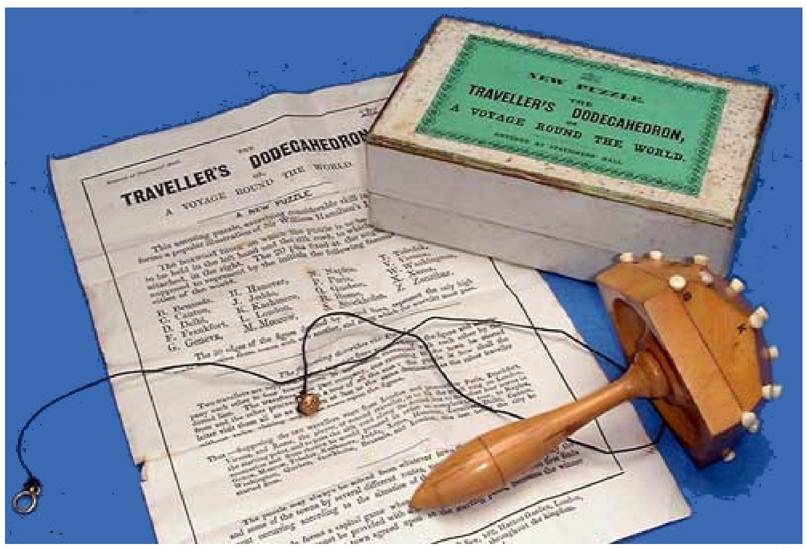
Enfin, de V à G, qui sont diamétralement opposés, on a trouvé un seul chemin commençant par VTK ; on en déduit, par un raisonnement analogue à celui que nous venons de faire, qu'il y en a en tout 6.

Avec quelques allumettes. On voit immédiatement que les vingt villes servent chacune une fois et une seule d'extrémité à une allumette, soit blanche, soit rouge, et que les vingt arêtes du dodécaèdre non marquées par des allumettes sont forcément en prolongement les unes des autres et forment une route d'Hamilton, et inversement. Il ne peut y avoir d'autre solution, comme on s'en assurera. Sous une autre forme, les arêtes non marquées forment les contours de deux demi-dodécaèdres de Hermary, les cinq allumettes blanches marquant les arêtes de l'un des demi-dodécaèdres qui ne forment pas le contour extérieur. Il en est de même pour les cinq rouges [3].

3. *Note de la transcriptrice : on pourra étudier avec profit les références suivantes* :

- les textes de référence de Hamilton :
  https://denisevellachemla.eu/Hamilton-1.pdf,
  https://denisevellachemla.eu/Hamilton-2.pdf,
  https://denisevellachemla.eu/Hamilton-3.pdf ;
- *l'icosagonal d'Edouard Lucas* :
  https://denisevellachemla.eu/Lucas-icosagonal.pdf ;





- le jeu de Hamilton dans Les récréations arithmétiques de Lucas, vol. 2 https://denisevellachemla.eu/Lucas-icosi.pdf.