Sur les "formules explicites" de la théorie des nombres premiers
André Weil
1952

La théorie analytique des nombres connaît quelques formules qui relient des sommes étendues à tous les zéros non triviaux de la fonction zêta à des sommes étendues aux puissances de nombres premiers[1]. Il n'est pas difficile d'étendre ces formules, dites "explicites", à des cas beaucoup plus généraux, et ce n'est là à vrai dire qu'un simple exercice. Si je me permets de l'offrir en hommage à Marcel Riesz, c'est que d'une part il met en valeur le rôle que joue dans la question une transformée de Fourier qui n'est pas une fonction mais une distribution au sens de L. Schwartz, et que d'autre part la structure formelle des formules ainsi obtenues semble présenter quelque intérêt, de sorte que par là elles méritent d'être mises à la disposition des chercheurs.

Rappelons d'abord la définition des fonctions L de Hecke "mit Grössencharakteren"[2]. Soit k un corps de nombres algébriques, de degré d sur le corps des rationnels ; si v est une valuation de k, on désignera par k_v, le corps déduit de k par complétion par rapport à v, et par k_v^* le groupe multiplicatif des éléments non nuls de k_v. Si v est une valuation diserète, elle correspond à un idéal premier $\mathfrak{p}$ de k, et on se donnera le droit d'écrire $\mathfrak{p}$ au lien de v, donc $k_\mathfrak{p}, k_\mathfrak{p}^*$, au lieu de k_v, k_v^* ; on désignera en ce cas par $U_\mathfrak{p}$ le groupe (compact) des unités du corps $\mathfrak{p}$-adique $k_v = k_\mathfrak{p}$. On désignera par $v_\rho, (1 \leq \rho \leq r_1))$ les valuations archimédiennes réelles de k, par $v_{\imath, r_1+1 \leq \imath \leq r_1+r_2})$ les valuations archimédiennes complexes de k, et par k_λ le complété de k par rapport à v_λ $(1 \leq \lambda \leq r_1+r_2)$; k_ρ est donc pour tout ρ le corps des réels, et $k_\imath$ est pour tout $\imath$ le corps des complexes ; on posera $\eta_\rho = 1, \eta_{\imath=2}$.

On sait qu'on entend par un idèle de k un élément $a = (a_v)$ du groupe $\prod_c k_c^*$ tel que $a_\mathfrak{p} \in U_\mathfrak{p}$ pour presque tout $\mathfrak{p}$ (c'est-à-dire pour tout $\mathfrak{p}$ à un nombre fini d'exceptions près) ; le groupe des idèles, topologisé de la manière "naturelle"[3], sera désigné par I_k ; P_k étant le groupe des idèles principaux, soit $C_k = I_k/P_k$. Soit χ un caractère de C_k, ou, ce qui revient au même, un caractère de I_k, prenant la valeur 1 sur P_k. Si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier de k, soit $m(\mathfrak{p})$ le plus petit des entiers $m \geq 0$ tels que $\chi(a) = 1$ pour $a \in U_\mathfrak{p}$ (c'est-à-dire $a_\mathfrak{p} \in U_\mathfrak{p}$, et $a_v = 1$ pour $v \neq \mathfrak{p}$) et $a_\mathfrak{p} \equiv 1$ mod. $\mathfrak{p}^m$; de la continuité de χ sur I_k, il résulte que $m(\mathfrak{p})$ est toujours fini, et nul pour presque tout $\mathfrak{p}$, donc que $\mathfrak{f} = \prod \mathfrak{p}^{m(\mathfrak{p})}$ est un idéal de k ; $\mathfrak{f}$ s'apelle le *conducteur* de χ. D'autre part, sur le sous-groupe $\prod_\lambda k_\lambda^*$ de I_k, χ est de la forme

$$\chi(a_1, \ldots, a_{r_1+r_2}) = \prod_{\lambda=1}^{r_1+r_2} \left(\frac{a_\lambda}{|a_\lambda|}\right)^{-f_\lambda} |a_\lambda|^{i\eta_\lambda\sigma_\lambda} \tag{1}$$

où chacun des f_ρ est égal à 0 ou 1, où les $f_\imath$ sont entiers, et où les φ_λ sont réels.

Soit $a = (a_v)$ un idèle; pour chaque $\mathfrak{p}$, $a_\mathfrak{p}$ détermine un idéal principal $(a_\mathfrak{p}) = \mathfrak{p}^{n(\mathfrak{p})}$ de $k_\mathfrak{p}$; par définition des idèles, $n(\mathfrak{p})$ est 0 pour presque tout $\mathfrak{p}$, donc $\prod \mathfrak{p}^{n(\mathfrak{p})}$ est un idéal entier ou fractionnaire

Université de Chicago
Transcription Denise Vella-Chemla, décembre 2020.

[1]Voir par exemple A. E. Ingham, *The distribution of prime numbers* Cambridge Tracts, n^o 30, Cambridge, 1932), Chap. IV ; dans ce qui suit, nous nous référerons à ce livre par le sigle DP.

[2]E. Hecke, *Eine neue Art von Zetafunktionen...*, Math. Zeitschr. I (1918), p. 357, et 5 (1919), p.11.

[3]Cf. A. Weil, *Sur la théorie du corps de classes*, Journ. Math. Soc. Japan, vol. 3, (1951), p. 1.

de k, qu'on désignera par (a). Par définition de $\mathfrak{f}$, on a $\chi(a) = 1$ si $(a) = 1, a_\lambda = 1$ pour tout λ, et $a_\mathfrak{p} = 1$ pour tout diviseur premier $\mathfrak{p}$ de $\mathfrak{f}$; donc, si $a_\lambda = 1$ pour tout λ, et $a_\mathfrak{p} = 1$ pour tout diviseur premier $\mathfrak{p}$ de $\mathfrak{f}$, $\chi(a)$ dépend seulement de l'idéal $\mathfrak{a} = (a)$; on a ainsi défini une fonction $\chi(\mathfrak{a}) = \chi(a)$ des idéaux $\mathfrak{a}$ de k premiers à $\mathfrak{f}$. On pose alors

$$L(s) = \sum_{\mathfrak{a}} \frac{\chi(\mathfrak{a})}{(N\mathfrak{a})^s} = \prod_{\mathfrak{p}} \left(1 - \frac{\chi(\mathfrak{p})}{(N\mathfrak{p})^s}\right)^{-1} \tag{2}$$

où la somme est étendue à tous les idéaux entiers $\mathfrak{a}$ de k premiers à $\mathfrak{f}$, et le produit à tous les idéaux premiers $\mathfrak{p}$ de k qui ne divisent pas $\mathfrak{f}$. Si χ est le caractère χ_0 partout égal à 1, $L(s)$ est la fonction zêta $\zeta(s)$ du corps k. On tire de (2):

$$L'/L(s) = -\sum_{\mathfrak{p}} \sum_{n=1}^{\infty} \log(N\mathfrak{p})\chi(\mathfrak{p})^n (N\mathfrak{p})^{-ns}. \tag{3}$$

Si on pose $s = \sigma + it$, les séries et produits ci-dessus convergent absolument et uniformément dans tout demi-plan $\sigma \geq 1 + a$, pour $a > 0$; donc, dans un tel demi-plan, $L(s), L(s)^{-1}$, et $L'/L(s)$ sont bornées.

Pour $a \in I_k$ et $\mathfrak{a} = (a)$, soit $\|a\| = \prod_\lambda |a_\lambda|^{\eta_\lambda} N(\mathfrak{a})^{-1}$. Comme $\|a\| = 1$ pour $a \in P_k$, $\chi_1(a) = \|a\|^{i\tau}\chi(a)$ est encore un caractère de C_k ; la fonction L associée à χ_1, est $L_1(s) = L(s + i\tau)$; on dira que χ, χ_1 sont associés. Parmi tous les caractères associés à un caractère donné, il y en a un et un seul pour lequel les exposants φ_λ qui figurent dans (1) satisfont à $\sum \eta_\lambda \varphi_\lambda = 0$; sans restreindre la généralité, on pourra donc supposer désormais que cette condition est satisfaite.

Soit Δ le discriminant de k ; soit $A = (2\pi)^{-d}|\Delta|N\mathfrak{f}$. On posera :

$$\begin{aligned}
&s_\lambda = s + i\varphi_\lambda \qquad\qquad\qquad\qquad (1 \leq \lambda \leq r_1 + r_2)\\
&G(s) = (2^{r_1}A)^{\frac{s}{2}} \prod_\lambda \Gamma\left(\frac{\eta_\lambda s_\lambda + |f_\lambda|}{2}\right)\\
&G_1(s) = \overline{G(1-\overline{s})} = (2^{r_1}A)^{\frac{1-s}{2}} \prod_\lambda \Gamma\left(\frac{\eta_\lambda(1-s_\lambda) + |f_\lambda|}{2}\right)
\end{aligned} \tag{4}$$

où $\overline{}$ désigne l'imaginaire conjugué, puis

$$\begin{aligned}
&\mathcal{G}_{\eta,f}(s) = (2/\eta)^s \Gamma\left(\frac{\eta s + |f|}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\eta(1-s) + |f|}{2}\right)^{-1}\\
&\mathcal{G}(s) = G(s)/G_1(s) = 2^{-\sum_\rho(\frac{1}{2}+i\sigma_\rho)} A^{s-\frac{1}{2}} \prod_\lambda \mathcal{G}_{\eta_\lambda, f_\lambda}(s_\lambda).
\end{aligned} \tag{5}$$

En vertu des propriétés connues de la fonction Γ, $|G(s)|^{-1}$ est $O(e^{c|t|})$ uniformément dans toute bande $\sigma_0 \leq \sigma \leq \sigma_1$, pour $c > \pi d/4$, et, dans la même bande, $|\mathcal{G}(s)|$ est $O(|t|^N)$ pour $N = d(\sigma_1 - \frac{1}{2})$ si on exclut un voisinage des pôles de $\mathcal{G}(s)$.

Posons maintenant $\Lambda(s) = G(s)L(s)$. Un théorème fondamental de Hecke (loc. cit.[2]) dit que $\Lambda(s)$ est une fonction méromorphe dans tout le plan, ayant ses pôles en $s = 0, 1$ si $\chi = \chi_0$, sans pôle si $\chi \neq \chi_0$, et qu'elle satisfait à l'équation fonctionnelle

$$\Lambda(1-\bar{s}) = \varkappa\overline{\Lambda(s)} \tag{6}$$

où $\varkappa$ est une constante, et $\|\varkappa\| = 1$. La démonstration se fait en exprimant $\Lambda(s)$ au moyen d'une intégrale définie ; cette expression montre en même temps que $\Lambda(s)$ est bornée dans toute bande $\sigma_0 \leq \sigma \leq \sigma_1$, des voisinages des pôles $s = 0, 1$ étant exclus pour $\chi = \chi_0$. Soit $L_1(s) = s(s-1)L(s)$, et prenons $\sigma_0 < 0 < 1 < \sigma_1$; dans $\sigma_0 \leq \sigma \leq \sigma_1$, on aura $|L_1(s)| \leq Ce^{c|t|}$, où c, C sont des constantes. Mais, d'après (2), $L(s)$ est bornée sur $\sigma = \sigma_1$, et $L(1-\bar{s})$ l'est sur $\sigma = \sigma_0$; comme on a

$$|L_1(s)| = |s(s-1)L(s)| = |s(s-1)\mathcal{G}(1-\bar{s})L(1-\bar{s})|,$$

il s'ensuit que $|L_1(s)|$ est $O(|t|^N)$ sur $\sigma = \sigma_0$, et sur $\sigma = \sigma_1$ si N est pris assez grand. D'après des théorèmes classiques, on en conclut que $|L_1(s)| \leq D|t|^N$ dans $\sigma_0 \leq \sigma \leq \sigma_1, |t| > 1, D$ étant une constante ; appliquant alors par exemple le théorème D de DP, p. 49, à deux cercles de rayons constants r, R et de centre $1 + a + it$, où a est fixe > 0, on voit que le nombre de zéros de $L_1(s)$ dans le plus petit de ces cercles est $O(log|t|)$. Comme, en vertu de (2) et de (6), tous les zéros de $\Lambda(s)$ sont dans la bande $0 \leq \sigma \leq 1$,[4] il s'ensuit que le nombre des zéros de $\Lambda(s)$ satisfaisant à $T \leq |t| \leq T + 1$ est $O(\log T)$; il y a donc une constante a, et, pour tout entier m tel que $|m| \geq 2$, un T_m compris dans l'intervalle $m < T_m < m + 1$, tels que $\Lambda(s)$ n'ait pas de zéro dans la bande $|t - T_m| \leq a/\log|m|$.

D'autre part, $|G(s)|$ est $O(e^{|s|^{1+\varepsilon}})$ pour tout $\varepsilon > 0$ dans le demi-plan $\sigma \geq 1$; comme $L(s)$ est bornée dans le demi-plan $\sigma \geq 1+a$, pour $a > 0$, il s'ensuit que $|\Lambda(s)|$ est $O(e^{|s|^{1+\varepsilon}})$ dans ce demi-plan, donc aussi, d'après (6), dans le demi-plan $\sigma \leq -a$; comme $\Lambda(s)$ est bornée dans $-a \leq \sigma \leq 1+a$ (à un voisinage près des pôles), il s'ensuit que $[s(s-1)]^{\delta_\chi}\Lambda(s)$ est une fonction entière d'ordre 1 si on pose $\delta_\chi = 1$ pour $\chi = \chi_0$ et $\delta_\chi = 0$ pour $\chi \neq \chi_0$. On a donc :

$$\Lambda(s) = ae^{bs}[s(s-1)]^{-\delta_\chi} \prod_\omega \left(1 - \frac{s}{\omega}\right) e^{s/\omega}$$

où a, b sont des constantes, et où le produit est étendu aux zéros ω de $\Lambda(s)$ comptés avec leur multiplicité.[5] On a donc, quels que soient s, s_0 :

$$\Lambda'/\Lambda(s) - \Lambda'/\Lambda(s_0) = \sum_\omega \left(\frac{1}{s-\omega} - \frac{1}{s_0-\omega}\right) - \delta_\chi \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s_0} - \frac{1}{s_0-1}\right),$$

d'où en particulier pour $s = 1 - \overline{s_0}$, en tenant compte de (6):

$$\Re[\Lambda'/\Lambda(s_0)] = \sum_\omega \Re\left(\frac{1}{s_0-\omega}\right) - \delta_\chi \Re\left(\frac{1}{s_0} + \frac{1}{s_0-1}\right)$$

[4]Le raisonnement classique d'Hadamard, appliqué comme le fait Landau (*Vorlesungen über Zahlentheorie*, vol. II, p. 14-15), montre d'ailleurs que $\Lambda(s)$ n'a pas de zéros sur la droite $\sigma = 1$, ni par conséquent sur $\sigma = 0$. Ce raisonnement ne tombe en défaut que si χ est un caractère réel $\neq \chi_0$; mais en ce cas $L(s)$ est le quotient, par la fonction zêta de k, de la fonction zêta d'une extension quadratique de k, et par suite le résultat reste valable.

[5]Si $s = 0$ était un zéro de Λ, le facteur correspondant devrait être remplacé par s, et il n'y aurait rien à changer à ce qui suit ; d'ailleurs cette circonstance ne peut pas se présenter (cf. note 5.)

où $\mathfrak{R}$ désigne la partie réelle. Pour $s_0 = 1 + a + it, 0 < a \leq 1$, cela donne:

$$|\Lambda'/\Lambda(s_0)| \geq \mathfrak{R}[\Lambda'/\Lambda(s_0) \geq \sum_{\omega} \frac{a}{(a+1)^2 + (t-y)^2} - \delta_\chi \left(\frac{1}{a+1} + \frac{1}{a} \right)$$

où on a posé $\omega = \beta + i\gamma$. Mais $L'/L(s)$ est bornée sur la droite $\sigma = 1 + a$; sur cette droite, $G'/G(s)$ est $O(log|t|)$; donc $|\Lambda'/\Lambda(s_0)|$ est $\leq A_0 \log |t| + A_1$, et on a par suite

$$\sum_{\omega} \frac{1}{a^2 + (t-\gamma)^2} \leq \frac{(a+1)^2}{a^2} \sum_{\omega} \frac{1}{(a+1)^2 + (t-\gamma)^2} \leq A'_0 \log |t| + A'_1,$$

où A_0, A_1, A'_0, A'_1 dépendent de a mais non de t. D'autre part, si on prend $s = \sigma + it$, $-a \leq \sigma \leq 1 + a$, et $t = T_m$, d'où $|t - \gamma| \geq \alpha / \log |m|$, un raisonnement élémentaire (DP th. 26, p. 71-72) montre qu'on a

$$|\Lambda'/\Lambda(s) - \Lambda'/\Lambda(s_0)| \leq \frac{\sqrt{2}}{a}(a + 1 - \sigma) \log |m| \left(\sum_{\omega} \frac{1}{a^2 + (t-y)^2} + \frac{2\delta_\chi}{a^2 + t^2} \right);$$

d'après ce qui précède, le premier membre est donc $\leq B_0 (\log |m|)^2 + B_1$, où B_0, B_1 ne dépendent que de a ; comme dailleurs $|\Lambda'/\Lambda(s_0)|$ est $O(\log |m|)$, on a donc en définitive, pour m entier, $|m| \geq 2, s = \sigma + iT_m$, et $-a \leq \sigma \leq 1 + a, 0 < a \leq 1$:

$$|\Lambda'/\Lambda(s)| \leq B(\log |m|)^2 \tag{7}$$

où B dépend de a, mais non de m ni de σ.

Cela posé, soit $F(x)$ une fonction à valeurs complexes définie sur la droite réelle qui possède une "transformée de Mellin"[6]

$$\Phi(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x) e^{(s-\frac{1}{2})x} dx$$

holomorphe dans une bande $-a \leq \sigma \leq 1 + a$; d'une manière plus précise, nous supposerons qu'il existe $a' > 0$ tel que $F(x)e^{(\frac{1}{2}+a')|x|}$ appartienne à L^1, ce qui assure que $\Phi(s)$ existe et est holomorphe dans $-a' < \sigma < 1 + a'$; et nous supposerons de plus qu'il existe $a > 0$ tel que $a \leq 1, a < a'$, et que $\Phi(s)$ soit $o((log|t|)^{-2})$ uniformément dans la bande $-a \leq \sigma \leq 1 + a$. Prenons $T > 2, T' > 2$; il y aura des entiers l, m tels que $|T - T_m| < 1, |-T' - T_l| < 1$. Le nombre des zéros $\omega = \beta + i\gamma$ de $\Lambda(s)$ dont la partie imaginaire γ est comprise entre T et T_m est $O(\log T)$, donc la somme $\sum \Phi(\omega)$, étendue à ces zéros, tend vers 0 quand T augmente indéfiniment ; il en est de même pour $-T'$ et T_l. Considérons alors l'intégrale de $\Phi(s) d \log \Lambda(s)$ sur le contour du rectangle formé par les droites $\sigma = -a, \sigma = 1 + a, t = T_m, t = T_l$; en vertu de (7) et de l'hypothèse faite sur Φ, l'intégrale prise sur le côté $t = T_m$ de ce rectangle tend vers 0 avec $1/T$, et celle relative au côté $t = T_l$ tend vers 0 avec $1/T'$. En tenant compte de (6), on obtient:

$$\sum_{-T' < \gamma < T} \Phi(\omega) \equiv \delta_\chi [\Phi(0) + \Phi(1)] + I(T_m, T_l) \quad \mod o(1) \tag{8}$$

[6] Conformément anx usages reçus, il faudrait dire que $\Phi(s)$ est la transformée de Mellin de la fonction $v^{-1/2} F(\log v)$, définie pour $v > 0$.

où on désigne par $o(1)$ le groupe additif des fonctions de T, T' qui tendent vers 0 avec $1/T, 1/T'$, et où on pose

$$I(t,t') = \frac{1}{2\pi i} \int_{1+a+it'}^{1+a+it} \Phi(s) d\log\Lambda(s) - \Phi(1-\overline{s}) d\log\overline{\Lambda(s)}$$

Comme d'ailleurs, sur la droite $\sigma = 1+a, L'/L(s)$ est bornée, et $G'/G(s)$ est $O(\log|t|), I(T,T_m)$ tend vers 0 avec $1/T$, et $I(-T',T_l)$ avec $1/T'$ de sorte que dans (8) on peut remplacer $I(T_m,T_l)$ par $I(T,-T')$. Dans $I(T,-T')$, remplaçons $\Lambda(s)$ par $G(s)L(s); I(T,-T')$ apparaît comme somme d'une intégrale analogue $I_0(T,-T')$ portant sur $L(s)$ et d'une autre $I_1(T,-T')$ portant sur $G(s)$. Appliquant (3), on obtient:

$$I_0(T,-T') = \frac{-1}{2\pi} \int_{-T'}^{T} dt \sum_{\mathfrak{p},n} \int_{-\infty}^{\infty} H_{\mathfrak{p},n}(u) e^{itu} du \tag{9}$$

où l'on a posé

$$H_{\mathfrak{p},n} = \frac{\log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}^{n/2}} \left[\chi(\mathfrak{p})^n F(u+\log N\mathfrak{p}^n) e^{\left(\frac{1}{2}+a\right)u} + \chi(\mathfrak{p})^{-n} F(u-\log N\mathfrak{p}^n) e^{-\left(\frac{1}{2}+a\right)u} \right]$$

D'autre part, on a

$$2\pi i I_1(T,-T') = \int_{1+a-iT'}^{1+a+iT} \Phi(s) d\log G(s) - \int_{-a-iT'}^{-a+iT} \Phi(s) d\log G_1(s).$$

Mais $G'/G(s)$ n'a pas de pôle dans le demi-plan $\sigma > 0$, et par suite $G_1'/G_1(s)$ n'en a pas dans $\sigma < 1$; d'ailleurs ces fonctions sont $O(log|t|)$ dans $\sigma_0 \leq \sigma \leq \sigma_1$, en dehors de voisinages de leurs pôles, quels que soient σ_0, σ_1. Il s'ensuit qu'on a

$$I_1(T,-T') \equiv \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1}{2}-iT'}^{\frac{1}{2}+iT} \Phi(s) d\log\mathcal{G}(s) \qquad \text{mod. } o(1)$$

d'où, en appliquant encore une fois le même raisonnement :

$$I_1(T,-T') \equiv J_0(T,-T') + \sum_{\lambda=1}^{r_1+r_2} J_\lambda(T,-T') \qquad \text{mod. } o(1)$$

en posant

$$J_0(T,-T') = \frac{\log A}{2\pi i} \int_{\frac{1}{2}-iT'}^{\frac{1}{2}+iT} \phi(s) ds,$$

$$J_\lambda(T,-T') = \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1}{2}-iT'}^{\frac{1}{2}+iT} \phi(s-i\varphi_\lambda) d\log\mathcal{G}_{\eta_\lambda,f_\lambda}(s).$$

On a donc :

$$\sum_{-T'<\gamma<T} \Phi(\omega) \equiv \delta_\chi[\Phi(0)+\Phi(1)] + I_0(T,-T') + J_0(T,-T') + \sum_{\lambda=1}^{r_1+r_2} J_\lambda(T,-T') \qquad \text{mod. } o(1) \tag{10}$$

Comme d'ailleurs $\Phi\left(\frac{1}{2}+it-i\varphi_\lambda\right)$ est la transformée de Fourier de $F(x)e^{-i\varphi_\lambda x}$, on a

$$J_\lambda(T,-T') = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x)e^{-i\varphi_\lambda x}\mathcal{H}_{\eta_\lambda,f_\lambda}(x;T,-T')dx$$

avec

$$\mathcal{H}_{\eta,f}(x;T,-T') = \frac{1}{2\pi i}\int_{-T'}^{T} e^{ixt}d\log\mathcal{G}_{\eta,f}\left(\frac{1}{2}+it\right).$$

Posons maintenant

$$H_{\eta,f}(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt}\left[\frac{2}{\eta}d\log\mathcal{G}_{\eta,f}\left(\frac{1}{2}+it\right) - d\log\mathcal{G}_{2,0}\left(\frac{1}{2}+it\right)\right];$$

en vertu d'identités et d'évaluations connues, on voit que la différence entre l'intégrale du second membre, et la même intégrale prise entre les limites $-T'$ et T, est, en valeur absolue, $\leq 2(e^{-}+e^{-\pi T'})$ pour $\eta=1, f=0$ ou 1, et $\leq C_f(T^{-1}+T'^{-1})$ pour $\eta=2, C_f$ dépendant de f mais non de T,T'. De plus, en vertu de formules connues, on a:

$$H_{1,f} = \frac{(-1)^{1-f}}{e^{x/2}+e^{-x/2}}, \qquad H_{2,f} = \frac{1-e^{-|fx|/2}}{|e^{x/2}+e^{-x/2}|}.$$

Il s'ensuit qu'on a

$$J_\lambda(T,-T') \equiv \frac{\eta_\lambda}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)e^{-i\varphi_\lambda x}H_{\eta_\lambda,f_\lambda}(x)dx$$

$$+\frac{\eta_\lambda}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)e^{-i\varphi_\lambda x}\mathcal{H}_{2,0}(x;T,-T')dx \qquad \text{mod. } o(1)$$

Pour aller plus loin, nous ferons sur $F(x)$ des hypothèses plus précises que jusqu'ici, Nous supposerons pour fixer les idées que $F(x)$ satisfait aux conditions suivantes :

(A) $F(x)$ est continue et continument différentiable partout sauf en un nombre fini de points $\alpha_\imath$, en lesquels $F(x)$ et sa dérivée $F'(x)$ n'ont qu'une discontinuité de première espèce, et en chacun desquels on a $F(\alpha_\imath)=\frac{1}{2}\left[F(\alpha_\imath+0)+F(\alpha_\imath-0)\right]$.

(B) Il existe $b>0$ tel que $F(x)$ et $F'(x)$ soient $O\left(e^{-(\frac{1}{2}+b)|x|}\right)$ pour $|x|+\infty$.

Cela entraîne que, pour $0<a'<b$, $F(x)e^{\left(\frac{1}{2}+a'\right)|x|}$ est dans L^1, et que $\Phi(s)$ est $O(|t|^{-1})$ uniformément dans $-a'<\sigma<1+a'$; les résultats précédemment démontrés sont donc valables pourvu qu'on prenne $0<a<a'<b, a\leq 1$. Pour un choix convenable de la constante C, on aura

$$|F(x)| \leq Ce^{-(\frac{1}{2}+b)|x|},$$

d'où, en posant $\delta=b-a$:

$$\frac{H_{\mathfrak{p},n}(u)}{C\log N\mathfrak{p}} \leq \frac{e^{-\delta|u|}}{N\mathfrak{p}^{n(1+b)}} + N\mathfrak{p}^{nb}e^{\delta|u|}\inf(N\mathfrak{p}^{-n(1+2b)}, e^{-(1+2b)|u|}) \leq 2N\mathfrak{p}^{-n(1+a)}$$

d'où

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |H_{\mathfrak{p},n}(u)|du \leq 2C\left(\frac{1}{\delta}+\frac{1}{1+2a+\delta}\right)\frac{\log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}^{n(1+a)}}.$$

Il s'ensuit que la série $H(u)=\sum H_{\mathfrak{p},n}(u)$ est absolument et uniformément convergente et définit une fonction $H(u)$ qui est dans L^1, et que (9) peut s'écrire

$$I_0(T,-T')=\frac{-1}{2\pi}\int_{-T'}^{T} dt \int_{-\infty}^{+\infty} H(u)e^{itu}du.$$

De plus, $H(u)$ est continue et continument différentiable en dehors des points $a_i \pm \log N\mathfrak{p}^n$ où elle a, ainsi que sa dérivée, au plus des discontinuités de première espèce, et où sa valeur est moyenne arithmétique entre ses limites à droite et à gauche. Dans ces conditions, la formule d'inversion de l'intégrale de Fourier s'applique, c'est-à-dire que $I_0(T,-T)$ tend vers $-H(0)$ pour $T\to+\infty$.

Pour obtenir la limite commune des deux membres de (10) pour $T=T'\to+\infty$, il ne nous reste donc plus qu'à évaluer la limite de $J_\lambda(T,-T)$ dans le cas où $\eta_\lambda=2, f_\lambda=0$. Autrement dit, il faut évaluer la limite de

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-T}^{+T}\Psi(t)d\log\mathcal{G}_{2,0}\left(\frac{1}{2}+it\right)=\frac{1}{\pi}\int_{-T}^{+T}\Psi(t)\Re\left[\Gamma'/\Gamma\left(\frac{1}{2}+it\right)\right]dt$$

pour $T\to+\infty, \Psi(t)$ étant la transformée de Fourier d'une fonction $F_1(x)=F(x)e^{-i\varphi_\lambda x}$ qui satisfait aux conditions (A) et (B).

Mais la fonction $\Re\left[\Gamma'/\Gamma\left(\frac{1}{2}+it\right)\right]$ est paire et est de la forme $\log|t|+O(t^{-2})$ pour $|t|\to+\infty$. La transformée de Fourier de $\log|t|$ est une distribution, qui a été déterminée par L. Schwartz[7] ; celle de $\Re\left[\Gamma'/\Gamma\left(\frac{1}{2}+it\right)\right]$ est donc une distribution, qui ne diffère de la précédente que par une fonction continue. On trouve que c'est la distribution $-\pi\mathrm{PF}(|e^{x/2}-e^{-x/2}|^{-1})$, où le symbole PF est défini comme suit. Soit $a(x)$ une fonction appartenant à L^1 sur $(-\infty,-1)$ et sur $(+1,+\infty)$, et telle que $\beta(x)=|x|a(x)$ satisfasse à la condition (A) ; on posera :

$$\mathrm{PF}\int_{-\infty}^{+\infty} a(x)dx=\lim_{\lambda\to+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}(1-e^{-\lambda|x|})a(x)dx-2\beta(0)\log\lambda\right].$$

Alors, si $a(x)$ est telle que $|x|a(x)$ satisfasse à (A), et si $\varphi(x)$ est continue et continument différentiable à support compact, la formule

$$\mathrm{PF}a(\varphi)=\mathrm{PF}\int_{-\infty}^{+\infty} a(x)\varphi(x)dx$$

définit une distribution PFa, égale à la fonction a sur tout intervalle ne contenant pas 0, et qui ne diffère de la distribution Pfa de Schwartz que par un multiple de la distribution δ de Dirac. Cela posé, il résulte des théorèmes de Schwartz que, si $F_1(x)$ et $\Psi(t)$ sont comme ci-dessus, on a

$$\lim_{T\to+\infty}\int_{-T}^{+T}\Psi(t)\Re\left[\Gamma'/\Gamma\left(\frac{1}{2}+it\right)\right]dt=-\pi\mathrm{PF}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{F_1(x)dx}{|e^{x/2}-e^{-x/2}|}\ ;$$

[7] L. Schwartz, *Théorie des distributions*, vol. II (Act. Sc. et Ind. n° 1122, Paris, Hermann et C[ie], 1951), formule (VII, 7 ; 18).

on peut d'ailleurs le vérifier directement comme suit. Comme

$$\Re\left[\Gamma'/\Gamma\left(\frac{1}{2}+it\right)\right]$$

ne diffère de $\log|t|$ que par une fonction de L^2, il suffit, en vertu du théorème de Plancherel, de vérifier la formule analogue pour $\int\limits_{-T}^{+T}\Psi(t)\log|t|dt$.

On peut, sans rien changer, remplacer $\Psi(t), F_1(x)$ par $\Psi(t)+\Psi(-t), F_1(x)+F_1(-x)$, ou autrement dit supposer que F_1 et Ψ sont paires ; vérifiant le résultat directement pour F_1 égale à 1 pour $|x|<1$, à 0 pour $|x|>1$, on se ramène au cas où $F_1(0)=0$, donc, compte tenu de (A), où $F_1(x)=|x|F_2(x)$, F_2 étant une fonction paire, continue sauf en un nombre fini de discontinuités de première espèce, et $O(e^{-|x|/2})$ à l'infini. On a alors en définitive à démontrer la formule suivante :

$$\int\limits_0^{+\infty}F_2(x)dx=-\frac{2}{\pi}\lim_{T\to+\infty}\int\limits_0^{T}\log\,t\left[\int\limits_0^{+\infty}F_2(x)\cos(tx)dx\right]dt,$$

où, après une intégration par parties

$$\int\limits_0^{+\infty}F_2(x)dx=\frac{2}{\pi}\lim_{T\to+\infty}\int\limits_0^{T}\int\limits_0^{+\infty}F_2(x)\frac{\sin(tx)}{t}dtdx\ ;$$

l'intégrale double du second membre est absolument convergente, et peut donc s'écrire :

$$\int\limits_0^{+\infty}F_2(x)\left(\int\limits_0^{xT}\frac{\sin(t)}{t}dt\right)dx=\frac{\pi}{2}\int\limits_0^{+\infty}F_2(x)dx-\int\limits_0^{+\infty}F_2(x)\left(\int\limits_{xT}^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt\right)dx$$

et il est immédiat qne le dernier terme tend vers 0 pour $T\to+\infty$, ce qui achève la démonstration.

Nous obtenons donc le résultat définitif suivant :

Si F(x) satisfait aux conditions (A), (B), la somme $\sum\phi(\omega)$, étendue au zéros $\omega=\beta+i\gamma$ de $L(s)$ qui satisfont à $0\le\beta\le1, |\gamma|<T$, tend vers une limite pour $T\to+\infty$, et cette limite a la valeur

$$\lim_{T\to+\infty}\sum_{[\gamma|<T}\Phi(\omega)=\delta_x\int\limits_{-\infty}^{+\infty}F(x)(e^{x/2}+e^{-x/2})dx+F(0)\log\,A$$

$$-\sum_{\mathfrak{p}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}^{n/2}}\left[\chi(\mathfrak{p})^nF(\log N\mathfrak{p}^n)+\chi(\mathfrak{p})^{-n}F(\log\,N\mathfrak{p}^{-n})\right]$$

$$-\sum_{\lambda=1}^{r_1+r_2}\mathrm{PF}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}F(x)e^{i\varphi_\lambda x}K_{\eta_\lambda,f_\lambda}(x)dx \tag{11}$$

où on a posé :

$$K_{1,f}(x)=\frac{e\left(\frac{1}{2}-f\right)|x|}{|e^x-e^{-x}|},\qquad K_{2,f}(x)=\frac{e^{-f|x|/2}}{|e^{x/2}-e^{-x/2}|}.$$

Telle est la forme la plus générale des “formules explicites”, Naturellement, on pourrait élargir sensiblement les hypothèses faites sur F.

Nous allons appliquer ces résultats à une transformation de l'hypothèse de Riemann qui n'est peut-être pas sans intérêt. Pour cela, nous nous appuyerons sur le lemme suivant :

Pour que $L(s)$ satisfasse à l'hypothèse de Riemann, il faut et il suffit que la valeur commune des deux membres de (11) soit ≥ 0 pour toute fonction F de la forme

$$F(x) = F_0(x) * \overline{F_0(-x)} = \int_{-\infty}^{+\infty} F_0(x+t)\overline{F_0(t)}dt,$$

où F_0 est une fonction satisfaisant à (A), (B).

F est alors continue et est la primitive d'une fonction F' continue partout sauf en un nombre fini de discontinuités de première espèce (ce sont les points $\alpha_i - \alpha_j$, si les α_i sont les points de discontinuités de F_0) ; F satisfait à (B) ; et, si Φ_0 est la “transformée de Mellin” de F_0 [8], celle de F est $\Phi(s) = \Phi_0(s)\overline{\Phi_0(1-\overline{s})}$. Si donc tous les zéros ω de $L(s)$ dans la bande critique sont sur $\sigma = \dfrac{1}{2}$, le premier membre de (11) est ≥ 0 pour ce choix de F et Φ. Supposons au contraire que $L(s)$ ait dans cette bande un zéro $\omega_0 = \beta_0 + i\gamma_0$ avec $\beta_0 \neq \dfrac{1}{2}$. Posons

$$z = i\left(s - \frac{1}{2} - i\gamma_0\right), \qquad \Phi_0(s) = \Psi_0(z), \qquad \Phi(s) = \Psi(z),$$

de sorte qu'on a $\Psi(z) = \Psi_0(z)\overline{\Psi_0(\overline{z})}$ et que $F_0(x)e^{i\gamma_0 x}, F(x)e^{i\gamma_0 x}$ sont les transformées de Fourier des fonctions induites par $\Psi_0(z), \Psi(z)$ sur l'axe réel. Comme la transformée de Fourier de toute fonction de la forme $P(x)e^{-Ax^2}$, où P est un polynome et $A > 0$, est une fonction de même forme, il s'ensuit que, si on prend pour $\Psi_0(z)$ une fonction $P(z)e^{-Az^2}$, $F_0(x)$ satisfera à (A) et (B). Pour un tel choix de $\Psi_0(z), \Psi(z)$ sera de la même forme, donc $\Phi(s)$ sera $O(e^{-A't^2})$ pour tout $A' < A$, uniformément dans $0 \leq \sigma \leq 1$, et par suite $\sum \Phi(\omega)$ sera absolument convergente ; pour achever de démontrer le lemme, il suffira de faire voir que cette somme sera < 0 pour un choix convenable de $P(z)$ et de A. Posons en effet, pour tout zéro ω de $L(s)$ dans la bande critique, $\eta = i\left(\omega - \frac{1}{2} - i\gamma_0\right)$, et en particulier $\eta_0 = i\left(\omega_0 - \frac{1}{2} - i\gamma_0\right) = i\left(\beta_0 - \frac{1}{2}\right)$. Soit $Q(z)$ le polynôme ayant pour zéros simples tous les η distincts, autres que η_0 et $\overline{\eta_0}$, qui satisfont à $|\Re\eta| \leq 2$; comme, d'après (6), les η sont réels ou deux à deux imaginaires conjngués, on peut prendre Q à coefficients réels ; on prendra $P(z) = zQ(z)Q(-z)$. Alors, si m est l'ordre de ω_0 comme zéro de $L(s)$, on aura, pour $A > 1$:

$$\sum \Phi(\omega) = -2m\left(\beta_0 - \frac{1}{2}\right)^2 |Q(\eta_0)|^4 e^{2A(\beta_0 - \frac{1}{2})^2} + \sum_{|\Re\eta|>2} P(\eta)^2 e^{-2A\eta^2}$$

$$\leq -2m\left(\beta_0 - \frac{1}{2}\right)^2 |Q(\eta_0)|^4 e^{2A(\beta_0 - \frac{1}{2})^2} + e^{-3A} \sum_{|\Re\eta|>2} |P(\eta)^2 e^{-\eta^2}|,$$

et il est clair que le dernier membre est < 0 pour A assez grand.

---

[8] cf. la note 7 de bas de page 4 concernant la transformée de Mellin.

On va maintenant, au moyen du lemme, donner une condition nécessaire et suffisante pour que toutes les fonctions L construites sur le corps k satisfassent à l'hypothèse de Riemann.

Pour cela, soit comme précédemment $C_k = I_k/P_k$, le groupe des classes d'idèles de k ; pour toute valuation v de k, k_v^* sera identifié avec le groupe des idèles dont toutes les composantes sont égales à 1 sauf au plus celle relative à v ; comme l'homomorphisme canonique de I_k sur C_k induit sur ce groupe k_c^* un isomorphisme de k_c^* sur son image dans C_k, cette image sera, elle aussi, identifiée à k_c^*. On a défini précédemment la fonction $\|a\|$ sur I_k ; comme elle est égale à 1 sur P_k, elle détermine sur C_k, par passage au quotient, une fonction qu'on notera $\|\xi\|$; $\xi \to \|\xi\|$ est un homomorphisme de C_k sur le groupe multiplicatif γ des réels > 0, dont le noyau C_k^0 est compact[9]. La fonction $\|\xi\|$ induit $|x|$ sur k_ρ^*, $|x|^2$ sur $k_\imath^*$ et $N\mathfrak{p}^{-n(x)}$ sur $k_\mathfrak{p}^*$ si $n(x)$ est défini pour $x \in k_\mathfrak{p}^*$ par $(x) = \mathfrak{p}^{n(x)}$.

D'une manière générale, si φ est un homomorphisme à noyau compact d'un groupe G sur le groupe γ, on peut normer la mesure de Haar sur G par la condition que la mesure de la partie compacte de G déterminée par $1 \leq \varphi(\xi) \leq M$ soit $\log M$; si φ est un homomorphisme à noyau compact de G sur un sous-groupe discret γ' de γ, on peut normer la mesure de Haar sur G par la condition que la mesure de la partie compacte (ouverte et fermée) de G déterminée par $1 \leq \varphi(\xi) \leq M$ soit $\log M + O(1)$ pour $M \to +\infty$; en ce dernier cas, si γ' est engendré par $\alpha > 1$, la mesure du noyau de φ sera $\log \alpha$. Dans l'un et autre cas, la mesure de Haar ainsi déterminée sur G sera dite *normée au moyen de* φ. On notera $d\xi$ la mesure de Haar sur C_k, normée au moyen de $\|x\|$; et, quel que soit v, on notera $d^\times x$ la mesure de Haar sur k_c^*, normée aussi au moyen de $\|x\|$; cette notation est destinée à rappeler qu'il s'agit d'une mesure de Haar sur le groupe multiplicatif k_c^* ; si d^+x est une mesure de Haar sur le groupe additif k_v, $d^\times x$ ne diffèrera de $d^+x/\|x\|$ que par un facteur constant. Sur k_ρ^*, on a $d^\times x = dx/2|x|$; sur $k_\imath^*$, si on pose $x = re^{i\theta}$, on a $d^\times x = drd\theta/\pi r$; sur $k_\mathfrak{p}^*$, la mesure, pour $d^\times x$, du groupe compact $U_\mathfrak{p}$ des unités de $k_\mathfrak{p}$ est $\log(N\mathfrak{p})$.

Considérons le sous-groupe de I_k, formé des idèles $a = (a_v)$ tels que $a_\mathfrak{p} = 1$ quel que soit $\mathfrak{p}$, et $a_\lambda = a_1 > 0$ pour $1 \leq \lambda \leq r_1 + r_2$; soit γ_k l'image de ce groupe dans C_k ; γ_k est isomorphe à γ, et C_k est produit direct de C_k^0 et γ_k ; de plus, les caractères χ de C_k qui satisfont à $\sum \eta_\lambda \varphi_\lambda = 0$ sont ceux qui prennent la valeur 1 sur γ_k, de sorte que le groupe Γ de ces caractères est isomorphe au groupe des caractères du groupe compact C_k^0 ; on attribuera donc à Γ la topologie discrète. Soit $F_0(\chi, x)$ une fonction définie sur $\Gamma \times R$, nulle pour presque tout χ (c'est-à-dire que, pour tous les χ sauf un nombre fini d'entre eux, on a $F_0(\chi, x) = 0$ quel que soit x), et telle que, pour tout χ, $F_0(\chi, x)$ satisfasse à (A) et (B). On posera, pour $\xi \in C_k$:

$$\Omega(\xi) = \sum_{\chi \in \Gamma} F_0(\chi, -\log \|\xi\|)\chi(\xi),$$

et, pour tout $\chi \in \Gamma$,

$$F(\chi, x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_0(\chi, x + t)\overline{F_0(\chi, t)}dt.$$

On aura, dans ces conditions :

$$P(\xi) = \Omega(\xi) * \overline{\Omega(\xi^{-1})} = \sum_{\chi \in \Gamma} F(\chi, -\log \|\xi\|)\chi(\xi),$$

[9] cf. la note 5 en bas de la page 3.

où * désigne le produit de composition dans C_k, pour la mesure $d\xi$; $P(\xi)$ est une fonction de type positif sur C_k. Écrivons que le second membre de (11) est ≥ 0 quand on y substitue $F(\chi, x)$ à $F(x)$; et faisons la somme des inégalités ainsi obtenues pour tous les $\chi \in \Gamma$. On obtient, après quelques calculs sans difficulté :

$$D(P) = \rho P(1) + \int_{C_k} P(\xi)\left(\|\xi\|^{1/2} + \|\xi\|^{-1/2}\right) d\xi - \sum_v \int_{k_v^*} \frac{P(x) - P(1)0_v(\|x\|)}{\|x-1\|.\|x\|^{-1/2}} d^\times x \geq 0 \tag{12}$$

avec

$$\rho = \log|\Delta| + \log(2\pi)^{-d} - \sum_{\lambda=1}^{r_1+r_2} PF \int_{-\infty}^{+\infty} \theta_\lambda(e^{-x}) K_{n_\lambda,0}(x) dx, \tag{13}$$

où on a pris $\theta_v(1) = 1$ quel que soit v, $\theta_{\mathfrak{p}}(t) = 0$ pour $t \neq 1$ quel que soit $\mathfrak{p}$, et où les θ_λ sont tels que (13) ait un sens ; on peut prendre par exemple $\theta_\lambda(t) = 1$ quel que soit t. La valeur de $D(P)$ est indépendante du choix des θ_λ.

Il résulte du lemme que $D(P) \geq 0$, pour toutes les fonctions P obtenues comme il a été dit, est une condition nécessaire et suffisante pour que toutes les fonctions L construites sur le corps k satisfassent à l'hypothèse de Riemann. Comme D, en tant que fonction de P, est une distribution sur C_k, cette condition peut s'exprimer en disant que D est "de type positif". Il est à peine besoin de dire que l'hypothèse de Riemann ne paraît pas plus facile à démontrer sous cette forme que sous sa forme classique. En revanche, notre énoncé met en évidence l'analogie entre corps de nombres et corps de fonctions. Si en effet k est un corps de fonctions algébriques de dimension 1, sur un corps de constantes fini à q éléments, on peut définir[10] le groupe C_k des classes d'idèles de k (qui ici est totalement discontinu, et limite projective de groupes discrets), ainsi que les sous-groupes k_v^* de C_k relatifs aux valuations v de k (qui ici sont toutes discrètes); pour un idèle a, on pose $\|a\| = q^{-\deg(\mathfrak{a})}$, où $\mathfrak{a}$ est le diviseur associé naturellement à l'idèle a ; de même que plus haut, on normera au moyen de $\|a\|$ les mesures de Haar sur C_k, et sur les groupes k_v^*. On définira une distribution D sur C_k au moyen de (12), en prenant cette fois $\rho = (2g-2)\log q$, g étant le genre, et en prenant $\theta_v(1) = 1$, $\theta_v(t) = 0$ pour $t \neq 1$ quel que soit v. Cela posé, des calculs semblables aux précédents, mais beaucoup plus élémentaires, montrent que l'exactitude de l'hypothèse de Riemann pour toutes les fonctions L construites sur k équivaut a l'inégalité $D(P) \geq 0$ pour toutes les fonctions

$$P(\xi) = \Omega(\xi) * \overline{(\xi^{-1})}$$

sur C_K, où Ω est une fonction sur C_k, nulle en dehors d'un compact, et constante sur les classes suivant un sous-groupe ouvert de C_k. Bien entendu, dans le cas des corps de fonctions algébriques, l'hypothèse de Riemann est un résultat acquis, et par suite, au sens qu'on vient de dire, la distribution D attachée à un tel corps est bien "de type positif".

UNIVERSITY OF CHICAGO

[10]cf. note 3 en bas de la page 1.