

Riemann, Betti et la naissance de la topologie

ANDRÉ WEIL

Communiqué par C. TRUESDELL

Cette *Archive* a récemment publié une étude consciencieuse ([1]) des relations entre RIEMANN et ses contemporains italiens. Malheureusement, l'auteur a raté ce qui sinon aurait été le joyau de sa collection - deux lettres de BETTI à son collègue et ami TARDY, décrivant en détail ses conversations avec RIEMANN au sujet de l'“analysis situs”. Elles semblent presque inconnues, malgré le fait qu'elles aient été dûment citées par BOURBAKI dans l'une des notes historiques de sa *Topologie* (cf. [2]) ; elles avaient été publiées initialement par G. LORIA, comme appendices de ses notices nécrologiques de TARDY ([3]). Les voici (j'ai corrigé simplement les coquilles évidentes) :

À cet endroit de la note de Weil, les deux lettres originales sont transcrites en italien.

Tout commentaire semblerait ici superflu. D'abord j'avais projeté, pour satisfaire certains lecteurs, d'ajouter une traduction littérale ; mais le style de BETTI dans ces lettres non seulement manque de précision, mais est si diffus qu'une traduction libre, quelque peu abrégée, semble préférable. “Contour” a été traduit par “frontière”, “bord” par “côté”, “section” par “coupe”. Pour “point de section”, “section linéaire”, “section superficielle”, “section de dimension n ”, j'ai écrit “point-de-coupe”, “1-coupe”, “2-coupe”, “ n -coupe”, respectivement ; pour “ordre de connexion”, “ordre de connectivité” ; pour “modules de périodicité”, simplement “périodes”. Finalement, SC signifie “simplement connexe” (“simplement connecté”, de façon évidente dans le sens de “homologiquement trivial”).

(Première lettre) J'ai à nouveau parlé avec Riemann de la connectivité des espaces, et je me suis fait une idée précise de ce sujet.

Un espace est dit SC quand toute surface fermée qu'il contient a toute sa frontière qui fait partie de l'espace, et toute ligne fermée qu'il contient est la frontière complète d'une surface qu'il contient également.

L'intérieur d'un ellipsoïde est un espace SC. L'espace limité par deux sphères concentriques n'est pas SC, puisqu'une troisième sphère concentrique des deux premières et comprise entre elles, n'est pas la frontière complète d'une partie de l'espace, alors qu'elle est fermée et que l'espace la contient complètement. Dans cet espace, pourtant, toute ligne fermée peut être vue comme la frontière complète d'une surface contenue dans l'espace. Cet espace peut être réduit à un espace SC par une 1-coupe, viz., par une ligne allant de la sphère extérieure à la sphère intérieure. Après que cette coupe ait été effectuée, ses points doivent être regardés comme étant extérieurs à l'espace, et les sphères concentriques entre les deux sphères données ne sont plus contenues dans l'espace, puisqu'elles intersectent la coupe.

L'espace d'un tore plein n'est pas SC, puisqu'une ligne, telle que l'axe, n'est pas la frontière d'une surface à l'intérieur de l'espace. Pourtant, toute surface fermée que l'espace contient est la frontière

Traduction anglais → français, Denise Vella-Chemla, octobre 2022.

d'une de ses parties. On réduit cela à un espace SC par une 2-coupe, en coupant le tore orthogonalement à l'axe à l'intérieur du tore lui-même.

L'espace d'un tore creux n'est pas SC, puisqu'une surface fermée à l'intérieur de la portion pleine du tore, contenant son axe intérieur, ne délimite aucune partie de l'espace, et une droite parallèle à l'axe, dans ce même espace, n'est pas la frontière d'une surface à l'intérieur de l'espace. On le réduit à un espace SC par une 1-coupe allant de la surface extérieure à la surface intérieure, et par une 2-coupe SC joignant les surfaces extérieure et intérieure et la 1-coupe.

Les trois espaces qui viennent d'être considérés ont des ordres de connectivité différents celui-ci étant égal à (m, n) si les nombres de 2-coupes SC et de 1-coupes nécessaires pour le rendre SC sont respectivement égaux à m et n . L'ordre de connectivité de l'espace entre deux sphères est $(0, 1)$; celui du tore plein est $(1, 0)$, et celui du tore creux est $(1, 1)$. La généralisation à des dimensions plus élevées est facile ; l'importance de cette théorie, pour la théorie des intégrales multiples, est évidente. Ce qui a donné l'idée des coupes à Riemann, c'est que Gauss les lui a définies, en lui en parlant à propos d'autres sujets, lors d'une conversation privée. Dans ses écrits, on trouve que l'analysis situs, qui est cette considération des quantités indépendamment de leur taille est "importante" ; dans les dernières années de sa vie, il a été très concerné par un problème d'analysis situs, notamment : étant donné un fil enroulé et connaissant, à chacun des points de ses auto-intersections, quelle partie est au-dessus et quelle partie est au-dessous, trouver s'il peut être déroulé sans faire de nœuds ; il n'a pas réussi à résoudre ce problème excepté dans des cas particuliers...

(Deuxième lettre) RIEMANN démontre assez facilement que tout espace peut être réduit à un espace SC au moyen de 1-coupes et de 2-coupes SC.

Un espace connexe ne change pas d'ordre de connectivité si on étend ou réduit les surfaces de ses frontières, leurs points étant déplacés vers l'intérieur de l'espace jusqu'à ce qu'il perde une ou plusieurs dimensions, en supposant que cela ait lieu continument et sans brisures. Pour qu'un espace soit SC, il doit être possible de le réduire à un point de cette manière. Une surface qui peut ainsi être réduite à un point est SC ; mais il peut se produire qu'il ne puisse pas être réduit à un point à moins que l'on fasse dans cet espace un point de coupure ; par exemple, la surface d'une sphère, où, pour la réduire à un point, on doit faire un trou et l'étendre continument jusqu'à ce que la surface soit ainsi réduite.

Pour une plus grande clarté, je prendrai à nouveau l'exemple de la dernière fois.

Une sphère creuse, si vous réduisez la surface extérieure et étendez la surface intérieure jusqu'à ce qu'elles deviennent infiniment proches l'une de l'autre, perd une dimension et se réduit à une surface sphérique, qui, au moyen d'un point de coupure, peut être réduite à un point unique. Ce point de coupure a une dimension de moins que le nombre de dimensions qu'il avait [avant la déformation], de telle façon qu'il correspond [là] à une 1-coupe. L'ordre de connectivité est $(1, 0)$.

Un tore plein, si vous réduisez la surface extérieure jusqu'à ce que ses frontières intérieures deviennent infiniment proches les unes des autres, perd deux dimensions et se réduit à une ligne circulaire

qui, au moyen d'un point de coupure, peut se réduire à un point. Le point de coupure, ayant deux dimensions de moins que le nombre de dimensions qu'il avait dans l'espace original, correspond à une 2-coupure dans cet espace, qui est SC puisqu'il peut être réduit à un point. Par conséquent, l'ordre de connectivité est $(0, 1)$.

Un tore creux, si vous faites se rétracter la surface extérieure et étendez l'intérieure jusqu'à ce qu'elles deviennent infiniment proches, perd une dimension et se réduit à une surface en forme de tore qui, pour être réduite davantage, nécessite un point de coupe, correspondant à une 1-coupure [dans l'espace original]. Par une dilatation de ce trou, on peut faire que ses côtés deviennent infiniment proches les uns des autres ; alors la surface en forme de tore a le même centre que le tore, alors que l'autre a son centre sur l'axe intérieur du tore ; on peut les imaginer comme ayant leur plan perpendiculaire l'un à l'autre. Pour réduire l'un de ces cercles au point qu'ils ont en commun, un point-coupure est nécessaire, et aussi un autre point-coupure pour réduire le cercle restant à un point. Ces deux points-coupure correspondent à deux 2-coupes SC dans l'espace original, de telle façon que son ordre de connectivité est $(1, 2)$, et non pas $(1, 1)$ comme je l'avais écrit par inadvertance l'autre jour.

Prenons maintenant une sphère à l'intérieur de laquelle on a évidé un tore ; en faisant se rétracter sa surface extérieure, elle perd une dimension et est réduite à une surface plane joignant ensemble les côtés intérieurs de la surface en forme de tore [plus la dernière surface]. Avec un point-coupure, cela se réduit à une ligne circulaire avec son centre sur l'axe intérieur du tore, et une surface plane circulaire avec son centre au centre du tore. Avec un autre point coupure, la ligne circulaire se réduit à un point sur le côté de la surface circulaire, qui peut alors se réduire à un point sans coupe supplémentaire. Par conséquent, l'espace peut être rendu SC avec une 1-coupe et une 2-coupe SC. Son ordre de connectivité est $(1, 1)$.

En généralisant cela, on voit qu'une variété à n dimensions peut toujours, au moyen de rétractions continues sans coupures, être réduite à n'avoir seulement que $n - 1$ dimensions, alors, au moyen de points-coupures, à $n - 2$ dimensions, alors, à nouveau au moyen de points-coupures, à $n - 3$ dimensions, et etc., jusqu'à ce qu'elle soit réduite à un point. Les premiers points-coupures correspondent aux 1-coupures ; les suivants aux 2-coupures SC ;... ; les derniers aux $(n - 1)$ -coupures SC.

Le nombre de 1-coupures est égal au nombre de périodes d'un $(n - 1)$ -uple entier ; le nombre de 2-coupures SC au nombre de périodes d'un $(n - 2)$ -uple entier ; ... le nombre de $(n - 1)$ -coupures SC au nombre de périodes d'une intégrale simple, toutes celles-ci étant prises à l'intérieur de l'espace considéré. Par conséquent, comme le nombre de périodes est bien déterminé, le nombre de coupures des différentes sortes nécessitées pour rendre l'espace SC doit toujours être le même, quel que soit la manière dont on les réalise...

Références

- [1] U. BOTTAZZINI, Riemanns Einfluss auf E. Betti und F. Casorati, Arch. Hist. Ex. Sc. **18** (1977), p. 27-37.
- [2] N. BOURBAKI, *Topologie Générale* Chap. I, 2^e éd., Note historique, p. 127 (cf. n° III de la bibliographie, p. 130)= *Eléments d'histoire des mathématiques*, Paris 1960, p. 148 (cf. n° [187c] de la bibliographie, p. 272).
- [3] G. LORIA, Commemorazione del compianto Socio prof. Placido Tardy, Rend. Acad. Lincei, (V) 24 (1^o semestre) 1915, pp. 505-521 (v. Appendice II, p. 517-519).

Institute for Advanced Study
Princeton, New Jersey

(Reçu le 12 novembre 1978)

Un postscriptum à mon article “Riemann, Betti et la naissance de la topologie”

Archive pour l’Histoire des Sciences exactes, Volume **20**, p. 91-96 (1979)

ANDRÉ WEIL

En lien avec l’article en question (cette Archive, vol. 20 (1979), p. 91-96), le Professeur U. BOTTAZZINI a gentiment porté à mon attention le livre de J.-C. PONT, *La topologie algébrique des origines à Poincaré*, P.U.F. Paris 1974, qui avait malencontreusement échappé à mon attention jusque-là. Dans cet excellent court volume, basé sur toutes les sources disponibles, l’accent est mis (p. 76-80) sur les lettres de BETTI à TARDY ; j’avais tort en affirmant “elles semblent presque inconnues”.

Institute for Advanced Study
Princeton

(Reçu le 15 octobre 1979)