Classification des algèbres de von Neumann

Stefaan Vaes

Merci beaucoup, je suis très content de pouvoir faire cet exposé ici au congrès de la SMF. Je suis d'ailleurs content en venant de Leuven que la SMF ait décidé d'organiser son congrès en Flandre. Et effectivement, je vais parler de classification d'algèbres de von Neumann et je vais essayer de faire cet exposé en présentant ça comme une dichotomie entre le monde moyennable et le monde non-moyennable.

Et je vais expliquer ces notions, je vais aussi expliquer la notion d'algèbres de von Neumann. Et pour bien cerner cette dichotomie moyennable / non-moyennable, je vais commencer par le fameux paradoxe de Banach et Tarski. Banach et Tarski ont démontré en 1924 ce théorème qui paraît paradoxal, effectivement, qu'on peut prendre un orange, on peut couper cette orange en morceaux, ensuite on va bouger les morceaux par translations et rotations, et ce qu'on obtient, ce sont deux oranges qui ont exactement la même taille, qui sont toujours pleines, et qui ont le même rayon que l'orange originale.

Donc quand vous voyez ça la première fois, ou quand vous expliquez ça à vos voisins, en fonction des convictions, peut-être que vous vous dites "est-ce qu'on peut faire ça avec des boules en or ? Ou est-ce qu'on peut faire ça avec du pain et des poissons ?". Mais en fait, c'est un vrai théorème, mais évidemment, on se dit que ce n'est pas possible, mais évidemment, comme vous le savez, la partition, c'est un théorème d'existence, donc c'est une partition qui est une partition en ensembles non-mesurables, forcément, et donc le théorème, en fait, il dit que l'espace $\mathbb{R}^3$ ne peut pas admettre une mesure qui est finiment additive, et qui est invariante par translation et rotation, et qui donne un poids fini non nul à la boule, parce que sinon, on pourrait effectivement peser. Donc ça dit qu'il n'y a pas de façon de peser tous les sous-ensembles.

Or, après, John von Neumann a donné une explication. Ah, oui, je vais le montrer que c'est possible. *(Là, est présenté une diapositive montrant ensemble de photos rigolotes de la manipulation de découpage / translations / rotations de l'orange et de ses morceaux à toute vitesse).* Donc il y a ce type-là, il a pris une orange, il la coupe, et il a beaucoup de morceaux, et effectivement, avec ces morceaux, il arrive à faire deux oranges, et il en est très content.

Donc ça, c'est la seule expérience que je vais faire aujourd'hui. Mais John von Neumann a donné une explication beaucoup plus conceptuelle de ce théorème, et l'explication de von Neumann, c'est de dire qu'on va regarder le groupe d'isométries de $\mathbb{R}^2$, de $\mathbb{R}^3$, de $\mathbb{R}^n$, et il a découvert une notion qu'on va appeler moyennabilité, que je vais expliquer après. C'est un concept pour les groupes, le concept d'un groupe moyennable, et ce que von Neumann a démontré, c'est qu'il y a une dichotomie entre la dimension 2 et la dimension 3 ; donc il a démontré que le groupe d'isométries de l'espace $\mathbb{R}^3$, c'est un groupe non-moyennable, tandis que le groupe d'isométries du plan $\mathbb{R}^2$ est moyennable, et quel est le rapport avec le paradoxe de Banach et Tarski ? Le rapport et les conséquences,

Transcription de l'exposé de Stefaan Vaes, du Département de mathématiques, de l'Université catholique du Louvain (KU Leuven), au Congrès de la Société Mathématique de France, Lille, France.
Référence : https://webtv.univ-lille.fr/video/9812/classification-des-algebres-de-von-neumann.
Transcription par outil `turboscribe`, corrections : Denise Vella-Chemla, mars 2024.

comme je l'ai expliqué, c'est qu'en dimension 3, effectivement, il y a cette décomposition qu'on appelle paradoxale de la boule unité, mais en fait, tout aussi étonnant, le disque unité n'admet pas de décomposition paradoxale, donc ce n'est pas possible de couper un disque en morceaux, de les bouger, et d'avoir deux disques de même taille.

Donc il y a là un changement de phase entre dimension 2 et dimension 3, et la raison c'est la moyennabilité. Donc ça, c'est un concept pour les groupes, et on va ici parler de groupe sans structure supplémentaire, donc c'est juste un groupe qu'on voit comme un ensemble discret, et von Neumann dit qu'un groupe est moyennable s'il est possible de peser des sous-ensembles du groupe. Donc ça veut dire qu'on peut définir un poids pour tous les sous-ensembles du groupe, de telle façon que c'est finiment additif, bien sûr, qu'on a le poids de l'ensemble vide qui est nul, de tout le groupe qui est 1, et ensuite il faut que le poids soit invariant par translation.

Donc quand je translate à gauche un sous-ensemble du groupe, le poids reste le même. Et comme on va voir, certains groupes admettent un tel poids, on dit moyenne invariante, donc certains groupes ont une telle moyenne invariante, on va dire que ce sont les groupes moyennables, et d'autres n'ont pas ça, et les conséquences sont les suivantes. Donc si un groupe admet une telle moyenne, alors si jamais le groupe (Γ) opère quelque part, il y a une façon directe de transmettre la moyenne vers l'ensemble X sur lequel le groupe opère pour donner une moyenne invariante, Γ-invariante, sur cet ensemble X. Et la conséquence de ça, quand on l'applique bien, va être, comme on va voir, que le groupe des isométries de $\mathbb{R}^2$ est un groupe moyennable, ce groupe opère sur $\mathbb{R}^2$, ça fait des moyennes invariantes sur le plan $\mathbb{R}^2$, et c'est ça qui fait qu'il n'y a pas de décomposition paradoxale du disque.

Par contre, le groupe des isométries de $\mathbb{R}^3$ est non-moyennable, et la raison est que ce groupe d'isométries lui-même admet une décomposition paradoxale. Qu'est-ce que je veux dire là ? D'une part, il n'est pas facile du tout de construire de telles moyennes. Démontrer qu'un groupe est moyennable, je reviens là-dessus après.

Mais comment démontrer qu'un groupe est non-moyennable ? Comment peut-on voir qu'un groupe n'admet pas une telle façon de peser les sous-ensembles ? Alors, il peut y avoir une raison évidente, et il paraît que c'est la seule raison, c'est-à-dire qu'un groupe est non-moyennable si et seulement si le groupe lui-même admet une décomposition paradoxale. C'est quoi une décomposition paradoxale du groupe ? Ça veut dire que je vais couper le groupe en morceaux, je coupe le groupe en un nombre fini de morceaux, une partition finie, et maintenant je vais dire qu'avec un certain nombre de ces morceaux par translation, je fais le groupe entier, donc avec un certain nombre de morceaux, je peux fabriquer tout le groupe, et avec les autres morceaux, je peux aussi fabriquer tout le groupe. Or, si j'ai un groupe avec une telle décomposition paradoxale, évidemment, il ne peut pas y avoir une moyenne M invariante dessus, parce qu'on voit tout de suite que 1, qui va être le poids de Γ, doit être la somme de tous ces poids, mais déjà, les poids de A_i vont sommer à 1, et les poids de B_j vont sommer à 1 aussi.

Voilà. Dès qu'un groupe admet une décomposition paradoxale, le groupe est non-moyennable, et inversement, c'est un théorème de Tarski, c'est la seule raison qui fait qu'un groupe est non-moyennable. Alors il doit exister une telle décomposition. Maintenant, la décomposition paradoxale du groupe, elle aussi peut se transmettre à l'espace où le groupe opère.

Au moins, si l'action du groupe sur un ensemble X est libre, il est facile de transférer la décomposition paradoxale du groupe vers une décomposition paradoxale de l'ensemble. Évidemment, on sait bien que le groupe des isométries de $\mathbb{R}^3$ n'opère pas librement, parce qu'il y a par exemple la rotation qui fixe l'axe, donc il faut travailler un peu plus, mais l'essentiel est là. Pourquoi le groupe des isométries de $\mathbb{R}^3$ est non-moyennable ? C'est parce qu'il y a un prototype de groupe non-moyennable, et ce sont les groupes libres.

Le groupe libre $\mathbb{F}_2$, c'est le groupe engendré par deux éléments, a et b, qui ne vérifie aucune relation. Cela veut donc dire que les éléments de ce groupe sont tous les mots qu'on peut écrire avec l'alphabet de ces quatre lettres a, a^{-1}, b, b^{-1}, comme ce mot-ci, et on se met d'accord qu'on ne va qu'écrire des mots réduits. Il y a un grammaire dans cette langue, donc on n'écrit jamais des mots comme a suivi par a inverse (a^{-1}), parce qu'on peut simplifier.

L'ensemble des mots réduits, avec le mot vide qui est l'élément neutre, devient un groupe, par l'opération de groupe qui est la concaténation suivie par la réduction des mots. Donc ça c'est le groupe libre $\mathbb{F}_2$, à deux générateurs a et b. Évidemment on peut faire ça avec n générateurs, et obtenir le groupe libre $\mathbb{F}_n$, engendré par n éléments, ou même avec une infinité d'éléments si vous voulez. Ce groupe-là va revenir plusieurs fois dans l'exposé, mais voyons déjà pourquoi ce groupe est non-moyennable.

Le groupe $\mathbb{F}_2$ a une décomposition paradoxale très facile. On va introduire la notation suivante, $W(a)$, ce sont tous les mots qui commencent par la lettre a. Évidemment, le groupe est maintenant partitionné en cinq morceaux, l'élément neutre et ensuite les mots qui commencent par une des quatre lettres de mon alphabet. Et ceci montre vraiment que c'est une décomposition paradoxale, parce que, par exemple, on peut déjà couvrir tout le groupe Γ en prenant les mots qui commencent par a, ou en translatant par a les mots qui commencent par a^{-1} (ou a inverse).

Un petit moment de réflexion montre que ceci déjà donne tous les éléments du groupe, et pareil avec les mots qui commencent par b, et du coup voici une décomposition paradoxale du groupe libre. Le groupe libre $\mathbb{F}_2$ n'est donc pas moyennable. Quel est le rapport entre ce groupe libre $\mathbb{F}_2$ et les isométries de l'espace ? En fait, quand on prend génériquement, il faut faire un peu attention à ce qu'on veut dire par générique, mais génériquement, quand je choisis deux rotations de $\mathbb{R}_3$ qui fixent l'origine, ces deux rotations ne vont génériquement satisfaire aucune relation.

On pourrait prendre deux axes de rotation avec un angle qui est irrationnel ou même transcendant par rapport à 2π, et pareil avec l'angle de rotation, on le prend transcendant par exemple, et du coup, il n'y aura aucune relation entre ces deux rotations. Donc, le groupe des isométries contient une copie du groupe libre, et le groupe libre n'est pas moyennable. Et comme je vais le montrer maintenant, ça suffit pour conclure que le groupe des isométries est un groupe non-moyennable, et c'est ça qui explique le paradoxe de Banach et Tarski.

C'est quoi les propriétés des groupes moyennables ? Je n'ai rien dit pour le moment sur la façon de démontrer qu'un groupe est moyennable. En fait, les seuls groupes qui sont moyennables pour une raison triviale sont les groupes finis, parce qu'on peut juste compter le nombre d'éléments dans un sous-ensemble. Et sur tous les autres groupes, la moyenne n'est jamais explicite.

Donc c'est toujours un théorème d'existence, quelque part comme point limite dans un compact, mais quand même, on peut démontrer que tous les groupes abéliens sont moyennables de cette manière, et on peut aussi démontrer que la moyennabilité passe par plusieurs constructions. C'est stable en prenant des sous-groupes, c'est aussi stable en prenant des limites directes, et c'est stable par extension. Et quand on réfléchit maintenant au groupe d'isométries de $\mathbb{R}^2$, on a déjà tous les outils pour démontrer que le groupe d'isométries de $\mathbb{R}^2$ est moyennable, parce qu'en prenant des extensions des groupes finis et des groupes abéliens, on produit en fait tout le groupe d'isométries de $\mathbb{R}^2$.

Quels sont les groupes non-moyennables ? On a vu un exemple, c'est-à-dire le groupe $\mathbb{F}_2$, mais comme la moyennabilité passe au sous-groupe, dès qu'un groupe contient une copie de $\mathbb{F}_2$, le groupe est forcément non-moyennable. Dès qu'on trouve dans un groupe deux éléments qui ne vérifient aucune relation, alors le groupe est non-moyennable. Pendant très longtemps, le problème de von Neumann était de savoir si le sens inverse était vrai aussi.

Est-ce que la seule obstruction à la moyennabilité est la présence de deux éléments qui ne vérifient aucune relation ? Ça s'est révélé faux. Il y a d'autres exemples, qui ne sont pas faciles à construire, de groupes non-moyennables, mais qui néanmoins ne contiennent pas de copie de $\mathbb{F}_2$. Le dernier mot sur moyennabilité / non-moyennabilité que je vais dire, c'est que ça peut être très difficile de décider si un groupe concret est moyennable ou pas.

Il y a un exemple très fameux que je vais vous montrer et définir tout de suite. C'est la question de savoir si le groupe de Thompson est moyennable ou pas. Donc, c'est quoi le groupe de Thompson ? C'est un groupe qui se définit très facilement, parce que c'est un groupe de transformations de l'intervalle $[0, 1]$.

C'est un groupe d'homéomorphismes de l'intervalle $[0, 1]$. Je peux donc représenter un tel homéomorphisme par son graphe. Ici, il y a un élément typique de ce groupe, c'est-à-dire que le graphe des éléments dans ce groupe va être linéaire par morceau, et tous les points où je coupe sont des rationnels dyadiques, et tous les slopes[1] sont les puissances de 2. On a donc un nombre dénombrable de points où je peux couper, il y a un nombre dénombrable, comme ça, de croissances possibles, donc c'est un groupe dénombrable.

Pendant plusieurs années, il y avait en alternance un article sur `Arxiv` qui montrait que c'était un groupe moyennable, et ensuite un article qui montrait que c'était un groupe non-moyennable. Pour le moment, on est tous d'accord sur le fait que c'est un problème qui est très ouvert, quoique moi, je dirais qu'il y a de plus en plus d'indications que c'est un groupe non-moyennable. Il y a même aussi des expériences qu'on peut faire numériquement, parce qu'on a vu d'ailleurs dans l'exposé de Nalini Anantharaman la notion de laplacien et de trou spectral pour le laplacien, donc on peut exprimer la non-moyennabilité comme un trou spectral d'un opérateur, mais sur un espace de Hilbert de dimension infinie, et on peut faire des approximations de ce spectre.

[1] slopes = pentes.

Il y a une convergence, mais on ne sait pas quelle est la vitesse de convergence, et il y a des expériences numériques qui semblent montrer qu'il y a un trou spectral, mais ce n'est peut-être pas assez convaincant. On voit bien la dichotomie moyennabilité / non-moyennabilité dans le paradoxe de Banach et Tarski, mais ce n'est pas le vrai sujet dont je veux vous parler. Je veux parler d'algèbres de von Neumann et montrer comment cette dichotomie est très présente là.

C'est quoi une algèbre de von Neumann ? C'est une algèbre d'opérateurs sur un espace de Hilbert. Et voici deux notions qu'on va utiliser, l'opérateur adjoint et la topologie faible des opérateurs. Donc c'est quoi une algèbre de von Neumann de façon abstraite ? C'est n'importe quelle $*$-algèbre[2] d'opérateurs sur un espace de Hilbert, fermée pour cette topologie faible.

Et on va immédiatement voir le lien avec les groupes et avec la moyennabilité, mais commençons par ces deux exemples triviaux. Évidemment, on peut prendre tous les opérateurs bornés, ou on peut prendre cette algèbre abélienne qui consiste en des fonctions sur un espace opérant sur $L^2(X)$ quand X est muni d'une mesure. Mais les groupes donnent lieu à des algèbres de von Neumann.

Donc on va prendre de nouveau un groupe sans structure supplémentaire, juste un groupe dénombrable Γ. Voici son espace de Hilbert, $\ell^2(\Gamma)$, avec sa base orthonormale canonique indexée par le groupe. Et avec ça, vient une représentation unitaire, qui est la représentation régulière du groupe, c'est-à-dire que les éléments du groupe g vont opérer par des unitaires λ_g et λ_g ne fait rien d'autre que translater la base orthonormale du groupe.

Donc ça, ça fait une représentation unitaire du groupe Γ, et l'algèbre de von Neumann du groupe Γ, par définition, c'est l'algèbre de von Neumann engendrée par ces unitaires. Donc ça veut dire quoi ? Ça veut dire que je prends d'abord l'espace linéaire engendré par les unitaires λ_g, et cet espace linéaire, on voit tout de suite que ce n'est rien d'autre qu'une copie de l'algèbre du groupe Γ, c'est-à-dire $\mathbb{C}[\Gamma]$, qui a comme base d'espace vectoriel le groupe Γ, et la loi de produit donnée par le produit dans le groupe. Cet espace linéaire est immédiatement une $*$-algèbre, parce que λ_g, c'est une représentation, donc ça, c'est bien une $*$-algèbre d'opérateurs, mais pour avoir une algèbre de von Neumann, on prend son adhérence faible.

On prend l'adhérence faible de cet ensemble d'opérateurs, et c'est ça qui est l'algèbre de von Neumann du groupe Γ. Si vous retenez un aspect de cet exposé, c'est que ce passage qui prend l'adhérence faible est un passage très destructif, comme on va le voir tout de suite. Cela efface beaucoup de la structure.

Conjecturalement, pas en toute généralité, mais par exemple pour les groupes sans torsion, on peut retrouver conjecturalement le groupe à partir de l'algèbre du groupe. Il y a une conjecture qui est très grandement ouverte. Si Γ est sans torsion, on croit que les seuls éléments inversibles dans cette algèbre sont les multiples des éléments du groupe.

Donc on peut retrouver le groupe Γ immédiatement à partir de son algèbre. Cela n'est très loin d'être vrai pour l'algèbre de von Neumann, parce que voici le début de moyennabilité versus non-moyennabilité. Il y a un théorème très fameux d'Alain Connes, qui dit que les algèbres de von

[2] prononcer star-lgèbre.

Neumann des groupes moyennables sont toutes isomorphes.

Il y a un monde énorme des groupes moyennables qui donnent tous lieu à la même algèbre de von Neumann, quoiqu'il y ait ce petit mot que je vais expliquer dans deux minutes. Évidemment, le théorème serait moins étonnant si, à l¡un moment donné, à la limite, Murray et von Neumann, qui ont introduit ces notions, ont pendant un petit moment cru que peut-être toutes les algèbres de von Neumann seraient isomorphes sous certaines hypothèses. Mais ça, ce n'est pas vrai non plus.

Quand on prend notre ami le groupe libre, et on prend n'importe quel groupe moyennable, et ici j'ai pris les permutations finies de l'ensemble $\mathbb{N}$, alors l'algèbre de von Neumann du groupe libre n'est pas isomorphe à l'algèbre de von Neumann d'un groupe moyennable. Or, Alain Connes, évidemment, il n'a pas démontré le théorème comme ça. Pour des groupes moyennables, il y a beaucoup plus de structure derrière.

Ce qu'Alain Connes a démontré est basé sur une notion aussi due à Murray et von Neumann, qui est la notion d'algèbre hyperfinie. Une algèbre de von Neumann est dite hyperfinie s'il existe dedans une suite croissante de sous-algèbres finie-dimensionnelles dont la réunion est dense. C'est ça les algèbres hyperfinies.

Et voici l'exemple typique. Évidemment, on va mettre les matrices 2×2 dans les 4×4 et ainsi de suite, en mettant chaque fois les matrices comme ça, et en prenant ensuite la limite inductive et en prenant la bonne adhérence, comme ça, etc., et on fabrique l'exemple type d'une algèbre de von Neumann hyperfinie. Il y a maintenant deux autres mots que je vais expliquer.

Mais déjà, le premier théorème de vraie classification, et là, je viens au titre de mon exposé, était déjà dû à Murray et von Neumann, qui ont démontré que, en gros, cette limite inductive est la seule algèbre de von Neumann hyperfinie. Les bons mots qui vont avec, facteur II_1, vont venir dans deux minutes. Qu'est-ce qu'a alors fait Alain Connes ? En fait, Alain Connes a défini une notion de moyennabilité, directement pour les algèbres de von Neumann.

Et il a démontré qu'automatiquement, une algèbre de von Neumann qui est moyennable, doit être hyperfinie, doit admettre une telle suite croissante dedans, et comme en plus, une algèbre de von Neumann d'un groupe est moyennable, si et seulement si le groupe est moyennable, on peut mettre tout ensemble, combiner Connes avec Murray et von Neumann, et obtenir ceci. Il faut là quand même voir que si je vous donne deux groupes moyennables explicites, il n'y a aucune façon d'écrire explicitement l'isomorphisme. C'est vraiment quelque chose qui passe par beaucoup de considérations abstraites.

Il y avait deux mots que je n'ai pas expliqués. Il y avait le mot *facteur* II_1 et cette abréviation que je dois vous expliquer. Dans cette classification d'algèbres de von Neumann, comme dans toutes les théories des classifications, on commence par faire une hypothèse de simplicité.

La bonne hypothèse de simplicité, ici, c'est de dire que l'algèbre n'est pas une somme directe de deux sous-algèbres. Et quand c'est le cas, les algèbres de von Neumann sont assez flexibles. C'est équivalent à dire que le centre de l'algèbre, juste algébriquement le centre, est réduit aux multiples de 1. Un *facteur*, c'est comme ça une algèbre à centre trivial.

Bon, ce n'est pas vrai que chaque algèbre soit une somme directe de facteurs, mais presque. Chaque algèbre est une intégrale directe de facteurs, donc vraiment, il suffit de regarder les facteurs. Ensuite, il y avait cette abréviation *icc*.

Il est très facile, et déjà dû à Murray et von Neumann aussi, de décider quand une algèbre de von Neumann d'un groupe est à centre trivial. Pour ça, il faut que le groupe soit suffisamment non-abélien, et la bonne condition est que les classes de conjugaison soient infinies. Chaque fois que je prends un élément g qui n'est pas l'élément neutre, alors sa classe de conjugaison est un sous-ensemble infini du groupe, et c'est ça exactement la condition qui fait que l'algèbre de von Neumann associée est un facteur.

Donc voici la notion de *facteur*, et déjà une abondance d'exemples, parce qu'il suffit de prendre les algèbres de von Neumann des groupes à classes de conjugaison infinies. Il y avait l'autre truc qui disait que c'était II_1. De nouveau, regardons l'algèbre de von Neumann du groupe.

L'algèbre de von Neumann du groupe a une forme linéaire favorite. Déjà sur l'algèbre du groupe, ce sont les combinaisons linéaires des éléments du groupe, on peut prendre la forme linéaire qui choisit le coefficient qui va avec l'élément neutre. Et cette forme a de très bonnes propriétés.

C'est une trace, donc ça vérifie la propriété de trace. C'est une forme positive, normalisée, et c'est ça qu'on appelle une trace sur une algèbre de von Neumann. Et en plus, comme c'est normalisé, un état tracial.

Et les facteurs de type II_1, ce sont les facteurs qui admettent un tel état tracial. Donc ça, a priori, ça peut sembler comme quelque chose de très restrictif ou même d'un peu exotique, quoique l'exemple montre que c'est très naturel pour les algèbres de von Neumann des groupes, mais de façon beaucoup plus importante, il y a la théorie qui a été développée pendant 10-15 ans, à la fin des années 70, au début des années 80, par Tomita et Takasaki et Alain Connes, qui en gros montre que chaque facteur, de façon assez compliquée, peut être fabriqué à partir d'un facteur qui admet une telle trace. De cette manière, les facteurs de type II_1 sont quand même les briques de base pour construire les facteurs arbitraires.

OK, c'était ça les deux mots que je devais expliquer. Et on a donc une abondance de facteurs de type II_1, parce qu'il suffit de prendre n'importe quel groupe à classe de conjugaison infinie. Donc j'ai dit que j'allais parler d'une dichotomie moyennable / non-moyennable.

Du côté moyennable, toutes ces algèbres de von Neumann de groupes sont toutes isomorphes.

Or qu'est-ce qui se passe du côté non-moyennable ? Tout d'abord, il y a beaucoup de problèmes ouverts. Par exemple, on ne sait toujours pas si les algèbres de von Neumann associées au groupe libre sont isomorphes quand je fais varier le nombre de générateurs. C'est un des plus grands problèmes ouverts de la théorie.

Quoique, il y a ce progrès qui est un peu étonnant. Grâce à la probabilité libre de Voiculescu, Voiculescu et Radulescu ont démontré qu'il n'y a que deux options. Soit toutes ces algèbres sont isomorphes, même avec n égal à l'infini, soit elles sont deux à deux non-isomorphes.

Le fait qu'il pourrait y avoir un isomorphisme entre $L(\mathbb{F}_2)$ et $L(\mathbb{F}_\infty)$, ça serait très surprenant. Cela veut dire que $L(\mathbb{F}_\infty)$ serait donc engendré par deux éléments. Dès qu'on pense un peu algébriquement, ce n'est pas du tout ce à quoi on s'attend pour l'algèbre donnée par le groupe libre à une infinité de générateurs.

On ne s'attend pas à ce que cet algèbre soit finiment engendrée. Mais il y a cet aspect de prendre l'adhérence, donc c'est très subtil. Jusqu'au point où c'est tout aussi un problème ouvert de décider si peut-être, chaque facteur II_1 est finiment engendré.

Voire même si chaque facteur II_1 est engendré par un seul élément. Avec ça, je veux dire que la $*$-algèbre engendrée par ce seul élément est dense. Même ça, on ne sait pas décider.

Évidemment, il faut rester raisonnable et rester sur les espaces de Hilbert séparables, mais le vrai problème est là. Il y a beaucoup de gens qui ne croient pas que $L(\mathbb{F}_\infty)$ puisse être engendré par un seul élément, mais on n'a absolument pas les outils pour démontrer un tel résultat. Voici un autre problème ouvert, quoique là, il y a au moins une conjecture qui prédit quelle devrait être la réponse.

Une classe de groupes très intéressante, ce sont les réseaux dans les groupes de Lie. Je prends ici un exemple concret. Prenons la matrice $n \times n$ de déterminant 1 et à coefficients dans $\mathbb{Z}$. On va diviser par le centre si n est pair pour être sûr que le groupe est à classe de conjugaison infinie.

Quand on prend le groupe $\mathrm{PSL}(n, \mathbb{Z})$ avec n au moins 3, Alain Connes prédit, fait la conjecture, que non seulement les algèbres de von Neumann sont non-isomorphes quand n varie, mais bien plus fort que ça, si jamais il y a un autre groupe qui donne lieu à la même algèbre de von Neumann, la seule façon dont ça puisse arriver, c'est parce que les groupes sont isomorphes. C'est vraiment le plus loin qu'on puisse aller sur ce qui se passe dans le monde moyennable, où toutes les algèbres de von Neumann deviennent isomorphes par le théorème de Connes. On n'a vraiment aucune approche de cette conjecture, quoique, en anglais on dise parfois "poor man's result", au moins on sait démontrer qu'il ne peut y avoir un nombre dénombrable de groupes différents, groupes non-isomorphes, qui produisent cette algèbre de von Neumann de $\mathrm{PSL}(n, \mathbb{Z})$.

Et ça c'est pas un théorème vide, parce que quand on prend le groupe libre $\mathbb{F}_2$, par contre, il y a une quantité non dénombrable de groupes non-isomorphes qui donne la même algèbre de von Neumann. Ce qui montre encore la flexibilité de cette théorie, et comment le passage de l'algèbre du groupe à l'algèbre de von Neumann du groupe peut être un passage destructif. Donc ici, il y a le fait que n est au moins 3, parce qu'effectivement, comme vous le savez, dans les réseaux de groupes de Lie, il y a un énorme passage de $n = 2$ à $n = 3$, donc lorsque $n = 2$, on a essentiellement le groupe libre, et on sait que l'algèbre de von Neumann du groupe libre n'est pas isomorphe à ceux-là, mais je ne vais pas dire plus de ça.

Cette conjecture de rigidité de Connes prédit donc que, pour ces groupes bien spécifiques, la seule façon que son algèbre de von Neumann soit isomorphe à l'algèbre de von Neumann d'un autre groupe, c'est parce qu'on a pris le même groupe. On ne sait pas du tout démontrer cette conjecture, mais on sait démontrer le phénomène pour d'autres groupes. C'est un premier résultat que je veux mentionner, que nous avons démontré il y a bientôt 8 ans, avec Adrian Ioana et Sorin Popa.

On a construit des groupes discrets, mais malheureusement pas $\mathrm{PSL}(n, \mathbb{Z})$, pour lesquels ceci est exactement vrai. Donc si jamais $L(\mathcal{G})$ est isomorphe à $L(\Lambda)$, alors $\mathcal{G}$ doit être le même groupe ($\mathcal{G} = \Lambda$). Dans le théorème, je n'ai pas dit comment est ce groupe.

Je vais quand même vous dire de quelle forme sont ces groupes. Ces groupes sont de formes qu'on appelle produits en couronne. On va fabriquer des groupes qui sont de la forme suivante.

La donnée, c'est un groupe Γ, et je vais immédiatement dire quel groupe on peut prendre. On va prendre des groupes Γ qui opèrent sur des ensembles I dénombrables, et je vais faire un produit semi-direct en prenant d'abord un groupe abélien, qui est la somme directe du groupe à deux éléments, et on prend I copies, donc I est infini, et Γ opère dessus par translation de la somme directe, et on fait le produit semi-direct, et c'est ça qu'on appelle le produit en couronne des deux groupes. Évidemment, pour que le théorème fonctionne, il faut des hypothèses très spécifiques sur le groupe Γ et son action sur I, mais heureusement, deux ans après, avec un ancien étudiant à moi, on a pu simplifier les hypothèses, et je peux vous montrer maintenant des exemples très faciles, parce qu'en fait, on peut prendre comme ensemble I un groupe, et la façon dont un autre groupe agit dessus, c'est $\Gamma \times \Gamma$, qui opère lui sur Γ en multipliant à la fois à gauche ou à droite par un des Γ et l'autre des Γ, donc on a comme ça le décalage dans les deux directions, gauche et droite, et quand on fait ce produit semi-direct, ces groupes-ci vérifient cette propriété que j'ai énoncée là, qu'on retrouve le groupe à partir de son algèbre de von Neumann, et ça c'est vrai pour beaucoup de groupes Γ, par exemple pour tous les groupes libres Γ, mais aussi pour tous les produits libres, pour ceux qui sont familiers avec cette notion.

Peut-être un mot sur la terminologie. Rigidité, ici, veut dire qu'on fait ce passage qui est a priori très destructif en prenant cette adhérence faible, mais néanmoins on arrive à revenir en arrière. Et pourquoi W-superrigidité ? Les algèbres de von Neumann sont parfois appelées aussi W^*-algèbres, parce que ça fait référence à la topologie faible-$*$ (weak star, closed), c'est de ça que la terminologie vient.

Ça, c'est ce que je voulais vous raconter sur les algèbres de von Neumann des groupes, mais il y a aussi des algèbres de von Neumann qui viennent avec des actions de groupes sur des espaces de probabilité. Et ça, ça a été beaucoup plus étudié, il y a beaucoup plus de résultats dans cette direction. Donc maintenant, on n'a pas seulement un groupe, mais le groupe opère sur un espace de probabilité, et on va supposer que l'action préserve cette mesure μ.

Et je vais faire avec ça, de nouveau, une algèbre de von Neumann, qui va contenir d'ailleurs l'algèbre du groupe Γ, mais qui va contenir aussi les fonctions sur l'espace. Et donc algébriquement, ça se passe comme ça. L'algèbre est engendrée par une copie de $L^\infty(X)$, et par des unitaires qui étaient la représentation régulière avant.

Et comme variante de l'algèbre du groupe, donc purement algébriquement, j'ai les combinaisons linéaires des éléments du groupe, mais où maintenant les coefficients sont des fonctions. Et comment est la loi produit ? Il n'y a pas beaucoup de façons de définir un produit là-dessus et de faire une algèbre. C'est comme le produit semi-direct.

Si je veux sauter avec le u_g de l'autre côté d'une fonction, ce que je dois faire, c'est translater la fonction, par l'action qui était donnée au début. De nouveau, il y a une trace. Il y avait cette trace naturelle sur l'algèbre de von Neumann du groupe en prenant le coefficient qui vient avec l'élément neutre.

Maintenant, le coefficient de l'élément neutre est une fonction, et cette fonction, je l'intègre. Et grâce au fait que la mesure μ était préservée, ça, ça va faire une trace sur mon algèbre. Évidemment, quand l'espace était juste un point, les fonctions dessus, ce sont juste des coefficients complexes, et donc je retrouve exactement l'algèbre de von Neumann du groupe.

Mais évidemment, on ne va pas regarder des actions sur un point, on va en fait regarder des actions, comme je vais le dire tout de suite, qui sont libres, au moins dans un sens mesurable. Comme par exemple, une action qu'on va regarder beaucoup, c'est l'action de Bernoulli, qui part d'un espace de probabilités donné, par exemple deux points avec certains poids, et ensuite on prend le produit infini indexé par Γ, et le groupe opère dessus en translatant les indices du produit infini. Il y a aussi des exemples très intéressants, avec des résultats très intéressants dessus, pour les réseaux dans les groupes de Lie, et en particulier des actions de source géométrique comme ça, comme l'action de $\mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})$ sur le tore $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$, ça aussi c'est un bel exemple d'action qui préserve une mesure de probas.

Dans le cas des groupes, j'ai tout de suite expliqué quand l'algèbre de von Neumann d'un groupe était un facteur. Il y avait un critère très facile, le groupe devait être suffisamment non-abélien, c'est-à-dire que les classes de conjugaison devaient être infinies. Ici c'est un peu plus subtil, il y a une condition suffisante, mais qui est en même temps très naturelle, et donc on obtiendra de nouveau un facteur comme produit croisé, sous les deux hypothèses suivantes.

D'abord, on ne va pas regarder les actions triviales, mais on va regarder, de l'autre côté, les actions qui sont essentiellement libres. La liberté dans ce contexte, dans ce contexte mesurable, dit qu'on va supposer que presque tout point a un stabilisateur trivial. Quand on pense aux chiffres de Bernoulli, évidemment, ce n'est pas libre tel quel.

Il y a des points dans le produit infini qui sont le même point partout, et qui sont fixés évidemment par le shift. Mais ces points qui sont fixés par un élément sont de mesure nulle. Deuxièmement, on va supposer que l'action est ergodique, et donc l'ergodicité dans ce contexte, ça veut par exemple dire que les fonctions sur X qui sont Γ-invariantes doivent être constantes à mesure nulle près.

Et sous ces deux hypothèses, actions libres et ergodiques, on obtient comme produit croisé, comme construction de Murray-von Neumann, de nouveau un facteur de type II_1. Non seulement, et là, je vais mentionner ça plus en détail après, on obtient comme ça une algèbre de von Neumann, mais l'algèbre de von Neumann vient avec une sous-algèbre abélienne favorite, et la terminologie n'est peut-être pas si bien choisie que ça, qu'on appelle sous-algèbre de Cartan. Et c'est quoi une sous-algèbre de Cartan dans une algèbre de von Neumann ? C'est une sous-algèbre qui est abélienne, mais qui est abélienne maximale.

Donc ça veut dire que si un opérateur dans l'algèbre commute avec la sous-algèbre, l'opérateur doit être dans la sous-algèbre. Donc c'est une sous-algèbre abélienne maximale, qui, comme dans le cas des groupes, se comporte un peu comme un sous-groupe normal, ça veut dire qu'il est normalisé par beaucoup d'éléments unitaires de l'algèbre. Bon, ça c'était peut-être une notion un peu trop technique, mais ce qui est très intéressant à retenir, par contre, c'est de nouveau dans cette philosophie qu'en prenant cette construction d'algèbre de von Neumann, on efface beaucoup de la structure.

Parce que tout de suite, je vais de nouveau vous montrer un théorème d'isomorphisme qui montre que sous des hypothèses assez mildes[3], beaucoup de produits croisés comme ça sont isomorphes. Mais quand on rajoute un peu à la structure, on ne prend pas seulement l'algèbre, mais aussi la position de sa sous-algèbre favorite, l'inclusion contient plus d'informations. Et l'inclusion, on peut dire exactement quelles informations elle retient.

L'inclusion ne retient pas le groupe et son action, non. L'inclusion retient un objet de la théorie mesurable des groupes qu'on appelle la relation d'équivalence orbitale. Donc en fait, l'inclusion contient exactement les mêmes informations que la relation d'équivalence suivante, c'est la relation d'équivalence sur l'ensemble X qui dit que deux points sont équivalents s'ils ont la même orbite sous l'action de Γ.

Et c'est toute une étude en soi de regarder les actions de groupe et leurs relations d'équivalence orbitale associées. La raison pour laquelle j'ai donc introduit le mot algèbre de Cartan et ce théorème d'Isy[4] Singer, c'est que vers la fin, je vais vous montrer des théorèmes qui montrent que certains facteurs ont une unique sous-algèbre de Cartan. Et comme la position de la sous-algèbre de Cartan nous donne plus d'informations, nous donne cette relation d'équivalence, ça veut donc dire que dès qu'on a un théorème d'unicité de sous-algèbre de Cartan, on peut récupérer cette relation d'équivalence orbitale juste à partir du facteur.

Mais d'abord, de nouveau, dichotomie moyennable / non-moyennable. En appliquant de nouveau le théorème de Connes, dès qu'on prend un groupe moyennable, n'importe quel groupe moyennable infini, et n'importe quelle action de ce groupe, libre, ergodique et préservant la mesure. C'est ça, les hypothèses qu'on prend tout le temps.

Il y a beaucoup d'actions comme ça. Pour toutes ces actions, les produits croisés sont toujours isomorphes. Ils sont toujours isomorphes à cet unique facteur de type II_1 hyperfini qu'on a vu au début.

Donc ça, c'est un côté du spectre. Et de l'autre côté, il y a de nouveau des phénomènes de superrigidité. Le plus facile à énoncer, c'est le théorème suivant, qui est en fait une combinaison de plusieurs résultats avec le point final mis par Adrian Ioana en 2010.

[3] ???

[4] Isadore

Quand on prend un groupe comme par exemple $\mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})$, mais en général, n'importe quel groupe avec la propriété T de Kazhdan, et on prend son action par décalage Bernoulli, alors la seule façon de produire la même algèbre de von Neumann par produit croisé, c'est parce qu'on a pris les mêmes groupes et les mêmes actions. Donc dans ce cas extrême, qui est complètement à l'opposé de la moyennabilité, on a le phénomène complètement opposé, qu'on retrouve à la fois le groupe et son action, juste en regardant l'algèbre de von Neumann. C'est même l'action qu'on retrouve ici.

Donc c'est encore plus. Et donc effectivement, en théorie mesurable des groupes, il y a aussi des résultats comme ça, par exemple les résultats de Zimmer et Margulis, qui montrent que, par exemple pour les actions de réseau dans les groupes de Lie de rang supérieur, comme ces groupes-ci, alors, on peut toujours récupérer l'action de la relation d'équivalence, sous certaines hypothèses. Donc, pour démontrer ce genre de résultat, mais pas ce résultat spécifique, mais en général, pour récupérer un groupe et son action juste à partir de son algèbre ambiante, comme je disais, la position de cette sous-algèbre de Cartan est cruciale, et donc l'unicité, cette question d'unicité de sous-algèbre de Cartan, est une question cruciale ici.

Donc tout d'abord, il y a des facteurs qui n'ont pas de sous-algèbre de Cartan. Par exemple, les facteurs du groupe libre n'admettent pas ce genre de sous-algèbre de Cartan. La question d'unicité est subtile, parce qu'il y a aussi des exemples assez faciles à construire, où un facteur II_1 peut avoir plusieurs sous-algèbres de Cartan, et même plusieurs à n'importe quel type d'équivalence près, donc ça, c'est un résultat d'Alain Connes et Vaughan Jones.

Par contre, avec Sorin Popa, on a démontré que quand on prend des produits croisés, avec les groupes libres, alors pour n'importe quel produit croisé par un groupe libre, le produit croisé a une unique sous-algèbre de Cartan, c'est-à-dire sa sous-algèbre de Cartan canonique. Et ça, c'est vrai non seulement pour les groupes libres, mais aussi pour tous les groupes hyperboliques non élémentaires. Et là, on va introduire une notion, parce que ça, c'est une propriété du groupe, parce que dire que pour n'importe quelle action, il y a unicité de Cartan, évidemment c'est une propriété du groupe Γ, et on va dire que ces groupes Γ-là sont Cartan-rigides, on retrouve toujours la sous-algèbre de Cartan par le théorème.

Il y a maintenant beaucoup de classes de groupes dont on sait démontrer l'unicité de leur sous-algèbre de Cartan, en particulier pour des produits libres quelconques, on sait démontrer ça, et je voulais montrer ce problème grandement ouvert. On croit très fortement que ce phénomène est vrai aussi en général pour les réseaux dans les groupes de Lie simples de rang supérieur, mais en particulier pour $\mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})$, mais on n'a vraiment pas les outils pour le moment pour démontrer ça. Or, ce théorème d'unicité de Cartan, ce n'est peut-être pas exactement facile à saisir, ce qu'on peut faire avec ça, mais je veux vous montrer un corollaire qui s'explique mieux, et qui revient vers les groupes libres et l'isomorphisme des algèbres de von Neumann des groupes libres.

J'ai dit que c'est complètement ouvert de décider si l'algèbre de von Neumann du groupe libre à n générateurs est isomorphe à l'algèbre du groupe libre à m générateur. Ça c'est complètement ouvert. Par contre, comme corollaire du résultat, dès que ces groupes opèrent sur un espace, de n'importe quelle façon, libre et ergodique, alors si les produits croisés sont isomorphes, alors le nombre de générateurs doit être le même.

Comment peut-on déduire ça de ce théorème ? Le théorème que Popa et moi avons démontré dit qu'il y a unicité de sous-algèbre de Cartan, ça veut donc dire, par unicité de sous-algèbre de Cartan, si j'ai un isomorphisme, l'isomorphisme va envoyer $L^\infty(X)$ sur $L^\infty(Y)$. Ça veut donc dire que l'isomorphisme préserve l'inclusion. Ça veut donc dire que l'isomorphisme induit un isomorphisme de cette relation d'équivalence.

Et ça, c'est une notion en théorie mesurable des groupes qu'on appelle l'équivalence orbitale des actions. C'est une notion très intéressante en elle-même. Une équivalence orbitale des actions, c'est un isomorphisme entre les espaces qui envoie presque partout les orbites sur les orbites.

De nouveau c'est une notion subtile, parce qu'il y a un théorème de Ornstein-Weiss, qui est un peu la contrepartie du théorème de Connes, qui dit que quand je prends un groupe moyennable, alors deux actions de deux groupes moyennables sont toujours orbitalement équivalentes. Donc on peut être orbitalement équivalent avec des groupes qui sont complètement non-isomorphes. Mais du coup, il n'y a pas de n et de m pour conclure quelque chose, mais il y aura une conclusion, et je vais revenir dessus.

Comme on préserve les sous-algèbres de Cartan, ça induit une équivalence orbitale. Et maintenant, ça pose la question, si j'ai le groupe libre $\mathbb{F}_2$ et le groupe libre $\mathbb{F}_3$, est-ce qu'il peut y avoir une équivalence orbitale entre leurs actions ? Alors ça, ce n'est pas possible, parce qu'il y a des invariants. Il y a deux types d'invariants, les deux introduits par Damien Gaboriau.

Damien Gaboriau a introduit deux invariants pour les relations d'équivalence. Le premier invariant s'appelle le coût, et le coût, c'est un peu une version mesurable du rang d'un groupe, le nombre minimal de générateurs. Quoiqu'ici, les générateurs ont aussi un domaine dans X, donc le coût peut être un nombre réel, mais il y a un invariant au moins, et il démontre que le coût d'une relation donnée comme relation orbitale d'un groupe libre est effectivement n. Il y a un invariant qui reproduit le n à partir de la relation d'équivalence.

Aussi les nombres de Betti L^2 ont été définis en toute généralité pour les relations d'équivalence par Damien Gaboriau, et le premier nombre de Betti L^2 de cette relation d'équivalence va être $n-1$, donc de nouveau, il y a un invariant qui produit ça. Maintenant, pour revenir à la question, si on avait pris ici un groupe hyperbolique et ici aussi un groupe hyperbolique, au moins la conclusion est que les deux groupes doivent être mesurablement équivalents. Par exemple, ils ont les mêmes nombres de Betti, ils ont beaucoup de propriétés en commun.

Mais on ne peut pas conclure que les deux groupes sont isomorphes, ça, ce n'est pas vrai. OK, je crois que je vais m'arrêter là. Merci beaucoup.

(Applaudissements).

La Présidente de séance : Merci beaucoup. Est-ce qu'il y a des questions, des remarques ?

Un auditeur : ... ?

Stefaan Vaes : On n'a pas d'outil pour... En principe ça pourrait être le cas, mais on ne sait pas du tout. Non, on n'a pas d'outil pour ça.

Un auditeur : Si j'ai bien retenu, il y a cette question de Connes qui demande si l'algèbre de von Neumann de $\mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})$ pour n supérieur détermine le groupe. Si tu ne travailles qu'avec des groupes qui sont des réseaux, tout simplement pour commencer, plutôt qu'avec $\mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})$, est-ce qu'au moins tu détermines n ?

Stefaan Vaes : Non, même ça, c'est ouvert. Il n'y a qu'un cas, c'est le réseau dans $\mathrm{SP}(1, n)$, parce que là, il y a un invariant qui fait référence à la moyennabilité faible de ce groupe, et une constante qui va avec, qui s'appelle la constante Cowling-Haagerup.

Cette constante est aussi un invariant de l'algèbre de von Neumann. Donc, pour les réseaux, dans $\mathrm{SP}(1, n)$, on retrouve le n. C'est vraiment la seule chose qui est connue sur l'isomorphisme ou non-isomorphisme des réseaux dans les groupes de Lie.

La Présidente de séance : D'autres questions ? On va remercier encore Stéphane.

(Applaudissements).