

SUR LES ANALOGUES ALGÈBRIQUES DES GROUPES SEMI-SIMPLES COMPLEXES

M. J. TITS (BRUXELLES)

§ 1 – INTRODUCTION

1. Les groupes de Lie complexes simples¹, connus grâce aux travaux de W. Killing et de E. Cartan, sont les *groupes classiques* : $\mathbf{A}_n = \mathrm{PGL}_{n+1}(\mathbb{C})$, $\mathbf{B}_n = \mathrm{PO}_{2n+1}(\mathbb{C})$, $\mathbf{C}_n = \mathrm{PS}_{p_{2n}}(\mathbb{C})$, $\mathbf{D}_n = \mathrm{PO}_{2n}^+(\mathbb{C})$ ($n \geq 3$), et les *groupes exceptionnels*, au nombre de cinq : $\mathbf{G}_2, \mathbf{F}_4, \mathbf{E}_6, \mathbf{E}_7, \mathbf{E}_8$ ².

On a envisagé depuis longtemps³ des groupes classiques définis sur un corps quelconque⁴. Dans un travail récent [2], C. Chevalley définit pour tout groupe simple complexe G et tout corps K un groupe G_K que l'on peut appeler "l'analogue de G sur K "⁵. La méthode de Chevalley repose sur une analyse détaillée de la structure des groupes simples complexes ; elle est purement algébrique et diffère essentiellement de la méthode usuelle de définition des groupes classiques sur K qui peut être qualifiée de "géométrique". La question se pose alors naturellement de définir géométriquement des analogues sur K de tous les groupes complexes simples, et en particulier des groupes exceptionnels.

La recherche d'interprétations géométriques des groupes exceptionnels a donné lieu à de nombreux travaux qui ont permis notamment la mise en évidence de liens étroits existant entre ces groupes et l'algèbre des octaves de Cayley (cf. par ex. [3], [6], [10], [11], [7]). Les interprétations des groupes exceptionnels obtenues dans ce cadre se prêtent cependant mal, pour diverses raisons, au "passage à un corps quelconque"⁶. Abordant par une voie nouvelle le problème de l'interprétation géométrique des groupes simples complexes, j'ai été conduit (cf. notamment [12], [13], [14], [15], [16]) à associer à chacun de ces groupes G une "géométrie" $\Gamma(G)$ ayant un groupe d'automorphismes isomorphe à G ⁷ ; à titre d'exemple, la géométrie associée au groupe $\mathrm{PGL}_{n+1}(\mathbb{C})$ est la géométrie projective complexe à n dimensions et $\mathrm{PGL}_{n+1}(\mathbb{C})$ est le groupe des projectivités de cette géométrie. Partant d'une définition géométrique des géométries $\Gamma(G)$, où intervient explicitement le corps \mathbb{C} , j'ai proposé, dans l'introduction de [15]⁸, une façon de définir des "analogues des $\Gamma(G)$ sur un corps quelconque K ", les géométries $\Gamma_K(G)$ ainsi obtenues possédant – si elles existent – des groupes

Associé du Fonds National de la Recherche Scientifique.

¹J'entends : algébriquement simples, c'est-à-dire dénués de tout sous-groupe invariant.

²Les notations $\mathrm{PGL}_{n+1}(\mathbb{C})$, $\mathrm{PO}_{2n+1}(\mathbb{C})$, etc. sont celles de J. DIEUDONNÉ [4] ; \mathbb{C} désigne le corps des nombres complexes.

³Cf. [4], [17], et les index bibliographiques de ces ouvrages.

⁴"Corps" signifie dans cette conférence corps commutatif, sauf mention expresse du contraire.

⁵Il faut souligner le fait que, pour G et K donnés, le groupe G_K est *unique*. Lorsque G est un groupe orthogonal, G_K est le groupe orthogonal de même dimension sur K , correspondant à une forme quadratique d'indice maximal.

⁶Notons d'ailleurs qu'il s'agit, en fait, d'interprétations, non des groupes exceptionnels eux-mêmes, mais de certaines formes réelles de ces groupes dont il n'existe pas d'équivalent sur tout corps.

⁷Le langage des "géométries", employé ici, a été introduit dans [16] ; dans les autres articles cités, j'utilisais celui des "espaces". Les deux modes d'expression sont équivalents en ce sens que toute proposition exprimée en langage de géométrie peut être traduite en terme d'espace et vice-versa ; il faut noter, toutefois, que le langage des géométries a sur l'autre l'avantage de conduire généralement à des énoncés plus ramassés et plus symétriques, mais qu'il est, en contrepartie, plus éloigné de l'intuition géométrique usuelle.

Il faut prendre garde au fait que le groupe G n'est pas nécessairement le groupe de *tous* les automorphismes de la géométrie $\Gamma(G)$.

⁸Au langage près ; cf. la note précédente.

d'automorphismes G_K généralisant naturellement les groupes d'automorphismes G des géométries $\Gamma(G)$ ⁹. Deux questions importantes restaient posées : la géométrie $\Gamma_K(G)$ existe-t-elle quels que soient G et K ? (la réponse est évidemment affirmative lorsque G est un groupe classique ; dans [15] je donnais des indications permettant d'arriver à la même conclusion dans le cas du groupe \mathbf{E}_6), et dans l'affirmative, les groupes G_K sont-ils identiques aux groupes G_K de Chevalley ? Il faut noter que, même dans le cas des groupes classiques, la réponse à cette seconde question n'est pas évidente : les groupes classiques G_K obtenus par le procédé géométrique décrit ci-dessus coïncident par définition même avec les groupes classiques sur K usuels, mais il n'en va pas de même pour les groupes "des types classiques" de Chevalley¹⁰.

Comme on peut s'y attendre, la réponse aux deux questions posées ci-dessus est affirmative. La façon la plus directe d'obtenir ce résultat, consiste à étendre aux groupes de Chevalley la théorie des géométries associées $\Gamma(G)$. Ceci m'a conduit à étudier les fondements axiomatiques de cette théorie c'est-à-dire à rechercher quelles sont les classes de groupes auxquels elle s'applique. Cette axiomatique et son application aux groupes de Chevalley font l'objet principal de la présente conférence.

En s'efforçant de simplifier la méthode de E. Cartan pour la détermination des groupes simples complexes, E. Witt [19], et plus tard E. B. Dynkin [5], ont été amenés à associer à ces groupes certains schémas que j'appelle schémas de Witt-Dynkin (cf. fig. 1)¹¹. Outre les groupes G et les géométries associées $\Gamma(G)$, interviendront ici, de façon essentielle, des schémas généralisant les schémas de Witt-Dynkin ; la théorie que j'exposerai est une théorie axiomatique des liens existant entre ces trois types d'êtres. Pour y arriver, je commencerai par analyser ces liens dans un cas particulier, celui de la classe des groupes projectifs $\mathrm{PGL}_{n+1}(C)$; les géométries associées sont les géométries projectives complexes des diverses dimensions et les schémas sont les schémas \mathbf{A}_n de la figure 1.

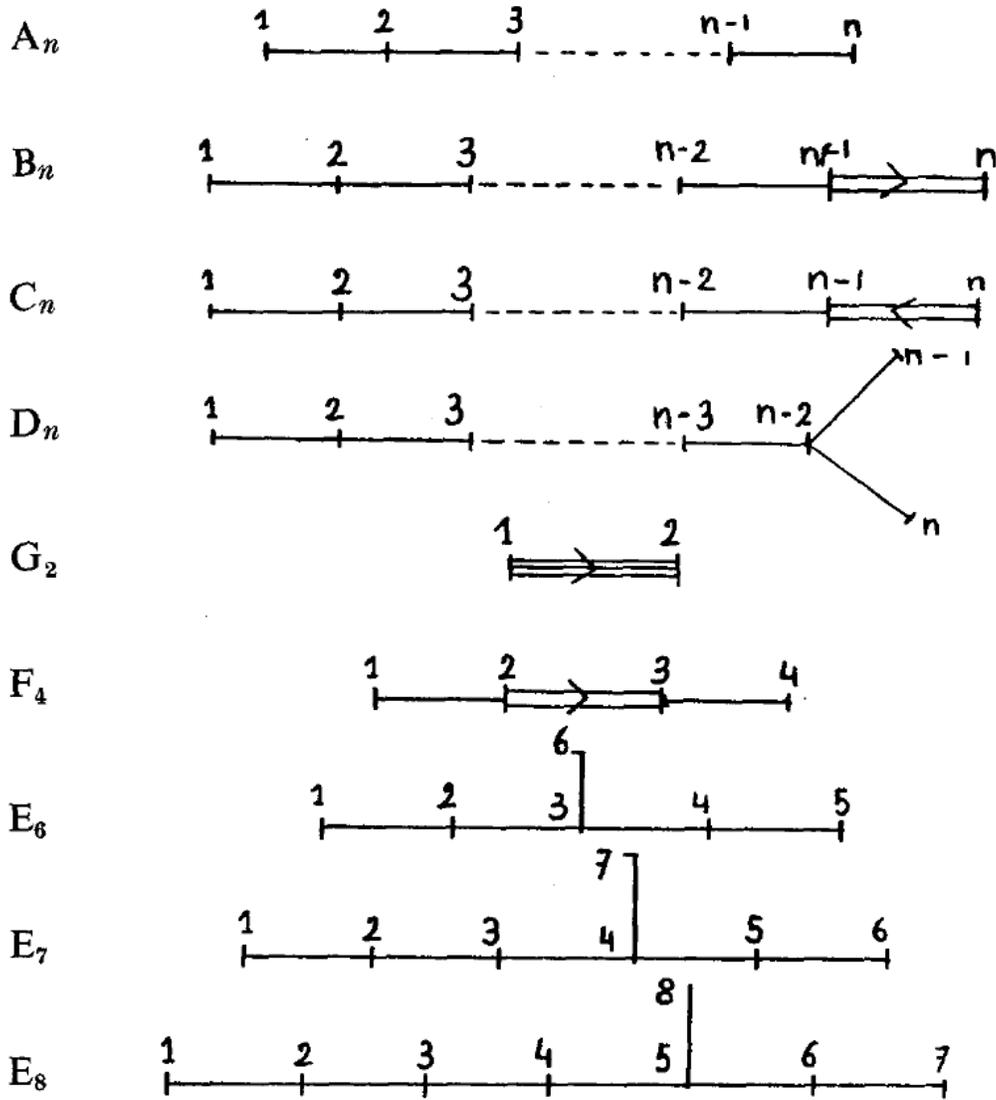
Il me paraît difficile de donner une démonstration générale, c'est-à-dire comportant un traitement simultané des divers groupes, et raisonnablement simple de l'existence des groupes de Chevalley définis géométriquement, de la façon décrite ci-dessus ; ceci met en évidence un avantage du procédé de définition de Chevalley. En ce qui concerne leur application aux groupes de Chevalley – elles en ont bien d'autres sur lesquelles j'espère revenir ultérieurement – les considérations générales développées ici sont donc à envisager sous l'angle suivant : ces groupes étant définis, et leur existence démontrée, par voie algébrique, elles fournissent la possibilité de leur appliquer les fécondes méthodes d'investigations géométriques. Il convient de noter à ce propos que les résultats obtenus permettent non seulement d'associer une géométrie déterminée à tout groupe de Chevalley, mais encore d'obtenir aisément de nombreuses propriétés, du type notamment des propriétés d'incidence

⁹Dans le cas du groupe \mathbf{E}_6 , par exemple, G_K est le groupe $G_p^{(K)}$ dont il est question dans [15] (p. 36).

¹⁰Dans [2], C. CHEVALLEY indique que les groupes G_K sont "presque certainement" identiques aux groupes usuels dans les cas classiques. J'ai démontré qu'il en est bien ainsi, par une méthode géométrique dont j'indiquerai ici le principe (cf. n° 9) en me bornant, pour le détail, à traiter un cas particulier (cf. n° 10). Une autre démonstration du même fait, basée sur la théorie des représentations linéaires, a été donnée par P. CARTIER ; elle n'a pas jusqu'ici, à ma connaissance, fait l'objet d'une publication.

¹¹Ces schémas, qui portent dans la littérature des noms divers, ont été introduits par H. S. M. COXETER à l'occasion de l'étude des polytopes réguliers et des groupes finis engendrés par des réflexions. Le mode de représentation faisant intervenir des traits doubles et triples orientés est celui que j'ai introduit dans [14]. Les sommets des schémas de la fig. I sont numérotés pour faciliter la suite de l'exposé.

des variétés linéaires dans un espace projectif, des diverses géométries ainsi définies (cf. [14], [15], [16]).



§ 2. — ANALYSE D'UN EXEMPLE : GÉOMÉTRIES ET GROUPES PROJECTIFS

2. Nous désignerons par \mathcal{P}_n l'espace projectif complexe¹² à n dimensions. La géométrie¹³ de cet espace est caractérisée par la donnée des points, droites, plans, 3-plans, ..., hyperplans (= $(n - 1)$ -plans), et, si ces variétés sont données abstraitement (et non comme des ensembles de points), de leur relation d'incidence entre elles. Associons à l'espace \mathcal{P}_n le schéma A_n de la figure 1, les sommets 1, 2, ..., n étant associés respectivement à la famille des points, des droites, ..., des hyperplans

¹²Tout ce que nous disons dans ce § est en fait valable sur un corps quelconque, commutatif ou non, possédant un antiautomorphisme (c'est-à-dire isomorphe à son opposé).

¹³L'emploi des mots "géométrie" et "espace" dans ce § est guidé par des considérations faisant appel à l'usage courant plus qu'à la logique. Au § 4, nous restreindrons la portée du terme "géométrie" en lui donnant une signification précise.

de \mathcal{P}_n ; nous allons examiner les propriétés de la correspondance ainsi établie.

Il apparaît en premier lieu que les sommets du schéma sont rangés par ordre de dimension croissante des variétés qu'ils représentent. Cependant, cette propriété fait intervenir la notion de dimension que nous désirons écarter en vue des généralisations ; par ailleurs, le sens de la numérotation des sommets du schéma \mathbf{A}_n nous importe peu, une inversion de ce sens correspondant à une dualité de \mathcal{P}_n . Nous retiendrons par contre une autre expression des liens existant entre l'ordre des sommets du schéma \mathbf{A}_n et les propriétés des variétés linéaires de \mathcal{P}_n . Désignons par \mathcal{F}_s la famille de variétés linéaires de \mathcal{P}_n correspondant au sommet s du schéma \mathbf{A}_n (c'est-à-dire, la famille des $(s - 1)$ -plans de \mathcal{P}_n). On voit alors que

(2.1) *Deux sommets a et b du schéma \mathbf{A}_n sont séparés par un troisième sommet c si et seulement si deux variétés appartenant aux familles \mathcal{F}_a et \mathcal{F}_b sont incidentes entre elles dès qu'elles sont incidentes à une même variété de la famille \mathcal{F}_c .*

Certaines relations entre espaces projectifs de diverses dimensions se retrouvent aussi sur les schémas associés. Ainsi, la donnée dans \mathcal{P}_n d'un $(i - 1)$ -plan ϖ conduit à la considération de deux nouveaux espaces projectifs, un espace à $i - 1$ dimensions dont les points, les droites, ..., les hyperplans sont les points, les droites, ..., les $(i - 2)$ -plans de \mathcal{P}_n incidents à ϖ , et un espace à $n - i$ dimensions dont les points, les droites, ..., les hyperplans sont les i -plans, les $(i + 1)$ -plans, ..., les hyperplans de \mathcal{P}_n incidents à ϖ ; ceci est à rapprocher du fait que si on retire du schéma \mathbf{A}_n le sommet i et les traits qui y aboutissent, le schéma restant se décompose en un schéma \mathbf{A}_{i-1} et un schéma \mathbf{A}_{n-i} . Pour exprimer simplement le lien entre les deux faits précédents, nous introduirons la notion de *somme directe* de deux espaces projectifs, être géométrique obtenu en considérant simultanément les deux espaces en question et en déclarant chaque variété du premier espace incidente à chaque variété du second.

(2.2) *On associera à la somme directe de deux espaces la réunion disjointe des schémas associés à ces espaces.*

Moyennant cette convention, la constatation faite ci-dessus peut s'exprimer comme suit :

(2.3) *Les variétés linéaires de \mathcal{P}_n incidentes à une variété donnée, appartenant à la famille \mathcal{F}_s , constituent l'être géométrique (espace projectif ou somme directe d'espaces projectifs) dont le schéma associé s'obtient en retirant du schéma \mathbf{A}_n le sommet s et les traits qui y aboutissent.*

Notons que (2.1) est une conséquence immédiate de (2.2) et (2.3).

Soient $G^{(n)}$ le groupe des projectivités de \mathcal{P}_n , et $G_1^{(n)}, G_2^{(n)}, \dots, G_n^{(n)}$ les sous-groupes de $G^{(n)}$ formés respectivement par les projectivités conservant un point, une droite, ..., un hyperplan, deux à deux incidents, donnés dans \mathcal{P}_n . Les points, les droites, ..., les hyperplans de \mathcal{P}_n peuvent alors être représentés, de la façon usuelle, par les classes latérales à droite de $G_1^{(n)}, G_2^{(n)}, \dots, G_n^{(n)}$ dans $G^{(n)}$ (c'est-à-dire par les points des espaces homogènes $G^{(n)}/G_1^{(n)}, G^{(n)}/G_2^{(n)}, \dots, G^{(n)}/G_n^{(n)}$), et deux variétés linéaires sont incidentes si et seulement si les classes latérales qui leurs correspondent ont une intersection non vide. Ainsi, tout propriété de l'espace \mathcal{P}_n peut se traduire sous forme d'une

propriété du groupe $G^{(n)}$ et des sous-groupes $G_i^{(n)}$; en particulier, les liens existant, comme il a été vu plus haut, entre les espaces projectifs \mathcal{P}_n des diverses dimensions et les schémas \mathbf{A}_n , donnent lieu à des liens entre ces mêmes schémas et les divers groupes $G^{(n)}$ et $G_i^{(n)}$, liens que nous n'explicitons pas ici, la question devant être reprise dans un cadre plus large au paragraphe suivant.

§ 3 – SYSTÈMES COMPLETS DE GÉOMÉTRIES, SCHÉMAS ASSOCIÉS, COLLECTIONS

3. Une *géométrie* $\Gamma(\mathcal{E}; \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots, \mathcal{F}_n; \iota; \mathbf{A})$ sera caractérisée par la donnée d'un ensemble d'*éléments* \mathcal{E} , répartis en *familles* \mathcal{F}_i , d'une *relation d'incidence* ι – relation binaire réflexive et symétrique définie sur cet ensemble – et d'un *groupe*¹⁴ d'*“automorphismes”* de la structure ainsi définie, c'est-à-dire de permutations des éléments de \mathcal{E} *conservant chaque famille* \mathcal{F}_i ainsi que la relation ι . On devra admettre, pour la simplicité de l'exposé, que certaines des familles \mathcal{F}_i puissent être vides. Le nombre n des familles \mathcal{F}_i , que nous supposons fini, sera appelé l'*indice* de la géométrie Γ .

Exemples. (3.1) Soient K un corps quelconque, commutatif ou non, \mathcal{P}_n l'espace projectif à n dimensions sur K , \mathcal{F}_i l'ensemble des variétés linéaires de dimension $i - 1$ de \mathcal{P}_n , \mathcal{E} la réunion des ensembles $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots, \mathcal{F}_n$, ι la relation d'incidence usuelle entre variétés linéaires de \mathcal{P}_n et \mathbf{A} le groupe des projectivités (transformations linéaires) de \mathcal{P}_n . Nous appellerons *géométrie de* \mathcal{P}_n , ou *géométrie projective à n dimensions sur K* , la géométrie $\Gamma(\mathcal{E}; \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots, \mathcal{F}_n; \iota; \mathbf{A})$.

(3.2) Soient K et \mathcal{P}_n définis comme ci-dessus, et considérons une polarité τ (resp., K étant supposé commutatif, une hyper-quadrique χ) non dégénérée, donnée dans \mathcal{P}_n . Une variété linéaire à $i - 1$ dimensions est dite appartenir à τ (resp. à χ) si elle est contenue dans sa variété polaire, à $n - i$ dimensions, par rapport à τ (resp. si elle est contenue dans χ) ; soient \mathcal{F}_i l'ensemble de ces variétés, \mathcal{E} la réunion des \mathcal{F}_i , r la valeur maximum de i telle que \mathcal{F}_i ne soit pas vide, ι la relation d'incidence usuelle entre éléments de \mathcal{E} , et \mathbf{A} le groupe des projectivités de \mathcal{P}_n conservant τ (resp. χ). Nous appellerons *géométrie de la polarité* τ (de l'*hyperquadrique* χ) la géométrie $\Gamma(\mathcal{E}; \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots, \mathcal{F}_r; \iota; \mathbf{A})$, sauf si K est commutatif, $n = 2r - 1$, et si τ est la polarité par rapport à une hyper-quadrique χ (resp. si $n = 2r - 1$ et si la polarité τ associée à χ n'est pas dégénérée). On sait que, dans cette dernière éventualité, les variétés à $r - 1$ dimensions appartenant à τ (ou à χ) se répartissent en deux “modes”, \mathcal{F}'_r , et \mathcal{F}''_r , tels que toute variété à $r - 2$ dimensions appartenant à τ (à χ) soit l'intersection de deux variétés à $r - 1$ dimensions de modes contraires, bien déterminées ; désignons par \mathcal{E}^+ le complémentaire de \mathcal{F}_{r-1} dans \mathcal{E} , par \mathbf{A}^+ le sous-groupe de \mathbf{A} formé des projectivités conservant chacun des modes de variétés à $r - 1$ dimensions, \mathcal{F}'_r , et \mathcal{F}''_r , et par ι^+ la relation d'incidence ι élargie par la convention suivante : deux variétés à $r - 1$ dimensions de modes contraires seront incidentes (pour ι^+) si leur intersection est une variété à $r - 2$ dimensions ; nous appellerons alors, dans ce cas, *géométrie de* τ (ou de χ), la géométrie $\Gamma(\mathcal{E}^+; \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots, \mathcal{F}_{r-2}, \mathcal{F}'_r, \mathcal{F}''_r; \iota^+; \mathbf{A}^+)$.

(3.3) Nous appellerons *somme directe* de deux géométries $\Gamma'(\mathcal{E}'; \mathcal{F}'_1, \dots, \mathcal{F}'_{n'}; \iota'; \mathbf{A}')$ et $\Gamma''(\mathcal{E}''; \mathcal{F}''_1, \dots, \mathcal{F}''_{n''}; \iota''; \mathbf{A}'')$ la géométrie $\Gamma(\mathcal{E}' \cup \mathcal{E}''; \mathcal{F}'_1, \dots, \mathcal{F}'_{n'}, \mathcal{F}''_1, \dots, \mathcal{F}''_{n''}; \iota; \mathbf{A}' \times \mathbf{A}'')$, où $\mathbf{A}' \times$

¹⁴La considération du groupe \mathbf{A} n'est pas toujours indispensable et il y a parfois intérêt à en faire abstraction, c'est-à-dire à envisager des géométries définies seulement comme ensembles d'éléments répartis en familles et munis d'une relation d'incidence. Pour faire rentrer ces géométries “agroupales” dans le cadre de notre étude, il suffit de convenir que le groupe \mathbf{A} qui leur correspond est réduit à l'élément neutre.

\mathbf{A}' opère de la façon naturelle sur $\mathcal{E}' \cup \mathcal{E}''$, et où la relation d'incidence ι est définie comme suit : ι se réduit respectivement à ι' et à ι'' sur \mathcal{E}' et \mathcal{E}'' , et tout élément de \mathcal{E}' est incident (pour ι) à tout élément de \mathcal{E}'' .

(3.4) Etant donné un élément quelconque $a \in \mathcal{E}$, que nous supposons pour fixer les idées appartenir à la famille \mathcal{F}_1 , nous appellerons *géométrie résiduelle de la géométrie* $\Gamma(\mathcal{E}; \mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n; \iota; \mathbf{A})$ par rapport à l'élément a , la géométrie $\Gamma(\mathcal{E}'; \mathcal{F}'_2, \dots, \mathcal{F}'_n; \iota'; \mathbf{A}')$ définie comme suit : \mathcal{E}' est l'ensemble des éléments de \mathcal{E} incidents à a et n'appartenant pas à \mathcal{F}_1 ¹⁵, $\mathcal{F}'_i = \mathcal{E}' \cap \mathcal{F}_i$ est l'ensemble des éléments de \mathcal{F}_i incidents à a , ι' est la restriction de ι à \mathcal{E}' et \mathbf{A}' est le groupe des éléments de \mathbf{A} qui conservent a , considéré comme opérant sur \mathcal{E}' .

Nous dirons qu'un ensemble, fini ou infini, de géométries est un *système complet* si toute géométrie résiduelle d'une géométrie de l'ensemble est isomorphe à une géométrie de l'ensemble. Il en est ainsi par exemple de l'ensemble des géométries projectives des diverses dimensions sur un corps donné K quelconque.

4. Considérons un système complet Σ de géométries, et demandons-nous s'il est possible, comme dans le cas des géométries projectives (cf. § 2), d'associer biunivoquement aux géométries P du système Σ des "schémas" $S(P)$ tels que la condition suivante soit remplie :

(4.1) Les "sommets" du schéma $S(\Gamma)$ représentent les familles d'éléments de Γ , et le schéma associé à la géométrie résiduelle de Γ par rapport à un élément a s'obtient en retirant de $S(\Gamma)$ le sommet correspondant à la famille à laquelle appartient a .

La réponse est en général négative. En effet, pour qu'il existe de tels schémas, il est évidemment nécessaire que toute géométrie Γ appartenant à Σ possède la propriété suivante :

(4.2) Les géométries résiduelles de Γ par rapport à deux éléments quelconques d'une même famille sont isomorphes entre elles. Nous allons voir que cette condition est aussi suffisante pourvu qu'on donne un sens suffisamment large au mot "schéma".

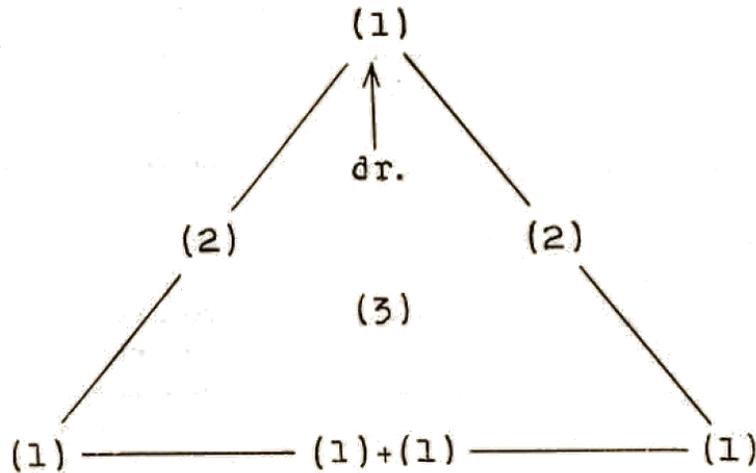
Considérons un système complet Σ de géométries possédant toutes la propriété (4.2). Nous commencerons par définir la *géométrie* Γ_{i_1, \dots, i_r} *résiduelle d'une géométrie* Γ *par rapport à un ensemble de familles d'éléments de* Γ , $\mathcal{F}_{i_1}, \dots, \mathcal{F}_{i_r}$. S'il est possible de trouver des éléments $a_{i_1} \in \mathcal{F}_{i_1}, \dots, a_{i_r} \in \mathcal{F}_{i_r}$, Γ_{i_1} sera la géométrie résiduelle de Γ par rapport à a_{i_1} , Γ_{i_1, i_2} la résiduelle de Γ_{i_1} par rapport à a_{i_2}, \dots , et Γ_{i_1, \dots, i_r} la résiduelle de $\Gamma_{i_1, \dots, i_{r-1}}$ par rapport à a_{i_r} ; sinon, Γ_{i_1, \dots, i_r} sera la "géométrie vide" (sans élément) d'indice $n - r$, n étant l'indice de Γ . La condition (4.2) étant remplie pour toutes les géométries de Σ , la géométrie Γ_{i_1, \dots, i_r} , ainsi définie, ne dépend pas de l'ordre des indices i_1, \dots, i_r ni du choix des éléments a_{i_1}, \dots, a_{i_r} .

On pourra à présent associer aux géométries de Σ des schémas satisfaisant à la condition (4.1) en

¹⁵On peut songer aussi à la géométrie Γ'' constituée par tous les éléments de \mathcal{E} incidents à a . Toutefois, nous serons amenés dans la suite à considérer surtout des géométries Γ telles que deux éléments distincts d'une même famille ne soient jamais incidents ; pour de telles Γ , Γ'' est la somme directe de Γ' et de la géométrie réduite au seul élément a .

procédant comme suit. Soit $\Gamma \in \Sigma$ une géométrie d'indice n . Considérons un simplexe S à $n - 1$ dimensions dont nous mettons les sommets s_1, \dots, s_n en correspondance avec les familles d'éléments de $\Gamma, \mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n$; attachons ensuite à chaque face $(s_{i_1}, \dots, s_{i_r})$ de S un symbole représentant la géométrie résiduelle de Γ par rapport à l'ensemble de toutes les familles \mathcal{F}_i avec $i \neq i_1, \dots, i_r$, ainsi que des signes individualisant autant qu'il est nécessaire les divers sommets de cette face. L'ensemble formé par le simplexe S et les symboles et signes attachés à ses diverses faces constituera le schéma $S(\Gamma)$ associé à la géométrie Γ .

Un exemple permettra de mieux comprendre la construction précédente. Soit Σ le système des géométries projectives et des sommes directes de géométries projectives sur un corps donné quelconque, commutatif ou non, possédant des antiautomorphismes.



Représentons par (n) la géométrie projective à n dimensions et par $+$ l'opération de somme directe. Le schéma associé à la géométrie (3) , par exemple, est alors celui de la fig. 2. La flèche indique celui des trois sommets du simplexe qui correspond aux droites de (3) ; aucun signe n'est nécessaire pour distinguer les points et les droites des géométries (2) , ni les points et les plans de la géométrie (3) , ceci en vertu du principe de dualité.

Nous avons ainsi montré la possibilité d'associer aux géométries d'un système complet Σ de géométries possédant la propriété (4.2) des schémas satisfaisant à la condition (4.1). On voit cependant que les schémas obtenus sont plus complexes que ceux de la fig. 1, et qu'en particulier une représentation graphique plane fait défaut pour les schémas associés aux géométries d'indice $n \geq 4$. Nous nous proposons d'indiquer à présent comment on peut, sous certaines conditions, simplifier les schémas introduits ici et, en particulier, les ramener dans le cas des géométries projectives aux schémas \mathbf{A}_n de la fig. 1.

Nous appellerons *schéma à k dimensions* d'une géométrie Γ la partie du schéma de Γ constituée par les faces de dimension $\leq k$ du simplexe correspondant et les symboles et signes qui leurs sont attachés. Remarquons alors que, dans la construction des schémas associés aux géométries de Σ , les symboles représentant les diverses géométries de Σ peuvent être remplacées par des signes quelconques (y compris, éventuellement, le "signe vide", c'est-à-dire l'absence de signe), et qu'il n'est pas nécessaire que les signes utilisés soient tous différents entre eux ; il suffit,

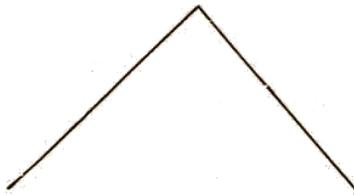
en effet, qu'ils permettent de distinguer entre elles les géométries de même indice n qui auraient même schéma à $n - 2$ dimensions. Une remarque analogue peut être faite pour les signes individualisant les sommets. En particulier, s'il existe un entier k tel que la condition suivante soit remplie :

(4.3 $_k$) Les schémas à k dimensions des géométries de Σ sont tous différents deux à deux, et les sommets du schéma $S(\Gamma)$ de toute géométrie $P \in \Sigma$ sont individualisés autant qu'il est nécessaire par la donnée du schéma partiel à k dimensions.

Il est inutile d'attacher aucun signe ou symbole aux faces de dimension $> k$ des simplexes constituant les schémas $S(\Gamma)$, et ceux-ci se réduisent alors simplement aux schémas à k dimensions correspondants. Notons encore, dans le cadre de la même remarque, qu'il y a intérêt à supprimer systématiquement – c'est-à-dire à remplacer par le "signe vide" – les symboles représentant des géométries qui sont des sommes directes ; lorsqu'on fait cette convention, les schémas associés aux géométries de Σ jouissent de la propriété suivante :

(4.4) Le schéma associé à la somme directe de deux géométries est la réunion disjointe des schémas associés à ces géométries.

Pour illustrer les remarques précédentes, reprenons l'exemple du système Σ des géométries projectives et des sommes directes de géométries projectives sur un corps K possédant des antiautomorphismes. Σ contenant une seule géométrie d'indice 1, le symbole correspondant (1) peut être supprimé (ou, éventuellement, remplacé par un point). En vertu de la convention générale préconisée ci-dessus nous supprimerons aussi le symbole (1) + (1), tandis que le symbole (2) sera remplacé par un simple trait.



Enfin, on peut supprimer tous les signes et symboles attachés aux simplexes de dimension > 1 , le système Σ jouissant de la propriété (4.3 $_1$). Avec ces conventions, le schéma de la fig. 2, par exemple, devient celui de la fig. 3, qui n'est autre que le schéma \mathbf{A}_3 (à une déformation près conservant le schéma à 1 dimension, le seul qui importe ici).

5. Dans la suite, nous aurons fréquemment à considérer des ensembles $G(G_1, \dots, G_n)$ formés d'un groupe G et de sous-groupes de celui-ci, G_1, \dots, G_n , en nombre n fini. Nous donnerons le nom de *collection d'indice n* à un tel ensemble. La *somme directe* de deux collections $G(G_1, \dots, G_n)$ et $G'(G'_1, \dots, G'_{n'})$ sera la collection $(G \times G')(G_1 \times G', \dots, G_n \times G', G \times G'_1, \dots, G \times G'_{n'})$.

Généralisant ce qui a été vu au § 2 à propos des groupes projectifs, nous pouvons associer à toute collection $G(G_1, \dots, G_n)$ une géométrie $\Gamma(\mathcal{E}; \mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n; \iota; \mathbf{A})$, définie comme suit : la famille \mathcal{F}_i est l'ensemble G/G_i , des classes latérales à droite de G_i dans G , \mathcal{E} est la réunion des \mathcal{F}_i , deux éléments de \mathcal{E} sont incidents pour ι si leur intersection – lorsqu'on les considère comme sous-ensembles de G

– n'est pas vide, et \mathbf{A} est le groupe G opérant de la façon usuelle sur \mathcal{E} ; ce groupe est isomorphe à G/U , où U est l'intersection

$$\bigcap_{g \in G, i} (g^{-1}G_i g),$$

c'est-à-dire le plus grand sous-groupe invariant de G contenu simultanément dans tous les G_i . La géométrie Γ ainsi définie sera encore notée $\Gamma(G; G_1, \dots, G_n)$.

Les géométries $\Gamma(\mathcal{E}; \mathcal{F}_i; \iota; \mathbf{A}) = \Gamma(G; G_i)$ ne sont pas des géométries quelconques. En particulier, elles possèdent les propriétés suivantes :

- (5.1) \mathbf{A} est transitif sur chaque famille \mathcal{F}_i .
- (5.2) Aucune des familles \mathcal{F}_i n'est vide.
- (5.3) Deux éléments distincts d'une même famille ne sont jamais incidents.
- (5.4) \mathcal{F}_i et \mathcal{F}_j étant deux familles données quelconques, \mathbf{A} est transitif sur les couples d'éléments incidents (a, a') avec $a \in \mathcal{F}_i$ et $a' \in \mathcal{F}_j$.
- (5.5) Il est possible de choisir dans chaque famille \mathcal{F}_i un élément a_i , de façon que les a_i soient deux à deux incidents.

On peut, à l'aide de ces propriétés, donner des géométries $\Gamma(G; G_i)$ et des systèmes complets de telles géométries les caractérisations très simples que voici :

Pour qu'une géométrie $\Gamma(\mathcal{E}; \mathcal{F}_i; \iota; \mathbf{A})$ soit de la forme $\Gamma(G; G_i)$, il faut et il suffit qu'elle possède les propriétés (5.1), (5.3), (5.4) et (5.5), ou encore, les propriétés (4.2), (5.3), (5.4) et (5.5).

Pour que les géométries d'un système complet soient toutes de la forme $\Gamma(G; G_i)$, il faut et il suffit qu'elles possèdent les propriétés (5.1), (5.2) et (5.3).

Considérons, en effet, une géométrie $\Gamma(\mathcal{E}; \mathcal{F}_i; \iota; \mathbf{A})$ possédant la propriété (5.5), et soient a_i des éléments choisis comme dans l'énoncé de cette propriété et \mathbf{A}_i le groupe des éléments de \mathbf{A} conservant a_i . Formons la géométrie $\Gamma(\mathbf{A}; \mathbf{A}_i) = \Gamma(\mathcal{E}'; \mathcal{F}'_i; \iota'; \mathbf{A}')$. Les \mathcal{F}'_i sont des sous-ensembles de \mathcal{F}_i et ι' est une relation plus fine que la restriction de ι à \mathcal{E}' . Il est facile de voir que $\mathcal{F}_i = \mathcal{F}'_i$ si et seulement si Γ possède la propriété (5.1) et que $\iota = \iota'$ si elle possède en outre les propriétés (5.3) et (5.4). De plus, la propriété (4.2) est une conséquence immédiate de la propriété (5.1) qui, à son tour, résulte des propriétés (5.4), (5.5) et (4.2). La première proposition énoncée ci-dessus se trouve ainsi démontrée, et la seconde s'en déduit immédiatement si l'on observe que (5.4) ne fait qu'exprimer la propriété (5.1) pour les résiduelles de Γ par rapport à ses divers éléments (Γ étant supposée posséder elle-même la propriété (5.1)) tandis que (5.5) exprime l'existence de résiduelles successives de Γ possédant la propriété (5.2).

Notons que si une géométrie $\Gamma(\mathcal{E}; \mathcal{F}_i; \iota; \mathbf{A})$ jouit des propriétés (5.1), (5.3), (5.4) et (5.5), elle peut se mettre d'une infinité de façon sous la forme $\Gamma(G; G_i)$, la forme $\Gamma(\mathbf{A}; \mathbf{A}_i)$ envisagée plus haut étant *minimum*, en ce qu'on la déduit de toute autre forme $\Gamma(G; G_i)$ en passant au quotient par le plus grand sous-groupe invariant U de G contenu dans l'intersection des G_i , c'est-à-dire que les collections $(G/U)(G_1/U, \dots, G_n/U)$ et $\mathbf{A}(\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_n)$ sont isomorphes.

6. Les conditions définissant un système complet de géométries de la forme $\Gamma(G; G_i)$ ont été données au n° 5 sous forme "géométrique" ; nous nous proposons de les exprimer à présent en termes de

groupes. Pour cela, nous devons au préalable dire quelques mots concernant les résiduelles des géométries $\Gamma(G; G_i)$.

Étant donnée une géométrie $\Gamma(G; G_i)$, désignons par $\Gamma^{(j)}(\mathcal{E}^{(j)}; \mathcal{F}_i^{(j)}(i \neq j); \iota^{(j)}; \mathbf{A}^{(j)})$ sa résiduelle par rapport à la famille \mathcal{F}_j correspondant à G_j . Il résulte de la définition de $\Gamma(G; G_i)$ que $\mathcal{F}_i^{(j)} = G_j / (G_i \cap G_j)$ est l'ensemble des classes latérales à droite de $G_i \cap G_j$ dans G_j , et que $\mathbf{A}^{(j)}$ est le groupe G_j opérant de la façon usuelle sur cet ensemble. Est-ce à dire que $\Gamma^{(j)}$ s'identifie avec la géométrie $\Gamma^{(j)}(\Gamma(G_j; G_i \cap G_j(i \neq j)))$? La réponse est en général négative ; les deux géométries en question ont les mêmes éléments, mais la relation d'incidence $\iota'^{(j)}$ de $\Gamma^{(j)}$ est plus fine que la relation $\iota^{(j)}$: deux éléments $(G_i \cap G_j)g = (G_i g) \cap G_j$ et $(G_k \cap G_j)g' = (G_k g') \cap G_j$ ($g, g' \in G_j$) sont incidents pour $\iota'^{(j)}$ lorsque $(G_i g) \cap (G_k g') \cap G_j \neq 0$, tandis qu'ils sont incidents pour $\iota^{(j)}$ dès que $(G_i g) \cap (G_k g') \neq 0$. Un simple calcul montre que ces conditions sont équivalentes si et seulement si on a l'identité suivante :

$$(6.1) \quad (G_i G_j) \cap (G_k G_j) = (G_i \cap G_k) G_j,$$

où AB désigne l'ensemble des éléments de la forme ab avec $a \in A$ et $b \in B$. Si cette identité est vérifiée quels que soient i et k , on a $\Gamma^{(j)} = \Gamma'^{(j)}$; sinon, la relation $\iota^{(j)}$ est strictement moins fine que la relation $\iota'^{(j)}$ et puisque les géométries $\Gamma^{(j)}$ et $\Gamma'^{(j)}$ ont le même groupe, la première ne peut jouir de la propriété (5.4). Nous voyons donc que

La géométrie $\Gamma^{(j)}$ résiduelle d'une géométrie $\Gamma(G; G_i)$ par rapport à la famille correspondant à G_j est une géométrie de la même forme si et seulement si la relation (6.1) est vérifiée quels que soient i et k ; on a alors $\Gamma^{(j)} = \Gamma(G_j; G_i \cap G_j(i \neq j))$.

Nous sommes à présent en mesure d'exprimer en termes de groupes les conditions pour qu'un ensemble de géométries de la forme $\Gamma(G; G_i)$ constitue un système complet. Pour simplifier l'énoncé, nous supposerons les géométries envisagées mises sous leur forme minimum (cf. n° 5) $\Gamma(\mathbf{A}; \mathbf{A}_i)$, les collections $\mathbf{A}(\mathbf{A}_i)$ jouissant de la propriété suivante :

(6.2) Le groupe \mathbf{A} ne possède pas de sous-groupe invariant non trivial contenu dans l'intersection des \mathbf{A}_i .

Étant donné un ensemble de collections $\mathbf{A}^\lambda(\mathbf{A}_i^\lambda)$ jouissant de la propriété (6.2), pour que les géométries $\Gamma^\lambda = \Gamma(\mathbf{A}^\lambda; \mathbf{A}_i^\lambda)$ forment un système complet, il faut et il suffit que les conditions (6.3) et (6.4) ci-après soient remplies :

(6.3) Pour tous λ, i, j, k ,

$$(\mathbf{A}_i^\lambda \mathbf{A}_j^\lambda) \cap (\mathbf{A}_k^\lambda \mathbf{A}_j^\lambda) = (\mathbf{A}_i^\lambda \cap \mathbf{A}_k^\lambda) \mathbf{A}_j^\lambda;$$

(6.4) Soit U_j^λ le plus grand sous-groupe invariant de \mathbf{A}_j^λ contenu dans l'intersection $\bigcap_i \mathbf{A}_i^\lambda$. Alors, la collection $\mathbf{B}^\lambda(\mathbf{B}_i^\lambda(i \neq j))$, avec $\mathbf{B}^\lambda = \mathbf{A}_j^\lambda / U_j^\lambda$ et $\mathbf{B}_i^\lambda = (\mathbf{A}_i^\lambda \cap \mathbf{A}_j^\lambda) / U_j^\lambda$, est isomorphe à une collection $\mathbf{A}^\mu(\mathbf{A}_i^\mu)$ qui sera nommée la *résiduelle de la collection $\mathbf{A}^\lambda(\mathbf{A}_i^\lambda)$ par rapport à \mathbf{A}_j^λ* .

7. En combinant les principaux résultats des n°s 4, 5 et 6, nous pouvons énoncer les conclusions suivantes.

Soit $\mathbf{A}^\lambda(\mathbf{A}_i^\lambda)$ un ensemble de collections satisfaisant aux conditions (6.2), (6.3) et (6.4). Les géométries $\Gamma^\lambda = \Gamma(\mathbf{A}^\lambda; \mathbf{A}_i^\lambda)$, associées à ces collections jouissent des propriétés (5.1), (5.2) et (5.3) et forment un système complet ; on peut donc leur associer, selon le n° 4, des schémas $S^\lambda = S(\Gamma^\lambda)$ que nous dirons aussi associés aux collections $\mathbf{A}^\lambda(\mathbf{A}_i^\lambda)$. Entre les collections $\mathbf{A}^\lambda(\mathbf{A}_i^\lambda)$, les géométries Γ^λ et les schémas S^λ associés existent les liens suivants :

(7.1) le groupe de la géométrie Γ^λ est le groupe \mathbf{A}^λ ;

(7.2) les familles d'éléments \mathcal{F}_i^λ de la géométrie Γ^λ et les sommets s_i^λ du schéma S^λ sont en correspondance biunivoque canonique avec les \mathbf{A}_i^λ ; les notations seront supposées choisies de telle façon que les \mathbf{A}_i^λ , \mathcal{F}_i^λ et s_i^λ correspondants soient affectés du même indice i ;

(7.3) la géométrie et le schéma associés à la collection résiduelle de $\mathbf{A}^\lambda(\mathbf{A}_i^\lambda)$ par rapport à \mathbf{A}_i^λ sont respectivement la géométrie résiduelle de Γ^λ par rapport à \mathcal{F}_i^λ et le schéma résiduel de S^λ par rapport à s_i^λ , c'est-à-dire, le schéma obtenu en retirant de S^λ le sommet s_i^λ et tous les éléments de S^λ auxquels il appartient ;

(7.4) si la collection $\mathbf{A}^\lambda(\mathbf{A}_i^\lambda)$ est la somme directe de deux autres collections de l'ensemble considéré, la géométrie Γ^λ et le schéma S^λ sont respectivement la somme directe des géométries et la juxtaposition des schémas associés à celles-ci.

Tout système complet de géométries jouissant des propriétés (5.1), (5.2) et (5.3) peut être obtenu comme système des $\Gamma^\lambda = \Gamma(\mathbf{A}^\lambda; \mathbf{A}_i^\lambda)$ pour un choix convenable, bien déterminé, des collections $\mathbf{A}^\lambda(\mathbf{A}_i^\lambda)$.

§ 4 – LES GROUPES DE CHEVALLEY

8. Pour toute algèbre de Lie complexe simple \mathfrak{g} et tout corps commutatif K , \mathbb{C} . Chevalley définit, dans [2], un groupe bien déterminé G_K . Nous appellerons *groupes de Chevalley sur K* les groupes G_K et les produits directs d'un nombre fini de tels groupes. À toute algèbre de Lie complexe semi-simple est ainsi associée un groupe de Chevalley sur tout corps commutatif.

La base de l'application des résultats du § 3 aux groupes de Chevalley est fournie par l'observation suivante : il existe un procédé permettant de choisir dans chaque groupe de Chevalley G des sous-groupes G_i en nombre fini de façon que, pour un corps K donné, l'ensemble des collections $G(G_i)$ satisfasse aux conditions (6.2), (6.3) et (6.4) et que, de plus, le schéma S associé à la collection $G(G_i)$, selon les conclusions du n° 7, soit le schéma de Witt-Dynkin de l'algèbre de Lie \mathfrak{g} correspondant à G ¹⁶.

Pour être complet, nous donnerons ici la définition des groupes G_i , bien qu'elle ne soit pas explicitement utilisée dans la suite. Le corps K sera supposé donné une fois pour toutes. Supposons tout d'abord que l'algèbre de Lie \mathfrak{g} correspondant à G soit simple et reprenons la terminologie et

¹⁶Il faudrait dire, en toute rigueur, que les schémas de Witt-Dynkin *peuvent* être pris, en conformité avec le n° 7, comme schémas associés des collections $G(G_i)$.

les notations de Chevalley. Soient a_1, \dots, a_l un système fondamental de racines de \mathfrak{g} et $\mathcal{A}_i (i = 1, \dots, l)$ l'ensemble des racines qui sont combinaisons linéaires des racines $a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_l$. Alors, G_i est le sous-groupe de G engendré par $\mathfrak{U}, \mathfrak{H}$ et les \mathfrak{X}_{-r} , avec $r \in \mathcal{A}_i$ (cf. [2]). Si \mathfrak{g} est une somme directe d'algèbres simples \mathfrak{g}^λ , la collection $G(G_i)$ sera la somme directe des collections $G^\lambda(G_i^\lambda)$ correspondant à ces algèbres. En s'appuyant sur les résultats de Chevalley, on vérifie sans peine que les collections $G(G_i)$ ainsi définies satisfont effectivement aux conditions (6.2), (6.3) et (6.4) et qu'on peut prendre pour schéma associé à la collection $G(G_i)$ le schéma de Witt-Dynkin de l'algèbre \mathfrak{g} .

Nous énoncerons encore deux autres propriétés des collections $G(G_i)$, qui se déduisent aussi des résultats de Chevalley et qui nous serviront plus loin (cf. n° 9) à donner une nouvelle caractérisation des groupes de Chevalley et des collections $G(G_i)$.

(8.1) Lorsque le rang l de l'algèbre \mathfrak{g} (c'est-à-dire l'indice de la collection $G(G_i)$) est au moins égal à 2, le groupe G est engendré par les sous-groupes G_i .

Notons qu'il résulte immédiatement de cette propriété et de la propriété (6.4), que

(8.1') Lorsque $l \geq 2$, G est engendré par deux quelconques des groupes G_i .

(8.2) Si $l \geq 2$, le plus grand sous-groupe invariant de $G_i \cap G_j$ contenu dans le groupe $U = \bigcap_i G_i$ est, quels que soient i et j , le produit $U_i U_j$, où U_i désigne, comme précédemment (cf. (6.4)), le plus grand sous-groupe invariant de G_i contenu dans U . En d'autres termes, on a

$$\bigcap_{g \in G_i \cap G_j} g^{-1} U g = \left(\bigcap_{g \in G_i} g^{-1} U g \right) \left(\bigcap_{g \in G_j} g^{-1} U g \right)$$

Il est intéressant de noter la signification géométrique de ces propriétés. Si on pose $\Gamma(G; G_i) = \Gamma(\mathcal{E}; \mathcal{F}_i; \iota; G)$, la proposition (8.1) peut encore s'exprimer ainsi :

(8.3) Lorsque Γ est d'indice $l > 1$, on ne peut pas décomposer l'ensemble \mathcal{E} en deux sous-ensembles propres $\mathcal{E}^{(1)}$ et $\mathcal{E}^{(2)}$ totalement non incidents, c'est-à-dire tels qu'un élément de $\mathcal{E}^{(1)}$ et un élément de $\mathcal{E}^{(2)}$ ne soient jamais incidents.

La proposition (8.1') peut se traduire :

(8.3') Lorsque $l > 1$, on ne peut décomposer la réunion de deux familles \mathcal{F}_i données quelconques en deux sous-ensembles propres totalement non incidents.

En d'autres termes :

(8.3'') Soit $l > 1$. Etant donnés arbitrairement deux familles \mathcal{F}_i et \mathcal{F}_j d'éléments de Γ et deux éléments p et q de \mathcal{F}_i , il existe toujours une suite finie $p = p_1, p_2, \dots, p_m = q$ formée d'éléments appartenant alternativement à \mathcal{F}_i et à \mathcal{F}_j , ayant respectivement p et q comme premier et dernier élément, et telle que deux éléments consécutifs quelconques soient incidents.

Enfin, la proposition (8.2) est équivalente à la suivante :

(8.4) Soient p et q deux éléments quelconques de Γ , incidents entre eux, et $\Gamma(\mathcal{E}(p); \mathcal{F}_i(p); \iota(p); G(p))$ la géométrie résiduelle de Γ par rapport à p . Le groupe des éléments de G qui conservent q ainsi que tous les éléments de Γ incidents à q induit sur $\mathcal{E}(p)$ le groupe de *tous* les éléments de $G(p)$ conservant q et tous les éléments de $\mathcal{E}(p)$ incidents à q .

9. K désignera, comme précédemment, un corps commutatif quelconque, donné une fois pour toute. Pour simplifier le langage, nous appellerons schémas de Witt-Dynkin – sans plus – les schémas de Witt-Dynkin des algèbres de Lie complexes semi-simples, c’est-à-dire les schémas de la fig. 1 et les juxtapositions d’un nombre fini de tels schémas. En vertu des définitions posées au numéro précédent, à tout schéma de Witt-Dynkin sont associés un groupe de Chevalley sur K, G , une “collection sur K ”, $G(G_i)$, et une “géométrie sur K ”, $\Gamma(G; G_i)$.

Les schémas de Witt-Dynkin renferment quatre types de liaisons, l’absence de trait, le trait simple, double, triple ; en d’autres termes, ils sont tous composés des quatre schémas “élémentaires” suivants :



Étant donnée la correspondance biunivoque existant entre les schémas de Witt-Dynkin, les collections sur K et les géométries sur K , il est naturel de dire¹⁷ que les collections sur K sont toutes “composées” des quatre collections “élémentaires” correspondant aux schémas de la fig. 4, et que les géométries sur K sont toutes “composées” des quatre géométries “élémentaires” correspondant à ces schémas, à savoir, respectivement, la somme directe $\Pi_{1,K} \times \Pi_{1,K}$ de deux géométries projectives à une dimension sur K , la géométrie projective $\Pi_{2,K}$ à deux dimensions sur K , la géométrie $\Lambda_{3,K}$ d’une polarité nulle de l’espace projectif à 3 dimensions sur K , et une certaine géométrie Φ_K dont nous ne donnerons pas la description explicite. Il reste à déterminer suivant quelle loi s’effectue cette “composition” des collections et des géométries. Les propriétés générales des collections et des géométries sur K , mentionnées plus haut (n° 8), sont évidemment des éléments de cette loi ; on peut voir qu’ils la caractérisent en fait complètement, ce que nous exprimerons encore sous la forme des propositions suivantes :

(9.1) *La collection sur K correspondant à un schéma de Witt-Dynkin donné quelconque est entièrement caractérisée par les propriétés (6.2), (6.3), (6.4), (8.1) et (8.2), une fois données les collections sur K correspondant aux schémas de la fig. 4.*

(9.2) *La géométrie sur K correspondant à un schéma de Witt-Dynkin donné quelconque est entièrement caractérisée par les propriétés (5.1), (5.2), (5.3), (8.3) et (8.4), une fois données les géométries sur K , $\Pi_{1,K} \times \Pi_{1,K}$, $\Pi_{2,K}$, $\Lambda_{2,K}$, Φ_K , correspondant aux schémas de la fig. 4.*

On doit chaque fois supposer, bien entendu, que les relations fondamentales (7.2) et (7.3) entre les collections ou les géométries d’une part, et les schémas associés de l’autre, sont satisfaites.

¹⁷Nous devons à P. Libois cette remarque, qui est à la base des développements de ce n°.

Nous ne démontrerons ici, à titre d'exemple, les deux propositions précédentes, que dans le cas particulier des groupes de type \mathbf{A}_3 (cf. n° 10). Des indications concernant d'autres groupes, notamment les groupes des types exceptionnels \mathbf{E}_6 , \mathbf{E}_7 , et \mathbf{E}_8 , sont données dans [15] et [16].

Il est à noter que les propriétés (5.1), (5.2), etc., outre qu'elles constituent une définition axiomatique des géométries associées aux groupes de Chevalley, sont un outil très maniable pour l'étude de ces géométries. Les développements du n° 10, et ceux qu'on peut trouver dans les deux articles [15] et [16] précités, montrent en effet qu'on peut déduire de ces propriétés générales, par des raisonnements assez simples et de type standard, des propriétés fondamentales spécifiques des diverses géométries en question (telles, par exemple, que les axiomes d'incidence des géométries projectives).

10. Conformément à ce qui a été annoncé ci-dessus, nous nous proposons à présent de déterminer la géométrie sur K , $\Gamma(\mathcal{E}; \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3; \iota; \mathbf{A})$, correspondant au schéma \mathbf{A}_3 de la fig. 1 (la famille \mathcal{F}_i correspond par hypothèse au sommet n° i du schéma), en nous appuyant uniquement sur les propositions générales des n°s 5, 7 et 8, et sur la connaissance des géométries $\Pi_{1,K} \times \Pi_{1,K}$ et $\Pi_{2,K}$ correspondant aux deux premiers schémas de la fig. 4 (nous n'aurons pas besoin des autres). Nous appellerons respectivement *points*, *droites* et *plans* les éléments des familles \mathcal{F}_1 , \mathcal{F}_2 et \mathcal{F}_3 .

Il résulte de la correspondance fondamentale (7.3) entre géométries et schémas résiduels, que les géométries résiduelles de Γ par rapport à un point p , une droite d , un plan ϖ , sont respectivement une géométrie $\Pi_{2,K}$ – dont les points et les droites sont respectivement les droites et les plans de Γ incidents à p – une géométrie $\Pi_{1,K} \times \Pi_{1,K}$, une géométrie $\Pi_{2,K}$ – dont les points et les plans sont respectivement les points et les droites de Γ incidents à ϖ . Nous pouvons donc, en particulier, énoncer les propositions suivantes :

(10.1) *Si deux droites d et e sont incidentes à un même point p , il existe un et un seul plan incident à d , e et p .*

(10.2) *Si un point et un plan sont incidents à une même droite, ils sont incidents entre eux.*

(10.3) *Si deux points p et q sont incidents à un même plan ϖ , il existe une et une seule droite incidente à p , q et ϖ .*

De (10.1) et (10.2), il résulte immédiatement que

(10.4) *Deux droites incidentes à un même point sont simultanément incidentes à un et un seul plan.*

Soient p et q deux points distincts quelconques. En vertu de la proposition (8.3''), il existe certainement une suite finie : $p = p_0, d_1, p_1, d_2, \dots, p_n = q$, dont les éléments sont alternativement des points et des droites, et telle que deux éléments consécutifs quelconques soient incidents. Le plan ϖ incident à d_1 et d_2 (cf. (10.4)) est aussi incident à p_1 et p_2 (cf. 10.2)), donc il existe une droite incidente à p et p_2 . On montre de même, de proche en proche, l'existence d'une droite incidente à p et p_3 , d'une droite incidente à p et p_4, \dots , et finalement, d'une droite d incidente à p et q . Celle-ci est unique ; en effet, s'il existait une autre droite e jouissant de la même propriété, les droites d et e seraient incidentes à un même plan (cf. (10.4)) qui serait lui-même incident à p et q (cf. (10.2)),

et ceci contredirait la proposition (10.3). Nous avons ainsi montré que

(10.5) *Deux points distincts quelconques sont incidents simultanément à une et une seule droite.*

Considérons à présent un point p quelconque et une droite d non incidente à p , et soient q un point incident à d , e la droite déterminée par p et q (cf. 10.5) et ϖ le plan déterminé par d et e (cf. (10.4)). ϖ est incident à p (cf. (10.2)), et il est le seul plan incident simultanément à p et d ; en effet, tout plan jouissant de cette propriété est incident à q (cf. (10.2)) donc aussi à e (cf. (10.3) et (10.5)), or il existe un seul plan incident simultanément à d et e (cf. (10.4)). En conclusion,

(10.6) *Une droite et un point non incidents entre eux sont incidents simultanément à un et un seul plan.*

Le schéma \mathbf{A}_3 étant symétrique par rapport au sommet 2, on peut intervertir les mots “point” et “plan” dans les énoncés précédents. En particulier, les propositions (10.5) et (10.6) donnent lieu, de cette façon, aux suivantes :

(10.7) *Deux plans distincts quelconques sont incidents simultanément à une et une seule droite.*

(10.8) *Une droite et un plan non incidents entre eux sont incidents simultanément à un et un seul point.*

Il résulte des diverses propriétés démontrées ci-dessus, et du fait que la géométrie résiduelle de Γ par rapport à un plan est une géométrie $\Pi_{2,K}$ que les points, droites et plans de Γ peuvent être identifiés avec les points, droites et plans d’un espace projectif \mathcal{P}_3 à trois dimensions sur K , la relation ι étant la relation d’incidence usuelle. Il nous reste donc à déterminer le groupe \mathbf{A} .

Nous savons que les éléments de \mathbf{A} qui conservent un plan ϖ induisent sur celui-ci le groupe de toutes les projectivités (à deux dimensions). On en déduit sans grande peine, par un raisonnement faisant intervenir la simplicité des groupes $\mathrm{PSL}_3(K)$ et $\mathrm{PSL}_4(K)$ (les notations sont celles de J. Dieudonné [4]), que \mathbf{A} contient le groupe $\mathrm{PSL}_4(K)$ des projectivités unimodulaires de \mathcal{P}_3 et qu’il est contenu dans le groupe $\mathrm{PGL}_4(K)$ de toutes les projectivités de \mathcal{P}_3 . Appliquant alors la proposition (8.4) en prenant pour p et q respectivement un point et un plan, on trouve finalement que \mathbf{A} ne peut être que le groupe $\mathrm{PGL}_4(K)$ tout entier.

Remarques. La proposition (8.4) a été utilisée seulement dans la détermination du groupe \mathbf{A} , et non dans celle de l’ensemble \mathcal{E} , des familles \mathcal{F}_i et de la relation d’incidence ι . On peut éviter entièrement l’emploi de cette proposition en utilisant l’existence d’une géométrie correspondant au schéma \mathbf{A}_4 ; il faut noter que l’on sort ainsi du système complet minimum contenant la géométrie Γ envisagée. Ces remarques sont encore valables pour les géométries projectives de dimension quelconque sur K ; je ne sais pas dans quelle mesure elles le restent pour les géométries associées aux autres groupes de Chevalley.

11. *Remarques concernant le cas des corps de caractéristique 2 et 3.*

Les flèches figurant sur les deux derniers schémas de la fig. 4 expriment le fait que les géométries $\Lambda_{3,K}$ et Φ_K correspondant à ces schémas ne possèdent pas de propriété de dualité, c'est-à-dire que leurs deux familles d'éléments fondamentaux jouent des rôles non symétriques, contrairement à ce qui se passe pour les géométries $\Pi_{1,K} \times \Pi_{1,K}$ et $\Pi_{2,K}$ correspondant aux deux premiers schémas de la fig. 4. Il y a cependant deux exceptions à cette règle, à savoir, la géométrie $\lambda_{3,K}$ lorsque K est un corps parfait de caractéristique 2 et la géométrie Φ_K lorsque K est un corps parfait de caractéristique 3 ; il en résulte que *si K est un corps parfait de caractéristique 2 (3), il n'y a pas lieu d'affecter d'une flèche les traits doubles (triples) des schémas de Witt-Dynkin.*

Si l'on supprime les flèches affectant les traits doubles sur la fig. 1, on constate que les schémas \mathbf{B}_n , et \mathbf{C}_n deviennent identiques tandis que le schéma \mathbf{F}_4 devient symétrique c'est-à-dire invariant pour une permutation simultanée des sommets 1, 4 et des sommets 2, 3. Il en résulte que sur un corps parfait K de caractéristique 2, les groupes de types (\mathbf{B}_n) et (\mathbf{C}_n) sont isomorphes (ce qui est bien connu) et ont la même géométrie associée, tandis que le groupe (\mathbf{F}_4) acquiert un automorphisme extérieur de type nouveau correspondant à une dualité de la géométrie associée. De même, sur un corps parfait K de caractéristique 3, le groupe (\mathbf{G}_2) acquiert un automorphisme extérieur correspondant à une dualité de la géométrie associée.

12. *Les groupes de Chevalley d'ordre fini.*

Lorsque le corps K est un champ de Galois, les groupes de Chevalley sur K sont des groupes finis dont les ordres ont été déterminés par Chevalley. À toute algèbre semi-simple complexe \mathfrak{g} de rang r , donc à tout schéma de Witt-Dynkin \mathfrak{g} à r sommets (nous représentons par le même symbole une algèbre et son schéma de Witt-Dynkin), on peut associer un système de r entiers $E(\mathfrak{g}) = \{e(i); i = 1, \dots, r\}$, tels que l'ordre g du groupe de Chevalley G correspondant à \mathfrak{g} sur le champ de Galois K_q de q éléments soit donné par la formule

$$(12.1) \quad g = q^N \cdot P_{\mathfrak{g}}(q)$$

avec

$$(12.2) \quad N = \sum_{e(i) \in E(\mathfrak{g})} (e(i) - 1)$$

et

$$(12.3) \quad P_{\mathfrak{g}}(q) = \prod_{e(i) \in E(\mathfrak{g})} (q^{e(i)} - 1).$$

Les $e(i) \in E(\mathfrak{g})$ ont une signification topologique ; ce sont les entiers qui apparaissent dans le polynôme de Poincaré

$$\prod (t^{2e(i)-1} + 1)$$

du groupe compact correspondant à \mathfrak{g} (cf. [2]) ; en particulier, ils sont liés à la dimension d de l'algèbre \mathfrak{g} par la relation

$$d = \Sigma(2e(i) - 1) = 2N + r.$$

$N = 1/2(d - r)$ est égal au nombre des racines positives de \mathfrak{g} . Nous reproduisons ci-dessous les systèmes d'entiers $E(\mathfrak{g})$ correspondant aux algèbres \mathfrak{g} simples ; le système $E(\mathfrak{g})$ d'une somme di-

recte d'algèbres simples est la réunion des systèmes d'entiers correspondant à ces algèbres.

$$\begin{aligned}
E(\mathbf{A}_r) &= 2, 3, \dots, r + 1 \\
E(\mathbf{B}_r) &= 2, 4, \dots, 2r \\
E(\mathbf{C}_r) &= 2, 4, \dots, 2r \\
E(\mathbf{D}_r) &= 2, 4, \dots, 2r - 2, r \\
E(\mathbf{G}_2) &= 2, 6 \\
E(\mathbf{F}_4) &= 2, 6, 8, 12 \\
E(\mathbf{E}_6) &= 2, 5, 6, 8, 9, 12 \\
E(\mathbf{E}_7) &= 2, 6, 8, 10, 12, 14, 18 \\
E(\mathbf{E}_8) &= 2, 8, 12, 14, 18, 20, 24, 30.
\end{aligned}$$

Soient G un groupe de Chevalley sur un champ de Galois K_q , \mathcal{F}_i les familles d'éléments de la géométrie associée à ce groupe et n_i les nombres d'éléments de ces familles. Les \mathcal{F}_i étant des espaces homogènes G/G_i de G , on a $n_i = g/g_i$ où g et g_i sont respectivement l'ordre de G , donné par la formule (12.1), et les ordres des G_i . Ceux-ci se déterminent aisément à partir des résultats de Chevalley et on trouve alors

$$(12.4) \quad n_i = P\mathfrak{g}(q)/((q-1).P\mathfrak{g}_i(q)) = Q\mathfrak{g}_i(q),$$

où \mathfrak{g} et \mathfrak{g}_i désignent respectivement le schéma de Witt-Dynkin correspondant à G et le schéma obtenu en retirant de celui-ci le sommet i correspondant à la famille \mathcal{F}_i ¹⁸, et où les P sont donnés par la formule (12.3).

La formule (12.4) renferme comme cas particuliers diverses formules énumératives classiques des géométries projectives sur les champs de Galois. Par exemple, le nombre $\nu_{r,s}$ des variétés linéaires à s dimensions de l'espace projectif à r dimensions sur K_q s'obtient en posant dans (12.4) $\mathfrak{g} = \mathbf{A}_r$ et $\mathfrak{g}_i = \mathbf{A}_s + \mathbf{A}_{r-s-1}$, ce qui donne.

$$\nu_{r,s} = Q_{\mathbf{A}_{r,s+1}}(q) = \frac{(q^{r+1} - 1)(q^r - 1) \dots (q^{r-s-1} - 1)}{(q^{s+1} - 1)(q^s - 1) \dots (q - 1)},$$

le nombre ρ_{2r-1} des points d'une hyperquadrique (non dégénérée) de dimension impaire $2r - 1$ sur K_q s'obtient en faisant dans (12.4) $g = \mathbf{B}_r$ et $g_i = \mathbf{B}_{r-1}$, d'où

$$\rho_{2r-1} = Q_{\mathbf{B}_{r,1}}(q) = (q^{2r} - 1)/(q - 1);$$

etc.

Notons encore que le polynôme Q figurant au second membre de la formule (12.4) a une signification topologique : il résulte en effet de la formule de Hirsch (cf. par ex. [8], [9]) que $Q_{\mathfrak{g},i}(t^2)$ est le polynôme de Poincaré de la variété complexe constituée par la famille d'éléments correspondant au sommet i de \mathfrak{g} dans la géométrie associée à \mathfrak{g} sur le corps des nombres complexes. Par exemple, le polynôme de Poincaré de la grassmannienne des variétés linéaires à s dimensions de l'espace projectif complexe à r dimensions est $Q_{\mathbf{B}_{r,s+1}}(t^2)$; le polynôme de Poincaré d'une hyperquadrique complexe non dégénérée à $2r - 1$ dimensions est $Q_{\mathbf{B}_{r,1}}(t^2)$; etc.

¹⁸Si l'on appelle comme précédemment (cf. (6.4)) U_i , le plus grand sous-groupe invariant de G_i contenu dans l'intersection de tous les G_j , le groupe G_i/U_i – et non G_i comme pourraient le laisser croire nos notations – est le groupe de Chevalley sur K correspondant à l'algèbre \mathfrak{g}_i .

13. *Les groupes de Chevalley sur le “corps de caractéristique 1”.*

Nous avons vu au n° 9 que les groupes de Chevalley sur un corps donné K et les géométries sur K correspondant à tous les schémas de Witt-Dynkin sont déterminés, par l’intermédiaire des propositions générales des n°s 5 à 8, dès qu’on connaît les géométries correspondant aux schémas de la fig. 4. On peut alors songer à associer à ces derniers d’autres géométries que celles indiquées au n° 9, et à rechercher si les propositions générales des n°s 5 à 8 conduisent encore à associer aux autres schémas de Witt-Dynkin (ou éventuellement, à certains d’entre eux) des géométries univoquement déterminées. C’est ce que nous ferons ici.

Nous désignerons par $K = K_1$ le “corps de caractéristique 1” formé du seul élément $1 = 0$ ¹⁹. Il est naturel d’appeler *espace projectif à n dimensions sur K* , un ensemble \mathcal{P}_n de $n + 1$ points dont tous les sous-ensembles sont considérés comme des variétés linéaires, la dimension d’une variété étant le nombre de points qui la constituent diminué d’une unité, et *projectivité de \mathcal{P}_n* , une permutation quelconque de ces points. On définit alors, suivant (3.1), la *géométrie projective à n dimensions sur K* , $\Pi_{n,K}$.

Nous nous proposons de chercher à définir de façon naturelle des géométries sur K correspondant à tous les schémas de Witt-Dynkin, la géométrie $\Pi_{n,K}$ dont il est question ci-dessus correspondant au schéma \mathbf{A}_n . Suivant le principe exposé au début de ce n°, nous devons pour cela déterminer les géométries à associer aux quatre schémas de la fig. 4. Les deux premières sont déjà connues d’après ce qui précède ; ce sont les géométries $\Pi_{1,K} \times \Pi_{1,K}$ et $\Pi_{2,K}$, que nous pouvons encore décrire comme les “géométries des polygones à 2 et 3 côtés”, en posant la définition générale suivante :

on appellera *géométrie du polygone à n côtés* la géométrie d’indice 2, $\Gamma(\mathcal{E}; \mathcal{S}, \mathcal{C}; \iota; \mathbf{A})$, dont les familles \mathcal{S} et \mathcal{C} se composent chacune de n éléments (sommets et côtés du polygone) que nous désignerons respectivement par s_1, \dots, s_n et c_1, \dots, c_n , deux éléments s_i et c_j étant incidents pour ι si et seulement si $i = j$ ou $j + 1 \pmod{n}$, et dont le groupe \mathbf{A} , isomorphe au groupe diédrique d’ordre $2n$, se compose de toutes les permutations des s_i et des c_i qui conservent la relation d’incidence.

Considérons, dans l’espace projectif \mathcal{P}_3 formé de quatre points 1, 2, 3, 4, une *polarité nulle*, c’est-à-dire une correspondance biunivoque points-plans τ telle que chaque point appartienne au plan correspondant, et que la relation “ p appartient au plan correspondant à q ” soit symétrique en les points p et q . Nous supposons les points de \mathcal{P}_3 numérotés de telle façon que le plan 123 corresponde dans τ au point 2 ; alors, les plans 234, 341 et 412 correspondent respectivement aux points 3, 4 et 1, et les droites appartenant à τ sont les droites 12, 23, 34 et 41. Il en résulte que la *géométrie de la polarité nulle τ* , $\Lambda_{3,K}$ (cf. (3.2)), que nous associerons naturellement au troisième schéma de la fig. 4, est la géométrie du polygone à 4 côtés.

Si la proposition (9.2) reste valable sur le “corps” $K = K_1$, les géométries sur K correspondant aux schémas de la fig. 1, à l’exception de \mathbf{G}_2 , doivent à présent être parfaitement déterminées par les propositions générales des n°s 5 et 8. On peut voir qu’il en est bien ainsi. Pour être complet, nous devons encore parler du schéma \mathbf{G}_2 ; pour des raisons que nous indiquerons plus loin, il convient de lui associer la géométrie du polygone à 6 côtés.

¹⁹ K_1 n’est généralement pas considéré comme un corps

Les deux familles d'éléments des géométries de polygones jouant toujours des rôles symétriques, les flèches affectant les deux derniers schémas de la fig. 4 doivent être supprimées dans le cas qui nous occupe. Lorsque nous parlerons, dans la suite, des schémas de Witt-Dynkin, il s'agira des schémas définis précédemment, abstraction faite des flèches affectant les traits doubles et triples. Avec cette convention, nous pouvons énoncer la conclusion suivante :

On peut, de façon naturelle, associer aux schémas de Witt-Dynkin, des géométries sur $K = K_1$ jouissant des propriétés (5.1), (5.2), (5.3), (8.3) et (8.4). Ces géométries sont entièrement caractérisées par le fait que les géométries associées aux quatre schémas de la fig. 4 sont respectivement les géométries des polygones à 2, 3, 4 et 6 côtés.

Nous désignerons par $\Gamma(\mathfrak{g})$ la géométrie sur $K = K_1$ associée au schéma (à l'algèbre) \mathfrak{g} .

La formule (12.4) donnant les nombres d'éléments des familles des géométries associées aux groupes de Chevalley sur un champ de Galois K_q restent valables lorsque $q = 1$. Plus exactement, on constate que les deux termes de la fraction apparaissant au second membre de cette formule renferment un même nombre de fois le facteur $q - 1$, donc qu'elle prend, après simplification, une valeur déterminée, finie et non nulle, pour $q = 1$, à savoir

$$n_i = Q_{\mathfrak{g},i}(1) = \left(\prod_{e(m) \in E(\mathfrak{g})} e(m) / \left(\prod_{e(n) \in E(\mathfrak{g}_i)} e(n) \right) \right),$$

où les notations sont celles introduites au n° 12, et cette valeur n_i est le nombre des éléments de la famille \mathcal{F}_i de la géométrie $\Gamma(\mathfrak{g})$.

Le groupe G de la géométrie $\Gamma(\mathfrak{g})$ n'est autre que le *groupe de Weyl* de l'algèbre \mathfrak{g} , c'est-à-dire le groupe (S) engendré par les symétries par rapport aux racines (cf. [18], p. 338)²⁰ ; son ordre est (cf. [2])

$$g = \prod_{e(i) \in E(\mathfrak{g})} e(i).$$

On notera que cette formule s'obtient à partir de la formule (12.1) en supprimant les facteurs $q - 1$ apparaissant dans le polynôme $P_{\mathfrak{g}}(q)$ du second membre et en posant ensuite $q = 1$.

Le groupe de Weyl étant un groupe de permutations des racines de l'algèbre \mathfrak{g} , ces dernières peuvent être représentées par des êtres définis dans la géométrie $\Gamma(\mathfrak{g})$. Ces êtres sont pour $\mathfrak{g} = \mathbf{A}_n$, les couples (a, b) formés d'un élément $a \in \mathcal{F}_1$ ²¹ et d'un élément $b \in \mathcal{F}_n$ incidents ;
pour $\mathfrak{g} = \mathbf{B}_n = \mathbf{C}_n$, ou \mathbf{G}_2 , les éléments des familles \mathcal{F}_1 et \mathcal{F}_2 ;
pour $\mathfrak{g} = \mathbf{F}_4$, les éléments des familles \mathcal{F}_1 et \mathcal{F}_4 ;
pour $\mathfrak{g} = \mathbf{D}_n, \mathbf{E}_6, \mathbf{E}_7, \mathbf{E}_8$, respectivement les éléments des familles $\mathcal{F}_2, \mathcal{F}_6, \mathcal{F}_6, \mathcal{F}_1$.

Réciproquement, on peut donner une définition générale des géométries $\Gamma(\mathfrak{g})$ basée sur la considération des racines de l'algèbre \mathfrak{g} .

²⁰Ce groupe est aussi étroitement lié au groupe de Galois de l'équation des racines de \mathfrak{g} , déjà considéré par E. CARTAN dans [1] ; de façon plus précise, il en est un sous-groupe invariant et le groupe quotient correspondant est isomorphe au groupe des automorphismes du schéma \mathfrak{g} (c'est-à-dire, des permutations des sommets qui conservent le schéma).

²¹Suivant une convention déjà adoptée précédemment, nous appelons \mathcal{F}_i la famille de $\Gamma(\mathfrak{g})$ correspondant au sommet du schéma \mathfrak{g} numéroté i sur la fig. 1.

Des considérations “géométriques” analogues à celles qui nous ont permis de définir une polarité nulle dans \mathcal{P}_4 , conduisent aux définitions suivantes : une *hyperquadrique* de dimension $2n$ ou $2n+1$ sur K est un ensemble Q de $2(n+1)$ points répartis en $n+1$ couples, $a_0, b_0, a_1, b_1, \dots, a_n, b_n$, et ses *variétés linéaires* sont tous les sous-ensembles de Q ne contenant aucun des couples (a_i, b_i) ²² ; les hyperquadriques de dimensions $2n$ et $2n+1$ se distinguent entre elles par le fait que dans la première on répartit les n -plans (sous-ensembles de $n+1$ points) en deux modes suivant la parité du nombre de points a_i (ou b_i) qu’ils renferment. Une *projectivité* de l’hyperquadrique définie plus haut est une permutation quelconque des points a_0, \dots, b_n conservant le couplage. Avec ces définitions, la géométrie $\Gamma(\mathbf{B}_n) = \Gamma(\mathbf{C}_n)$ (resp. $\Gamma(\mathbf{D}_n)$) est la géométrie d’une hyperquadrique à $2n+1$ (resp. $2n$) dimensions sur K , définie comme au § 3 (cf. (3.2)). Notons incidemment que dans les hyperquadriques sur K se retrouvent plusieurs propriétés importantes des hyperquadriques sur un corps (au sens ordinaire) quelconque, parmi lesquelles, les propriétés fondamentales de l’hyperquadrique de Klein, et la trialité²³

Nous sommes à présent en mesure de justifier le choix de la géométrie $\Gamma(\mathbf{G}_2)$, associée à \mathbf{G}_2 . Lorsque K désigne un corps au sens ordinaire, la géométrie sur $K > \Phi_K$, associée à \mathbf{G}_2 , jouit des propriétés suivantes : on peut représenter les éléments des familles \mathcal{F}_2 et \mathcal{F}_1 de Φ_K respectivement par les points et certaines droites d’une hyperquadrique à 5 dimensions sur K de telle façon que l’ensemble des éléments de \mathcal{F}_2 incidents à un élément donné $p_1 \in \mathcal{F}_1$ soit représenté par l’ensemble des points appartenant à la droite correspondant à p_1 , et que l’ensemble des éléments de \mathcal{F}_1 incidents à un élément donné $p_2 \in \mathcal{F}_2$ soit représenté par l’ensemble des droites contenant le point correspondant à p_2 et contenues dans un certain plan passant par ce point (cf. [14], p. 130, pour le cas où K est le corps des complexes) ; le groupe de la géométrie Φ_K est alors le groupe de toutes les projectivités de l’hyperquadrique qui conservent la famille des droites représentant les éléments de \mathcal{F}_1 . Lorsque $K = K_1$, les propriétés précédentes définissent une géométrie Φ_K qui n’est autre que la géométrie du polygone à six côtés ; il est donc naturel de prendre celle-ci pour géométrie $\Gamma(\mathbf{G}_2)$. On arriverait d’ailleurs à la même conclusion en partant d’une définition générale des géométries $\Gamma(\mathfrak{g})$ basée sur la considération des racines de l’algèbre \mathfrak{g} .

La géométrie $\Gamma(\mathbf{E}_6)$ est liée de la façon suivante à la structure des 27 droites d’une surface cubique Σ_3 . On peut établir entre les droites de Σ_3 et les éléments de chacune des deux familles \mathcal{F}_1 et \mathcal{F}_5 de $\Gamma(\mathbf{E}_6)$, une correspondance biunivoque telle que deux éléments de $\Gamma(\mathbf{E}_6)$ appartenant respectivement à \mathcal{F}_1 et \mathcal{F}_5 soient incidents si et seulement si les droites correspondantes se coupent ; les éléments de $\mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3, \mathcal{F}_4$ et \mathcal{F}_6 correspondent alors respectivement aux couples, aux triples, à des quintuples et aux sextuples (sizains) de droites gauches deux à deux.

Nous ne parlerons pas ici des géométries $\Gamma(\mathfrak{g})$ correspondant aux autres groupes exceptionnels ; bornons-nous à signaler qu’elles se construisent toutes assez aisément à partir de la géométrie $\Gamma(\mathbf{E}_6)$, et que $\Gamma(\mathbf{F}_4)$ peut aussi être obtenue, plus simplement, par la considération de trois hyperquadriques à 6 dimensions en relation de trialité. Nous espérons revenir ultérieurement

²²En réalité, les hyperquadriques définies ici sont seulement les analogues des hyperquadriques d’indice maximum sur un corps ordinaire.

²³Une étude générale du principe de trialité a conduit Mlle F. LINGER à envisager des espaces formés de huit points couplés, qui ne sont autres que nos hyperquadriques à 6 dimensions sur K_1 (manuscripts non publiés, 1947).

sur ces questions.

Notons pour terminer que les schémas de Witt-Dynkin ne sont pas les seuls schémas formés de traits simples, doubles ou triples auxquels correspondent effectivement des géométries lorsqu'on associe aux schémas élémentaires de la fig. 4 les géométries des polygones à 2, 3, 4 et 6 côtés.

Références

- [1] CARTAN, E., Sur la réduction à sa forme canonique de la structure d'un groupe de transformations fini et continu. *Amer. J. Math.*, 18 (1896), 1-61. (Œuvres complètes, partie 1, vol. 1, 293-353, Paris, Gauthier-Villars, 1952.
- [2] CHEVALLEY, C., Sur certains groupes simples. *Tôhoku Math. Journ.*, 7 (2), (1955), 14-66.
- [3] CHEVALLEY, C. et SCHAFER, R. D., The exceptional simple Lie algebras F_4 and E_6 , *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.*, 36 (1950), 137-141.
- [4] DIEUDONNÉ, J., *La géométrie des groupes classiques*. Berlin-Göttingen-Heidelberg, Springer-Verlag, 1955.
- [5] DYNKIN, E. B., La structure des algèbres de Lie semi-simples. *Uspeht Mat. Nauk*, 2 (20) (1947), 59-127. Cf. aussi *Transl. Amer. Math. Soc.*, n° 17.
- [6] FREUDENTHAL, H., Oktaven, Ausnahmegruppen, Oktavengeometrie. *Math. Inst. Rijksuniv. Utrecht*, 1951.
- [7] -----, Beziehungen der E_7 und E_8 zur Oktavenebene, I, II, III, IV. *Indagationes Math.* 16 (1954), 218-230 et 363-368 ; 17 (1955), 151-157 et 277-285.
- [8] KOSZUL, J. L., Sur un type d'algèbres différentielles en rapport avec la transgression. *Coll. de Topologie du C. B. R. M.*, Bruxelles, 1950, 73-81.
- [9] LERAY, J., Sur l'homologie des groupes de Lie, des espaces homogènes et des espaces fibrés principaux. *Colloque de Topologie du C. B. R. M.*, Bruxelles, 1950, 101-115.
- [10] TITS, J., Le plan projectif des octaves et les groupes de Lie exceptionnels. *Acad. Roy. Belg., Bull. Cl. Sci.*, 39 (1953), 309-329.
- [11] -----, Le plan projectif des octaves et les groupes exceptionnels E_6 et E_7 , *Acad. Roy. Belg., Bull. Cl. Sci.*, 40 (1954), 29-40.
- [12] -----, Etude géométrique d'une classe d'espaces homogènes. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 239 (1954), 466-468.
- [13] -----, Sur les R -espaces. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 239 (1954), 850-852.
- [14] -----, Sur certaines classes d'espaces homogènes de groupes de Lie. *Mém. Acad. Roy. Belg.*, 29 (3) (1955).
- [15] -----, Sur la géométrie des R -espaces. *J. Math. P. et Appl.*, 36 (1957), 17-38.

- [16] -----, Les groupes de Lie exceptionnels et leur interprétation géométrique. *Bull. Soc. Math. Belg.*, 8 (1955-1957), 48-81.
- [17] VAN DER WAERDEN, B. L., *Gruppen von linearen Transformationen*, Berlin, J. Springer, 1935.
- [18] WEYL, H., *Selecta*. Bâle-Stuttgart, Birkhäuser Verlag, 1956.
- [19] WITT, E., Spiegelungsgruppen und Aufzählung halbeinfacher Liescher Ringe. *Abh. Math. Sem. Hamb. Univ.*, 14 (1941), 289-322.