PREMIÈRE LETTRE DE PASCAL À FERMAT[1]

Monsieur,

L'impatience me prend aussi-bien qu'à vous ; et quoique je sois encore au lit, je ne puis m'empêcher de vous dire que je reçus hier au soir, de la part de M. de Carcavi, votre lettre sur les partis, que j'admire si fort, que je ne puis vous le dire. Je n'ai pas le loisir de m'étendre ; mais en un mot vous avez trouvé les deux partis des dés et des parties dans la parfaite justesse : j'en suis tout satisfait ; car je ne doute plus maintenant que je ne sois dans la vérité, après la rencontre admirable où je me trouve avec vous. J'admire bien davantage la méthode des parties que celle des dés : j'avois vu plusieurs personnes trouver celle des dés, comme M. le chevalier de Meré, qui est celui qui m'a proposé ces questions, et aussi M. de Roberval ; mais M. de Meré n'avoit jamais pu trouver la juste valeur des parties, ni de biais pour y arriver : de sorte que je me trouvois seul qui eusse connu cette proportion. Votre méthode est très-sûre, et c'est la première qui m'est venue à la pensée dans cette recherche. Mais parce que la peine des combinaisons est excessive, j'en ai trouvé un abrégé, et proprement une autre méthode bien plus courte et plus nette, que je voudrois pouvoir vous dire ici en peu de mots ; car je voudrois désormais vous ouvrir mon cœur, s'il se pouvoit, tant j'ai de joie de voir notre rencontre. Je vois bien que la vérité est la même à Toulouse et à Paris. Voici à peu près comme je fais pour savoir la valeur de chacune des parties, quand deux joueurs jouent, par exemple, en trois parties, et chacun a mis 32 pistoles au jeu.

Posons que le premier en ait deux et l'autre une : ils jouent maintenant une partie dont le sort est tel, que si le premier la gagne, il gagne tout l'argent qui est au jeu, savoir, 64 pistoles : si l'autre la gagne, ils sont deux parties à deux parties, et par conséquent s'ils veulent se séparer, il faut qu'ils retirent chacun leur mise, savoir, chacun 32 pistoles. Considérez donc, monsieur, que si le premier gagne, il lui appartient 64 ; s'il perd, il lui appartient 32. Donc s'ils ne veulent point hasarder cette partie, et se séparer sans la jouer, le premier doit dire : je suis sûr d'avoir 32 pistoles ; car la perte mème me les donne ; mais pour les 32 autres, peut-être je les aurai, peut-être vous les aurez ; le hasard est égal ; partageons donc ces 32 pistoles par la moitié, et donnez-moi outre cela mes 32 qui me sont sûres. Il aura donc 48 pistoles, et l'autre 16.

Posons maintenant que le premier ait deux parties, l'autre point, et qu'ils commencent à jouer une partie : le sort de cette partie est tel, que si le premier la gagne, il tire tout l'argent, 64 pistoles ; si l'autre la gagne, les voilà revenus au cas précédent, auquel le premier aura deux parties et l'autre une. Or nous avons déjà montré qu'en ce cas il appartient à celui qui a les deux parties, 48 pistoles ; donc s'ils veulent ne point jouer cette partie, il doit dire ainsi : si je la gagne, je gagnerai tout, qui est 64 ; si je la perds, il m'appartiendra légitimement 48. Donc donnez-moi les 48 qui me sont

[1] Tirée du Recueil des Œuvres de Fermat. Il paroît que cette Lettre avoit été été précédée par d'autres sur la même matière ; mais je n'ai pu les recouvrer.
Transcription en LaTeX: Denise Vella-Chemla, avril 2023, suite au visionnage de la conférence de Cédric Villani, à Clermont-Ferrand, le 13 janvier 2023, "Blaise Pascal, un génie clermontois", visionnable à l'adresse : https://www.youtube-nocookie.com/embed/MilmmZ0yCGo, à l'occasion des 400 ans de la naissance de Blaise Pascal.
Le texte original des lettres est à trouver ici : https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k6439197f/f376.image .

certaines, au cas même que je perde, et partageons les 16 autres par la moitié, puisqu'il y a autant de hasard que vous les gagniez comme moi. Ainsi il aura 48 et 8, qui sont 56 pistoles.

Posons enfin que le premier n'ait qu'une partie et l'autre point. Vous voyez, monsieur, que s'ils commencent une partie nouvelle, le sort en est tel, que si le premier la gagne, il aura deux parties à point, et partant, par le cas précédent, il lui appartient 56 ; s'il la perd, ils sont partie à partie, donc il lui appartient 32 pistoles. Donc il doit dire : si vous voulez ne pas la jouer, donnez-moi 32 pistoles qui me sont sûres, et partageons le reste de 56 par la moitié ; de 56 ôtez 32, reste 24 ; partagez donc 24 par la moitié, prenez-en 12 et moi 12, qui, avec 32, font 44.

Or par ce moyen vous voyez par les simples soustractions, que pour la première partie il appartient sur l'argent de l'autre 12 pistoles, pour la seconde autre 12, et pour la dernière 8.

Or pour ne plus faire de mystère, puisque vous voyez aussi-bien tout à découvert, et que je n'en faisois que pour voir si je ne me trompois pas, la valeur (j'entends la valeur sur l'argent de l'autre seulement) de la dernière partie de 2 est double de la partie de 3 ; et quadruple de la dernière partie de 4 ; et octuple de la dernière partie de 5, etc.

Mais la proportion des premières parties n'est pas si aisée à trouver : elle est donc ainsi, car je ne veux rien déguiser ; et voici le problème dont je faisois tant de cas, comme en effet il me plaît fort.

Étant donné tel nombre de parties qu'on voudra, trouver la valeur de la première ?

Soit le nombre des parties donné, par exemple, 8 : prenez les huit premiers nombres pairs et les huit premiers nombres impairs, savoir :

$$\begin{array}{rl} & 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, \\ \text{et} & 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15. \end{array}$$

Multipliez les nombres pairs en cette sorte : le premier par le second, le produit par le troisième, le produit par le quatrième, le produit par le cinquième, etc. Multipliez les nombres impairs de la même sorte : le premier par le second, le produit par le troisième, etc. : le dernier produit des pairs est le dénominateur, et le dernier produit des impairs est le numérateur de la fraction qui exprime la valeur de la première partie de 8, c'est-à-dire, que si on joue chacun le nombre des pistoles exprimé par le produit des pairs, il en appartiendra sur l'argent de l'autre le nombre exprimé par le produit des impairs.

Ce qui se démontre, mais avec beaucoup de peine, par les combinaisons, telles que vous les avez imaginées : je n'ai pu le démontrer par cette autre voie que je viens de vous dire, mais seulement par celle des combinaisons ; et voici les propositions qui y mènent, qui sont proprement des propositions arithmétiques touchant les combinaisons, dont j'ai d'assez belles propriétés.

Si d'un nombre quelconque de lettres, par exemple, de huit, A, B, C, D, E, F, G, H, vous prenez toutes les combinaisons possibles de quatre lettres ; et ensuite toutes les combinaisons possibles de cinq lettres, et puis de six, de sept et de huit, etc. ; et qu'ainsi vous preniez toutes les combinaisons possibles depuis la multitude, qui est la moitié de la toute, jusqu'au tout je dis que si vous joignez ensemble la moitié de la combinaison de quatre avec chacune des combinaisons supérieures, la somme sera le nombre tantième de la progression quaternaire ; à commencer par le binaire, qui est la moitié de la multitude. Par exemple, et je vous le dirai en latin, car le françois n'y vaut rien.

Si quotlibet litterarum verbi gratiá octo A, B, C, D, E, F, G, H, sumantur omnes combinationes quaternarii, quinquenarii, senarii, etc., usque ad octonarium : dico, si jungas dimidium combinationis quaternarii, nempe 35 (dimidium 70) cum omnibus combinationibus, quinquenarii, nempe 56, plus omnibus combinationibus senari, nempe 28, plus omnibus combinationibus septenarii, nempe 8, plus omnibus combinationibus octonarii, nempe I, factum esse quartum numerum progressionis quaternarii cujus origo est 2 : dico quartum numerum, quia 4 octonarii dimidium est.

Sunt enim numeri progressionis quaternarii quibus origo est 2, isti : 2, 8, 32, 128, 512, etc., quorum 2 primus est, 8 secundus, 32 tertius, et 128 quatus, cui 128 æquantur +35, dimidium combinationis 4 litterarum, +56 combinationis 5 litterarum, +28 combinationis 6 litterarum, +8 combinationis 7 litterarum, +1 combinationis 8 litterarum.

Voilà la première proposition, qui est purement arithmétique.

L'autre regarde la doctrine des parties, et est telle. Il faut dire auparavant : Si on a une partie de 5, par exemple, et qu'ainsi il en manque 4, le jeu sera infailliblement décidé en 8, qui est double de 4 : la valeur de la première partie de 5 sur l'argent de l'autre, est la fraction qui a pour numérateur la moitié de la combinaison de 4 sur 8 (je prends 4, parce qu'il est égal au nombre des parties qui manquent, et 8, parce qu'il est double de 4), et pour dénominateur ce même numérateur, plus toutes les combinaisons supérieures.

Ainsi si j'ai une partie de 5, il m'appartient sur l'argent de mon joueur $\frac{35}{128}$, c'est-à-dire, que s'il a mis 128 pistoles, j'en prends 35, et lui laisse le reste 93. Or cette fraction $\frac{35}{128}$, est la même que celle-là $\frac{105}{384}$, laquelle est faite par la multiplication des pairs pour le dénominateur, et de la multiplication des impairs pour le numérateur.

Vous verrez bien sans doute tout cela, si vous vous en donnez tant soit peu la peine. C'est pourquoi je trouve inutile de vous en entretenir davantage je vous envoie néanmoins une de mes vieilles Tables. Je n'ai pas le loisir de la copier, je la referai ; vous y verrez comme toujours la valeur de la première partie est égale à celle de la seconde, ce qui se trouve aisément par les combinaisons.

Vous verrez de même que les nombres de la première ligne augmentent toujours.

Ceux de la seconde, de même.

Ceux de la troisième, de même.

Mais ensuite ceux de la quatrième diminuent.

Ceux de la cinquième, etc.

Ce qui est étrange.

Je n'ai pas le temps de vous envoyer la démonstration d'une difficulté qui étonnoit fort M. de Meré car il a très-bon esprit, mais il n'est pas géomètre ; c'est, comme vous savez, un grand défaut ; et même il ne comprend pas qu'une ligne mathématique soit divisible à l'infini, et croit fort bien entendre qu'elle est composée de points en nombre fini, et jamais je n'ai pu l'en tirer ; si vous pouviez le faire, on le rendroit parfait. Il me disoit donc qu'il avoit trouvé fausseté dans les nombres par cette raison.

Si on entreprend de faire un 6 avec un dé, il y a avantage de l'entreprendre en 4, comme de 671 à 625.

Si on entreprend de faire sonnez avec deux dés, il y a désavantage de l'entreprendre en 24.

Et néanmoins 24 est à 36, qui est le nombre des faces de deux dés, comme 4 à 6, qui est le nombre des faces d'un dé.

Voilà quel étoit son grand scandale, qui lui faisoit dire hautement que les propositions n'étoient pas constantes, et que l'arithmétique se démentoit. Mais vous en verrez bien aisément la raison, par les principes où vous êtes.

Je mettrai par ordre tout ce que j'en ai fait, quand j'aurai achevé des Traités géométriques où je travaille il y a déjà quelque temps.

J'en ai fait aussi d'arithmétiques, sur le sujet desquels je vous supplie de me mander votre avis sur cette démonstration.

Je pose le lemme que tout le monde sait, que la somme de tant de nombres qu'on voudra de la progression continuée depuis l'unité, comme 1, 2, 3, 4, étant prise deux fois, est égale au dernier 4, multiplié par le prochainement plus grand 5, c'est-à-dire que la somme des nombres contenus dans A, étant prise deux fois, est égale au produit de A par A+1.

Maintenant je viens à ma proposition.

Duorum quorumlibet cuborum proximorum differentia, unitate demptá, sextupla est omnium numerorum in minoris radice contentorum.

Sint duæ radices R, S, *unitate differentes dico* $\mathrm{R}^3-\mathrm{S}^3-1$ *æquari summæ numerorum in* S *contentorum ; sexies sumptæ. Etenim* S *vocetur* A, *ergo* R *est* A+1. *Igitur cubus radicis* R, *seu* A+1, *est* $\mathrm{A}^3+3\mathrm{A}^2+3\mathrm{A}+1^3$ *; cubus verò* S *seu* A *est* A^3 *; et horum differentia est* $3\mathrm{A}^2+3\mathrm{A}+1^3$ *id est* $\mathrm{R}^3-\mathrm{S}^3$. *Igitur si auferatur unitas,* $3\mathrm{A}^2+3\mathrm{A}$ *æquatur* $\mathrm{R}^3-\mathrm{S}^3-1$. *Sed duplum summæ numerorum in* A *seu* S *contentorum æquatur, ex lemmate,* A *in* A + 1, *hoc est* $\mathrm{A}^2+\mathrm{A}$. *Igitur sextuplum summæ numerorum in* A *contentorum æquatur* $3\mathrm{A}^2+3\mathrm{A}$. *Sed* $3\mathrm{A}^2+3\mathrm{A}$ *æquatur* $\mathrm{R}^3-\mathrm{S}^3-1$. *Igitur* $\mathrm{R}^3-\mathrm{S}^3-1$ *æquatur sextuplo summæ numerorum in* A *seu* S *contentorum ; quod erat demonstrandum.*

On ne m'a pas fait de difficulté là-dessus ; mais on m'a dit qu'on ne m'en faisoit pas, par cette raison que tout le monde est accoutumé aujourd'hui à cette méthode : et moi je prétends que sans me faire grâce, on doit admettre cette démonstration comme d'un genre excellent. J'en attends néanmoins votre avis avec toute soumission : tout ce que j'ai démontré en arithmétique, est de cette nature. Voici encore deux difficultés.

J'ai démontré une proposition plane, en me servant du cube d'une ligne, comparé au cube d'une autre. Je prétends que cela est purement géométrique, et dans la sévérité la plus grande.

De même j'ai résolu ce problème : *De quatre plans, quatre points et quatre sphères, quatre quelconques étant donnés, trouver une sphère qui, touchant les sphères données, passe par les points donnés, et laisse sur les plans des portions de sphères capables d'angles donnés : et celui-ci : De trois cercles, trois points, trois lignes, trois quelconques étant donnés, trouver un cercle qui, touchant les cercles et les points, laisse sur la ligne un arc capable d'angle donné.*

J'ai résolu[2] ces problèmes pleinement, n'employant dans la construction que des cercles et des lignes droites. Mais dans la démonstration, je me sers des lieux solides, de paraboles ou hyperboles. Je prétends néanmoins qu'attendu que la construction est plane, ma solution est plane, et doit passer pour telle.

C'est bien mal reconnoître l'honneur que vous me faites de souffrir mes entretiens, que de vous importuner si long-temps : je ne pense jamais vous dire que deux mots, et si je ne vous dis pas ce que j'ai le plus sur le cœur, qui est que plus je vous connois, plus je vous admire et vous honore ; et que si vous voyiez à quel point cela est, vous donneriez une place dans votre amitié à celui qui est, monsieur, votre, etc. PASCAL.

Le 29 juillet 1654.

TABLE DONT IL EST FAIT MENTION DANS LA LETTRE PRÉCÉDENTE.

Si on joue chacun 256, en

Il m'appartient sur les 256 pistoles de mon joueur, pour la	6 Parties.	5 Parties.	4 Parties.	3 Parties.	2 Parties.	1 Partie.
1re Partie.	63	70	80	96	128	256
2e Partie.	63	70	80	96	128	
3e Partie.	56	60	64	64		
4e Partie.	42	40	32			
5e Partie.	24	16				
6e Partie.	8					

[2]Il y a apparence que toutes ces recherches sont perdues.

Si on joue 256, chacun, en

Il m'appartient sur les 256 de mon joueur, pour les		6 Parties.	5 Parties.	4 Parties.	3 Parties.	2 Parties.	1 Partie.
	La I^re Partie.	63	70	80	96	128	256
	2 I^res Parties.	126	140	160	192	256	
	3 I^res Parties.	182	200	224	256		
	4 I^res Parties.	224	240	256			
	5 I^res Parties.	248	256				
	6 I^res Parties.	256					

DEUXIÈME LETTRE DE PASCAL À FERMAT[3]

Monsieur,

Je ne pus vous ouvrir ma pensée entière touchant les partis de plusieurs joueurs, par l'ordinaire passé ; et même j'ai quelque répugnance à le faire, de peur qu'en ceci, cette admirable convenance qui étoit entre nous, et qui m'étoit si chère, ne commence à se démentir ; car je crains que nous ne soyons de différents avis sur ce sujet. Je veux vous ouvrir toutes mes raisons, et vous me ferez la grâce de me redresser, si j'erre, ou de m'affermir, si j'ai bien rencontré. Je vous le demande tout de bon et sincèrement ; car je ne me tiendrai pour certain que quand vous serez de mon côté.

Quand il n'y a que deux joueurs, votre méthode, qui procède par les combinaisons, est très-sûre ; mais quand il y en a trois, je crois avoir démonstration qu'elle est mal juste, si ce n'est que vous y procédiez de quelque autre manière que je n'entends pas. Mais la méthode que je vous ai ouverte, et dont je me sers partout, est commune à toutes les conditions imaginables de toutes sortes de partis, au lieu que celle des combinaisons (dont je ne me sers qu'aux rencontres particulières où elle est plus courte que la générale) n'est bonne qu'en ces seules occasions, et non pas aux autres.

Je suis sûr que je me donnerai à entendre ; mais il me faudra un peu de discours, et à vous un peu de patience.

Voici comment vous procédez, quand il y a deux joueurs. Si deux joueurs jouant en plusieurs parties, se trouvent en cet état qu'il manque deux parties au premier et trois au second, pour trouver le parti, il faut (dites-vous) voir en combien de parties le jeu sera décidé absolument.

Il est aisé de supputer que ce sera en quatre parties ; d'où vous concluez qu'il faut voir combien quatre parties se combinent entre deux joueurs, et voir combien il y a de combinaisons pour faire gagner le premier, et combien pour le second, et partager l'argent suivant cette proportion. J'eusse

[3]Tirée du Recueil des Œuvres de Fermat.

eu peine à entendre ce discours-là, si je ne l'eusse su de moi-même auparavant ; aussi vous l'aviez écrit dans cette pensée. Donc pour voir combien quatre parties se combinent entre deux joueurs, il faut imaginer qu'ils jouent avec un dé à deux faces (puisqu'ils ne sont que deux joueurs), comme à croix et pile, et qu'ils jettent quatre de ces dés (parce qu'ils jouent en quatre parties) ; et maintenant il faut voir combien ces dés peuvent avoir d'assiettes différentes : cela est aisé à supputer ; ils peuvent en avoir 16, qui est le second degré de 4, c'est-à-dire, le carré ; car figurons-nous qu'une des faces est marquée A, favorable au premier joueur, et l'autre B, favorable au second ; donc ces quatre dés peuvent s'asseoir sur une de ces 16 assiettes, aaaa.... bbbb.

a	a	a	a	1
a	a	a	b	1
a	a	b	a	1
a	a	b	b	1
a	b	a	a	1
a	b	a	b	1
a	b	b	a	1
a	b	b	b	2
b	a	a	a	1
b	a	a	b	1
b	a	b	a	1
b	a	b	b	2
b	b	a	a	1
b	b	a	b	2
b	b	b	a	2
b	b	b	b	2

Et parce qu'il manque deux parties au premier joueur, toutes les faces qui ont deux A le font gagner ; donc il en a 11 pour lui : et parce qu'il manque trois parties au second, toutes les faces où il y a trois B peuvent le faire gagner ; donc il y en a 5 ; donc il faut qu'ils partagent la somme, comme 11 à 5.

Voilà votre méthode quand il y a deux joueurs. Sur quoi vous dites que, s'il y en a davantage, il ne sera pas difficile de faire les partis par la même méthode.

Sur cela, monsieur, j'ai à vous dire que ce parti pour deux joueurs, fondé sur les combinaisons, est très-juste et très-bon ; mais que s'il y a plus de deux joueurs, il ne sera pas toujours juste, et je vous dirai la raison de cette différence.

Je communiquai votre méthode à nos messieurs ; sur quoi M. de Roberval me fit cette objection.

Que c'est à tort que l'on prend l'art de faire le parti, sur la supposition qu'on joue en quatre parties ; vu que quand il manque deux parties à l'un et trois à l'autre, il n'est que pas de nécessité l'on joue quatre parties, pouvant arriver qu'on n'en jouera que deux ou trois, ou, à la vérité, peut-être quatre ; et ainsi qu'il ne voyoit pas pourquoi on prétendoit de faire le parti juste sur une condition feinte, qu'on jouera quatre parties ; vu que la condition naturelle du jeu est qu'on ne jouera plus dès que l'un des joueurs aura gagné ; et qu'au moins si cela n'étoit faux, cela n'étoit pas démontré. De sorte qu'il avoit quelque soupçon que nous avions fait un paralogisme.

Je lui répondis que je ne me fondois pas tant sur cette méthode des combinaisons, laquelle véritablement n'est pas en son lieu en cette occasion, comme sur mon autre méthode universelle à qui rien n'échappe, et qui porte sa démonstration avec soi, qui trouve le même parti précisément que celle des combinaisons ; et de plus, je lui démontrai la vérité du parti entre deux joueurs par les combinaisons en cette sorte,

N'est-il pas vrai que si deux joueurs se trouvant en cet état de l'hypothèse qu'il manque deux parties à l'un et trois à l'autre, conviennent maintenant de gré à gré qu'on joue quatre parties complètes, c'est-à-dire, qu'on jette les quatre dés à deux faces tout à la fois : n'est-il pas vrai, dis-je, que s'ils ont délibéré de jouer les quatre parties, le parti doit être tel que nous avons dit, suivant la multitude des assiettes favorables à chacun ?

Il en demeura d'accord ; et cela, en effet, est démonstratif ; mais il nioit que la même chose subsistât, en ne s'astreignant pas à jouer les quatre parties. Je lui dis donc ainsi :

N'est-il pas clair, que les mêmes joueurs n'étant pas astreints à jouer quatre parties, mais voulant quitter le jeu dès que l'un auroit atteint son nombre, peuvent, sans dommage, ni avantage, s'astreindre à jouer les quatre parties entières, et que cette convention ne change en aucune manière leur condition ? Car si le premier gagne les deux premières parties de quatre, et qu'ainsi il ait gagné, refusera-t-il de jouer encore deux parties, vu que s'il les gagne, il n'a pas mieux gagné ; et s'il les perd, il n'a pas moins gagné ; car ces deux que l'autre a gagnées, ne lui suffisent pas, puisqu'il lui en faut trois ; et ainsi il n'y a pas assez de quatre parties pour faire qu'ils puissent tous deux atteindre le nombre qui leur manque ?

Certainement il est aisé de considérer qu'il est absolument égal et indifférent à l'un et à l'autre de jouer en la condition naturelle à leur jeu, qui est de finir dès qu'on aura son compte, ou de jouer les quatre parties entières ; donc, puisque ces deux conditions sont égales et indifférentes, le parti doit être tout pareil en l'une et en l'autre. Or il est juste quand ils sont obligés de jouer quatre parties comme je l'ai montré ; donc il est juste aussi en l'autre cas.

Voilà comment je le démontrai : et si vous y prenez garde, cette démonstration est fondée sur l'égalité des deux conditions, vraie et feinte à l'égard de deux joueurs, et qu'en l'une et en l'autre un même gagnera toujours ; et si l'un gagne ou perd en l'une, il gagnera ou perdra en l'autre, et jamais deux n'auront leur compte.

Suivons la même pointe pour trois joueurs, et posons qu'il manque une partie au premier, qu'il en manque deux au second et deux au troisième. Pour faire le parti suivant la même méthode des combinaisons[4], il faut chercher d'abord en combien de parties le jeu sera décidé, comme nous avons

[4]Pascal emploie d'une manière défectueuse la méthode des combinaisons pour trois joueurs, comme on le verra

fait quand il y avoit deux joueurs, ce sera en trois. Car ils ne sauroient jouer trois parties sans que la décision soit arrivée nécessairement.

Il faut voir maintenant combien trois parties se combinent en trois joueurs ; combien il y en a de favorables à l'un, combien à l'autre, et combien au dernier ; et, suivant cette proportion, distribuer l'argent de même qu'on a fait en l'hypothèse de deux joueurs.

Pour voir combien il y a de combinaisons en tout, cela est aisé : c'est la troisième puissance de trois ; c'est-à-dire, son cube 27.

Car si on jette trois dés à la fois (puisqu'il faut jouer trois parties) qui aient chacun trois faces, puisqu'il y a trois joueurs, l'une marquée A favorable au premier, l'autre B pour le second, l'autre C pour le troisième ; il est manifeste que ces trois dés jetés ensemble, peuvent s'asseoir sur 27 assiettes différentes, savoir :

a a a	1		
a a b	1		
a a c	1		
a b a	1		
a b b	1	2	
a b c	1		
a c a	1		
a c b	1		
a c c	1		3
b a a	1		
b a b	1	2	
b a c	1		
b b a	1	2	
b b b		2	
b b c		2	
b c a	1		
b c b		2	
b c c			3
c a a	1		
c a b	1		
c a c	1		3
c b a	1		
c b b		2	
c b c			3
c c a	1		3
c c b			3
c c c			3

Or, il ne manque qu'une partie au premier : donc toutes les assiettes où il y a un A sont pour lui ; donc il y en a 19.

Il manque deux parties au second : donc toutes les assiettes où il y a deux B sont pour lui ; donc il y en a 7.

par la réponse de Fermat.

Il manque deux parties au troisième : donc toutes les assiettes où il y a deux C sont pour lui ; donc il y en a 7.

Si de là on concluoit qu'il faudroit donner à chacun suivant la proportion de 19, 7, 7, on se tromperoit trop grossièrement, et je n'ai garde de croire que vous le fassiez ainsi : car il y a quelques faces favorables au 3 premier et au second tout ensemble, comme ABB ; car le premier y trouve un A qu'il lui faut, et le second deux BB qui lui manquent ainsi ACC est pour le premier et le troisième.

Donc il ne faut pas compter ces faces qui sont communes à deux comme valant la somme entière à chacun, mais seulement la moitié.

Car s'il arrivoit l'assiette ACC, le premier et le troisième auroient même droit à la somme, ayant chacun leur compte ; donc ils partageroient l'argent par la moitié : mais s'il arrive l'assiette ABB, le premier gagne seul ; il faut donc faire la supputation ainsi.

Il y a treize assiettes qui donnent l'entier au premier, et six qui lui donnent la moitié, et huit qui ne lui valent rien.

Donc si la somme entière est une pistole :

Il y a treize faces qui lui valent chacune 1 pistole.

Il y a six faces qui lui valent chacune $\frac{1}{2}$ pistole.

Et huit qui ne valent rien.

Donc, en cas de parti, il faut multiplier,

13 par une pistole, qui font	13
6 par une demie, qui font.	3
8 par zéro, qui font.	0
Somme 27	Somme 16

Et diviser la somme des valeurs 16 la par somme des assiettes 27, qui fait la fraction $\frac{16}{27}$ qui est ce qui appartient au premier en cas de parti ; savoir, 16 pistoles de 27.

Le parti du second et du troisième joueur se trouvera de même.

Il y a 4 assiettes, qui lui valent 1 pistole : multipliez.	4
Il y a 3 assiettes, qui lui valent $\frac{1}{2}$ pistole : multipliez.	1 $\frac{1}{2}$
Et 20 assiettes, qui ne lui valent rien.	.0
Somme 27	Somme 5 $\frac{1}{2}$

Donc il appartient au second joueur 5 pistoles et $\frac{1}{2}$ sur 27, et autant au troisième ; et ces trois sommes $5\ \frac{1}{2}$,$5\ \frac{1}{2}$ et 16 étant jointes, font les 27.

Voilà, ce me semble, de quelle manière il faudroit faire les partis par les combinaisons suivant votre méthode, si ce n'est que vous ayez quelque autre chose sur ce sujet que je ne puis savoir. Mais si je ne me trompe, ce parti est mal juste.

La raison en est qu'on suppose une chose fausse, qui est qu'on joue en trois parties infailliblement, au lieu que la condition naturelle de ce jeu-là est qu'on ne joue que jusqu'à ce qu'un des joueurs ait atteint le nombre des parties qui lui manque, auquel cas le jeu cesse.

Ce n'est pas qu'il ne puisse arriver qu'on joue trois parties, mais il peut arriver aussi qu'on n'en jouera qu'une ou deux, et rien de nécessité.

Mais d'où vient, dira-t-on, qu'il n'est pas permis de faire en cette rencontre la même supposition feinte que quand il y avoit deux joueurs ? En voici la raison :

Dans la condition véritable de ces trois joueurs, il n'y en a qu'un qui peut gagner : car la condition est que dès qu'on a gagné, le jeu cesse ; mais, en la condition feinte, deux peuvent atteindre le nombre de leurs parties ; savoir, si le premier en gagne une qui lui manque, et un des autres, deux qui lui manquent ; car ils n'auront joué que trois parties : au lieu que quand il n'y avoit que deux joueurs, la condition feinte et la véritable convenoient pour l'avantage des joueurs en tout, et c'est ce qui met l'extrême différence entre la condition feinte et la véritable.

Que si les joueurs se trouvant en l'état de l'hypothèse, c'est-à-dire, s'il manque une partie au premier, deux au second et deux au troisième, veulent maintenant, de gré à gré, et conviennent de cette condition, qu'on jouera trois parties complètes, et que ceux qui auront atteint le nombre qui leur manque, prendront la somme entière (s'ils se trouvent seuls qui l'aient atteint), ou s'il se trouve que deux l'aient atteint, qu'ils la partageront également : en ce cas, le parti doit se faire comme je viens de le donner, que le premier ait 16, le second $5\ \frac{1}{2}$, le troisième $5\ \frac{1}{2}$ de 27 pistoles ; et cela porte sa démonstration de soi-même, en supposant cette condition ainsi.

Mais s'ils jouent simplement à condition, non pas qu'on joue nécessairement trois parties, mais seulement jusqu'à ce que l'un d'entre eux ait atteint ses parties, et qu'alors le jeu cesse, sans donner moyen à un autre d'y arriver, alors il appartient au premier 17 pistoles, au second 5, au troisième 5, de 27.

Et cela se trouve par ma méthode générale, qui détermine aussi qu'en la condition précédente il en faut 16 au premier, $5\ \frac{1}{2}$ au second, et $5\ \frac{1}{2}$ au troisième, sans se servir des combinaisons ; car elle va partout seule et sans obstacle.

Voilà, monsieur, mes pensées sur ce sujet, sur lequel je n'ai d'autre avantage sur vous que celui d'y avoir beaucoup plus médité. Mais c'est peu de chose à votre égard, puisque vos premières vues sont plus pénétrantes que la longueur de mes efforts.

Je ne laisse pas de vous ouvrir mes raisons pour en attendre le jugement de vous. Je crois vous avoir fait connoître par là que la méthode des combinaisons est bonne entre deux joueurs par accident, comme elle l'est aussi quelquefois entre trois joueurs, comme quand il manque une partie à l'un, une à l'autre, et deux à l'autre ; parce qu'en ce cas le nombre des parties dans lesquelles le jeu sera achevé, ne suffit pas pour en faire gagner deux ; mais elle n'est pas générale, et n'est généralement bonne qu'en cas seulement qu'on soit astreint à jouer un certain nombre de parties exactement. De sorte que comme vous n'aviez pas ma méthode, quand vous m'avez proposé le parti de plusieurs joueurs, mais seulement celle des combinaisons, je crains que nous ne soyons de sentiments différents sur ce sujet. Je vous supplie de me mander de quelle sorte vous procédez à la recherche de ce parti. Je recevrai votre réponse avec respect et avec joie, quand même votre sentiment me seroit contraire. Je suis, etc. PASCAL.

Du 24 août 1654.

PREMIÈRE LETTRE DE FERMAT À PASCAL

MONSIEUR,

Nos coups fourrés continuent toujours, et je suis aussi-bien que vous dans l'admiration de quoi nos pensées s'ajustent si exactement, qu'il semble qu'elles aient pris une même route et fait un même chemin : vos derniers traités du Triangle arithmétique et de son application, en sont une preuve authentique ; et si mon calcul ne me trompe, votre onzième conséquence couroit la poste de Paris à Toulouse, pendant que ma proposition des nombres figurés, qui en effet est la même, alloit de Toulouse à Paris. Je n'ai garde de faillir, tandis que je rencontrerai de cette sorte ; et je suis persuadé que le vrai moyen pour s'empêcher de faillir, est celui de concourir avec vous. Mais si j'en disois davantage, la chose tiendroit du compliment, et nous avons banni cet ennemi des conversations douces et aisées.

Ce seroit maintenant à mon tour à vous débiter quelqu'une de mes inventions numériques ; mais la fin du parlement augmente mes occupations, et j'ose espérer de votre bonté que vous m'accorderez un répit juste et quasi nécessaire. Cependant je répondrai à votre question des trois joueurs qui jouent en deux parties. Lorsque le premier en a une, et que les autres n'en ont pas une, votre première solution est la vraie, et la division de l'argent doit se faire en dix-sept, cinq et cinq ; de quoi la raison est manifeste et se prend toujours du même principe, les combinaisons faisant voir d'abord que le premier a pour lui dix-sept hasards égaux, lorsque chacun des autres n'en a que cinq.

Au reste, il n'est rien à l'avenir que je ne vous communique avec toute franchise. Songez cependant, si vous le trouvez à propos, cette proposition.

Les puissances carrées de 2, augmentées de l'unité, sont toujours des nombres premiers[5].

(*) Cette lettre paroît répondre à une lettre de Pascal que nous n'avons point. Nous donnons, suivant l'ordre chronologique, ce qui nous reste de cette correspondance.

[5] Cette proposition n'est pas vraie généralement. M. Euler a remarqué (*Anciens Mém. de l'Acad. de Pétersbourg, Tome VI, ann. 1732* et 1733, *page* 104) que la trente-deuxième puissance de 2, augmentée de l'unité, c'est-à-dire 4 294 967 297, est divisible par 641.

Le carré de 2, augmenté de l'unité, fait 5, qui est nombre premier.

Le carré du carré fait 16, qui augmenté de l'unité, fait 17, nombre premier.

Le carré de 16 fait 256, qui, augmenté de l'unité, fait 257, nombre premier.

Le carré de 256 fait 65536, qui, augmenté de l'unité, fait 65537, nombre premier ; et ainsi à l'infini.

C'est une propriété de la vérité de laquelle je vous réponds. La démonstration en est très malaisée, et je vous avoue que je n'ai pu encore la trouver pleinement ; je ne vous la proposerois pas pour la chercher, si j'en étois venu à bout.

Cette proposition sert à l'invention des nombres qui sont à leurs parties aliquotes en raison donnée, sur quoi j'ai fait des découvertes considérables. Nous en parlerons une autre fois. Je suis, monsieur, votre, etc. FERMAT.

A Toulouse, le 29 août 1654.

DEUXIÈME LETTRE DE FERMAT À PASCAL EN RÉPONSE A CELLE DE LA PAGE 372.

MONSIEUR,

N'appréhendez pas que notre convenance se démente, vous l'avez confirmée vous-même en pensant la détruire, et il me semble qu'en répondant à M. de Roberval pour vous, vous avez aussi répondu pour moi. Je prends l'exemple des trois joueurs, au premier desquels il manque une partie, et à chacun des deux autres deux, qui est le cas que vous m'opposez. Je n'y trouve que dix-sept combinaisons pour le premier, et cinq pour chacun des deux autres ; car quand vous dites que la combinaison ACC est bonne pour le premier et pour le troisième, il semble que vous ne vous souveniez plus que tout ce qui se fait après que l'un des joueurs a gagné, ne sert plus de rien. Or, cette combinaison ayant fait gagner le premier dès la première partie, qu'importe que le troisième en gagne deux ensuite, puisque quand il en gagneroit trente, tout cela seroit superflu ? Ce qui vient de ce que, comme vous avez très-bien remarqué, cette fiction d'étendre le jeu à un certain nombre de parties, ne sert qu'à faciliter la règle, et (suivant mon sentiment) à rendre tous les hasards égaux, ou bien, plus intelligiblement, à réduire toutes les fractions à une même dénomination. Et afin que vous n'en doutiez plus, si au lieu de trois parties, vous étendez, au cas proposé, la feinte jusqu'à quatre, il y aura non-seulement 27 combinaisons, mais 81, et il faudra voir combien de combinaisons feront gagner au premier une partie plutôt que deux à chacun des autres, et combien feront gagner à chacun des deux autres deux parties plutôt qu'une au premier. Vous trouverez que les combinaisons pour le gain du premier, seront 51, et celles de chacun des autres deux 15. Ce qui revient à la même raison, que si vous prenez 5 parties où tel autre nombre qu'il vous plaira, vous trouverez toujours 3 nombres en proportion de 17, 5, 5, et ainsi j'ai droit de dire que la combinaison ACC n'est que pour le premier et non pour le troisième, et que CCA n'est que pour le troisième et non pour le premier, et que partant, ma règle des combinaisons est la même en 3 joueurs qu'en 2, et généralement en tous nombres.

Vous aviez déjà pu voir par ma précédente, que je n'hésitois point à la solution véritable de la question des 3 joueurs dont je vous avois envoyé les 3 nombres décisifs 17, 5, 5. Mais parce que M. Roberval sera peut-être bien aise de voir une solution sans rien feindre, et qu'elle peut quelquefois produire des abrégés en beaucoup de cas, la voici en l'exemple proposé.

Le premier peut gagner, ou en une seule partie, ou en deux, ou en trois.

S'il gagne en une seule partie, il faut qu'avec un dé qui a trois faces, il rencontre la favorable du premier coup. Un seul dé produit 3 hasards ; ce joueur a donc pour lui $\frac{1}{3}$ des hasards, lorsqu'on ne joue qu'une partie.

Si on en joue deux, il peut gagner de deux façons, ou lorsque le second joueur gagne la première et lui la seconde, ou lorsque le troisième gagne la première et lui la seconde. Or, deux dés produisent 9 hasards : ce joueur a donc pour lui $\frac{2}{9}$ des hasards lorsqu'on joue deux parties.

Si on en joue trois, il ne peut gagner que de deux façons, ou lorsque le second gagne la première, le troisième la seconde et lui la troisième, ou lorsque le troisième gagne la première, le second la seconde, et lui la troisième ; car, si le second ou le troisième joueur gagnoit les deux premières, il gagneroit le jeu, et non pas le premier joueur. Or, trois dés ont 27 hasards ; donc ce premier joueur a $\frac{2}{27}$ de hasards lorsqu'on joue trois parties.

La somme des hasards qui font gagner ce premier joueur, est par conséquent $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{9}$, et $\frac{2}{27}$; ce qui fait en tout $\frac{17}{27}$.

Et la règle est bonne et générale en tous les cas ; de sorte que sans recourir à la feinte, les combinaisons véritables en chaque nombre des parties portent leur solution, et font voir ce que j'ai dit au commencement, que l'extension à un certain nombre de parties n'est autre chose que la réduction de diverses fractions à une même dénomination. Voilà en peu de mots tout le mystère, qui nous remettra sans doute en bonne intelligence, puisque nous ne cherchons l'un et l'autre que la raison et la vérité.

J'espère vous envoyer à la Saint-Martin un abrégé de tout ce que j'ai inventé de considérable aux nombres. Vous me permettrez d'être concis, et de me faire entendre seulement à un homme qui comprend tout à demi-mot.

Ce que vous y trouverez de plus important, regarde la proposition que tout nombre est composé d'un, de deux, ou de trois triangles ; d'un, de deux, de trois ou de quatre carrés ; d'un, de deux, de trois, de quatre ou de cinq pentagones, d'un, de deux, de trois, de quatre, de cinq ou de six hexagones, et à l'infini. Pour y parvenir, il faut démontrer que tout nombre premier qui surpasse de l'unité un multiple de quatre, est composé de deux carrés, comme 5, 13, 17, 29, 37, etc.

Étant donné un nombre premier de cette nature, comme 53, trouver par règle générale les deux carrés qui le composent.

Tout nombre premier qui surpasse de l'unité un multiple de 3, est composé d'un carré et du triple d'un autre carré, comme 7, 13, 19, 31, 37, etc.

Tout nombre premier qui surpasse d'un ou de trois un multiple de huit, est composé d'un carré et du double d'un autre carré, comme II, 17, 19, 41, 43, etc.

Il n'y a aucun triangle en nombres duquel l'aire soit égale à un nombre carré. Cela sera suivi de l'invention de beaucoup de propositions que Bachet avoue avoir ignorées, et qui manquent dans le Diophante.

Je suis persuadé que dès que vous aurez connu ma façon de démontrer en cette nature de propositions, elle vous paroîtra belle, et vous donnera lieu de faire beaucoup de nouvelles découvertes ; car il faut, comme vous savez, que*multi pertranseant ut augeatur scientia*.

S'il me reste du temps, nous parlerons ensuite des nombres magiques, et je rappellerai mes vieilles espèces sur ce sujet. Je suis de tout mon cœur, monsieur, votre, etc. Fermat.

Ce 25 septembre.

Je souhaite la santé de M. de Carcavi comme la mienne, et suis tout à lui.

Je vous écris de la campagne, et c'est ce qui retardera par aventure mes réponses pendant ces vacations.

TROISIÈME LETTRE DE FERMAT À PASCAL

Monsieur,

Si j'entreprends de faire un point avec un seul dé en huit coups ; si nous convenons, après que l'argent est dans le jeu, que je ne jouerai pas le premier coup, il faut, par mon principe, que je tire du jeu un sixième du total pour être désintéressé, à raison dudit premier coup. Que si encore nous convenons après cela que je ne jouerai pas le second coup, je dois, pour mon indemnité, tirer le sixième du restant, qui est $\frac{25}{216}$ du total ; et si après cela nous convenons que je ne jouerai pas le troisième coup, je dois, pour mon indemnité, tirer le sixième du restant, qui est $\frac{125}{1256}$ du total. Et si après cela nous convenons encore que je ne jouerai pas le quatrième coup, je dois tirer le sixième du restant, qui est $\frac{5}{36}$ du total. Et je conviens avec vous que c'est la valeur du quatrième coup, supposé qu'on ait déjà traité des précédents. Mais vous me proposez dans l'exemple dernier de votre lettre (je mets vos propres termes) que si j'entreprends de trouver le six en huit coups et que j'en aie joué trois sans le rencontrer ; si mon joueur me propose de ne point jouer mon quatrième coup, et qu'il veuille me désintéresser à cause que je pourrois le rencontrer ; il m'appartiendra $\frac{125}{1256}$ de la somme entière de nos mises ; ce qui pourtant n'est pas vrai, suivant mon principe ; car, en ce

Cette lettre est sans date dans la copie que j'en ai : elle paroît répondre à une lettre de Pascal que je n'ai pu recouvrer. (Note de l'édition de 1779.)

cas, les trois premiers coups n'ayant rien acquis à celui qui tient le dé, la somme totale restant dans le jeu, celui qui tient le dé et qui convient de ne pas jouer son quatrième coup, doit prendre pour son indemnité un sixième du total ; et s'il avoit joué quatre coups sans trouver le point cherché, et qu'on convint qu'il ne joueroit pas le cinquième, il auroit de même pour son indemnité un sixième du total ; car la somme entière restant dans le jeu, il ne suit pas seulement du principe, mais il est même du sens naturel que chaque coup doit donner un égal avantage. Je vous prie donc que je sache si nous sommes conformes au principe, ainsi que je crois, ou si nous différons seulement en l'application. Je suis, de tout mon cœur, etc. Fermat.

TROISIÈME LETTRE DE PASCAL À FERMAT

EN RÉPONSE À CELLE DE LA PAGE 385.

Monsieur,

Votre dernière lettre m'a parfaitement satisfait ; j'admire votre méthode pour les partis, d'autant mieux que je l'entends fort bien ; elle est entièrement vôtre, et n'a rien de commun avec la mienne, et arrive au même but facilement. Voilà notre intelligence rétablie. Mais, monsieur, si j'ai concouru avec vous en cela, cherchez ailleurs qui vous suive dans vos inventions numériques, dont vous m'avez fait la grâce de m'envoyer les énonciations : pour moi je vous confesse que cela me passe de bien loin ; je ne suis capable que de les admirer, et vous supplie très-humblement d'occuper votre premier loisir à les achever. Tous nos messieurs les virent samedi dernier, et les estimèrent de tout leur cœur : on ne peut pas aisément supporter l'attente de choses si belles et si souhaitables ; pensez-y donc, s'il vous plaît, et assurez-vous que je suis, etc. Pascal.

Paris, 27 octobre 1654.

QUATRIÈME LETTRE DE FERMAT À PASCAL

Monsieur,

Dès que j'ai su que nous sommes plus proches l'un de l'autre que nous n'étions auparavant, je n'ai pu résister à un dessein d'amitié dont j'ai prié M. de Carcavi d'être le médiateur : en un mot je prétends vous embrasser, et converser quelques jours avec vous ; mais parce que ma santé n'est guère plus forte que la vôtre, jose espérer qu'en cette considération vous me ferez la grâce de la moitié du chemin, et que vous m'obligerez de me marquer un lien entre Clermont et Toulouse, où je ne manquerai pas de me rendre vers la fin de septembre ou le commencement d'octobre. Si vous ne prenez pas ce parti, vous courrez hasard de me voir chez vous, et d'y avoir deux malades en même temps. J'attends de vos nouvelles avec impatience, et suis de tout mon cœur, tout à vous. Fermat.

À Toulouse, le 25 juillet 1660.

LETTRE DE PASCAL À FERMAT, EN RÉPONSE À LA PRÉCÉDENTE

Monsieur,

Vous êtes le plus galant homme du monde, et je suis assurément un de ceux qui sais le mieux reconnoître ces qualités-là et les admirer infiniment, surtout quand elles sont jointes aux talents qui se trouvent singulièrement en vous tout cela m'oblige à vous témoigner de ma main ma reconnoissance pour l'offre que vous me faites, quelque peine que j'aie encore d'écrire et de lire moi-même : mais l'honneur que vous me faites m'est si cher, que je ne puis trop me hâter d'y répondre. Je vous dirai donc, monsieur, que si j'étois en santé, je serois volé à Toulouse, et que je n'aurois pas souffert qu'un homme comme vous eût fait un pas pour un homme comme moi. Je vous dirai aussi que quoique vous soyez celui de toute l'Europe que je tiens pour le plus grand géomètre, ce ne seroit pas cette qualité-là qui m'auroit attiré ; mais que je me figure tant d'esprit et d'honnêteté en votre conversation, que c'est pour cela que je vous rechercherois. Car pour vous parler franchement de la géométrie, je la trouve le plus haut exercice de l'esprit ; mais en même temps je la connois pour si inutile, que je fais peu de différence entre un homme qui n'est que géomètre et un habile artisan. Aussi je l'appelle le plus beau métier du monde ; mais enfin ce n'est qu'un métier ; et j'ai dit souvent qu'elle est bonne pour faire l'essai, mais non pas l'emploi de notre force : de sorte que je ne ferois pas deux pas pour la géométrie, et je m'assure que vous êtes fort de mon humeur. Mais il y a maintenant ceci de plus en moi, que je suis dans des études si éloignées de cet esprit-là, qu'à peine me souviens-je qu'il y en ait. Je m'y étois mis il y a un an ou deux, par une raison tout-à-fait singulière, à laquelle ayant satisfait, je suis au hasard de ne jamais plus y penser, outre que ma santé n'est pas encore assez forte ; car je suis si foible, que je ne puis marcher sans bâton, ni me tenir à cheval. Je ne puis même faire que trois ou quatre lieues au plus en carrosse ; c'est ainsi que je suis venu de Paris ici en vingt-deux jours. Les médecins m'ordonnent les eaux de Bourbon pour le mois de septembre, et je suis engagé autant que je puis l'être depuis deux mois, d'aller de là en Poitou par eau jusqu'à Saumur, pour demeurer jusqu'à Noël avec M. le duc de Roannès, gouverneur de Poitou, qui a pour moi des sentiments que je ne vaux pas. Mais comme je passerai par Orléans en allant à Saumur par la rivière, si ma santé ne me permet pas de passer outre, j'irai de là à Paris. Voilà, monsieur, tout l'état de ma vie présente, dont je suis obligé de vous rendre compte, pour vous assurer de l'impossibilité où je suis de recevoir l'honneur que vous daignez m'offrir, et que je souhaite de tout mon cœur de pouvoir un jour reconnoître, ou en vous, ou en messieurs vos enfants, auxquels je suis tout dévoué, ayant une vénération particulière pour ceux qui portent le nom du premier homme du monde. Je suis, etc. Pascal.

De Bienassis, le 10 août 1660.