Gelöste une ungelöste probleme aus der primzahlverteilung une der riemannschen zetafunktion

Edmund Landau

Das Organisationskomitee dieses Kongresses war so freundlich, mich vor einigen Monaten aufzufordern, in einer allgemeinen Sitzung einen Vortrag über die Ent-wicklung eines Kapitels der Mathematik zu halten, dessen Auswahl mir vorbehalten blieb. Ich glaubte, im Sinne dieser ehrenvollen Aufforderung zu handeln, wenn ich das Gebiet wählte, dem die Mehrzahl, ungefähr zwei Drittel, meiner bisherigen eigenen Publikationen angehört, und in dem ich daher neben dem Bericht über die Leistungen anderer auch einige eigene Gedanken entwickeln kann die Lehre von der Verteilung der Primzahlen und die damit in engem Zusammenhang stehende Theorie der Riemannschen Zetafunktion. Der Vortrag wird sich jedoch nicht auf diese Probleme allein beschränken, sondern gleichzeitig zu verwandten Fragen der analytischen Zahlentheorie und der speziellen Funktionentheorie Bezug nehmen.

Ich weiss, dass die Kenntnis der Zahlentheorie wenig verbreitet unter den Mathematikern ist, und dass speziell die Schwierigkeit der Methoden der analy-tischen Zahlentheorie nicht viele Fachgenossen angelockt hat, sich mit den schönen Ergebnissen dieser Disziplin vertraut zu machen. Ich werde daher in diesem Vortrag keine Kenntnisse aus diesem Gebiet voraussetzen und so sprechen, als ob ich vor einer Korona stände, welche von diesen Dingen noch nichts weiss. Natürlich er-wartete ich von vornherein unter Ihnen manchen Meister gerade dieses Gebietes, von dem ich früher nur zu lernen hatte.

Was eine Primzahl ist, weiss jeder; es sind die Zahlen 2, 3, 5, 7 u. s. w., welche genau zwei Teiler besitzen, nämlich die Zahl 1 und sich selbst. Aus ihnen lassen sich alle Zahlen > 1 durch Multiplikation zusammensetzen, sogar eindeutig. Das ist der Fundamentalsatz der Zahlentheorie und auch jedem aus dem Elemen-tarunterricht bekannt. Daraus allein folgt noch nicht, dass es unendlich viele Primzahlen gibt; denn schon die eine Primzahl 2 erzeugt durch Multiplikation mit sich unendlich viele Zahlen, und es wäre daher nicht ausgeschlossen, dass endlich viele Primzahlen genügen, um alle Zahlen zu erzeugen. Aber bereits Euklid hat vor mehr als zwei Jahrtausenden bewiesen, dass es unendlich viele Primzahlen gibt. Wenn also p_n die $n$te Primzahl bezeichnet, so hat dies für jedes positive ganzen eine Bedeutung, und p_n wächst natürlich mit n ins Unendliche. Es wäre vom Standpunkte der heutigen Zahlentheorie aus ein unbescheidenes Verlangen, p_n durch n mit Hilfe eines geschlossenen Ausdrucks darstellen zu wollen, der etwanur aus denjenigen Funktionen zusammengesetzt ist, mit denen die Mathematik üblicherweise operiert, und der noch dazu einfache Bauart hätte. Vielmehr ging die Fragestellung dahin, p, für grossen näherungsweise durch eine der einfachen Funktionen von a darzustellen. Näherungsweise in dem präzisen Sinn, dass der Quotient für $n = \infty$ den Limes 1 hat. Diese Fragestellung ist gleichwertig mit der folgenden. x sei eine positive Grösse, ganz oder nicht ; $\pi(x)$ bezeichne die Anzahl der Primzahlen $\leq x$. Nach Euklid wächst $\pi(x)$ mit ins Unendliche. Das Problem lautet, $\pi(x)$ mit einer einfachen Funktion so in Beziehung zu setzen, dass der Quotient den Limes 1 hat, d. h. dass er wirklich einen Limes

Référence : Landau, E. (1912), Gelöste und ungelöste Probleme aus der Theorie der Primzahlverteilung und der Riemannschen Zetafunktion, Jahresber. Deutsche Math. Ver. 21, 208–228. [Proc. 5th Internat. Congress of Math., I, 93–108, Cambridge 1913.

Transcription en LaTeX et traduction : Denise Vella-Chemla, assistée de Google traduction, octobre 2025

besitzt und dieser gleich 1 ist. Gauss, Legendre und Dirichlet vermuteten, dass

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log\ x}$$

ist. Das Zeichen (sprich: asymptotisch gleich) bedeutet eben, dass der Quotient für gegen 1 strebt. Diese höchst bemerkenswerte Vermutung ist völlig identisch mit der anderen, die sich an meine ursprüngliche Fragestellung anlehnt:

$$p_n \sim n \log\ n.$$

Es wäre also

$$\lim_{n=\infty} \frac{p_n}{n \log\ n} = 1,$$

folglich

$$\lim_{n=\infty} \frac{p_{n+1}}{p_n} = 1.$$

Letzteres ist natürlich nur ein Korollar und sagt weniger aus; ist es doch z. B. auch für die Menge der Zahlen n statt der pa erfüllt. Ich bemerke aber gleich, dass mir für dies Korollar kein Beweis bekannt ist, der nicht zugleich auch den schärferen Satz liefert. Gauss, Legendre und Dirichlet gelang es nicht, den Satz über $\pi(x)$ zu beweisen, den ich den Primzahlsatz nennen will. Und doch hat Gauss ihn schon als ungefähr fünfzehnjähriger Knabe vermutet, wie er in einem Briefe berichtet, den er als 72-jähriger Mann über diese Dinge an Encke geschrieben hat.

Was aber Dirichlet betrifft, so liegt eine seiner berühmtesten Leistungen im Primzahlgebiet. Er hat im Jahre 1837 für die Primzahlen einer beliebigen arith-metischen Progression unter Überwindung grosser Schwierigkeiten das geleistet, was für die Primzahlen überhaupt schon durch Euklid bekannt war. Es seien k und l positive ganze Zahlen, aber ohne gemeinsamen Teiler; man betrachte alle Zahlen $ky + l$, wo y die Werte $0, 1, 2, 3, \ldots$ durchläuft; also z. B. $(k = 100, l = 19)$ die Zahlen $19, 119, 219, 319$, Dirichlet hat bewiesen, dass in jeder solchen arith-metischen Reihe unendlich viele Primzahlen vorkommen. Die Hauptschwierigkeit bei seinem Beweise bestand darin zu zeigen, dass gewisse unendliche Reihen, deren Konvergenz trivial ist, eine von 0 verschiedene Summe besitzen. Diese Klippe über-wand er auf genialem Umwege durch Heranziehung der Theorie der Klassenzahl quadratischer Formen. Heute kann man dies Nichtverschwinden allerdings nach Herrn Mertens direkt auf wenigen Zeilen beweisen; aber sonst ist Dirichlets Beweis in keinem wesentlichen Punkte vereinfacht worden.

Schon Legendre hatte den Dirichletschen Satz vermutet und zugleich einen weitergehenden, den auch Dirichlet nennt, ohne ihn beweisen zu können. Esseien zwei solche arithmetische Reihen mit derselben Differenz, aber mit verschie-denen Anfangsglietdern gegeben, nämlich z. B. die oben genannte und $77, 177, 277, 377, \ldots$ $\pi_1(x)$ sei die Anzahl der Primzahlen der ersten Progression bisa, wird also nach dem Dirichletschen Satz mit a unendlich ; $\pi_2(x)$ sei das entsprechende für die zweite. Dann vermuten Legendre und Dirichlet, dass

$$\pi_1(x) \sim \pi_2(x)$$

sei.

Ich kehre nun zunächst zum allgemeinen Primzahlproblem zurück. Ein englischer Gelehrter, Hargreave, hat zuerst eine heuristische Plausibelmachung des Primzahlsatzes publiziert, die er selbst nicht etwa als Beweis angesehen wissen wollte. Der berühmte russische Mathematiker Tschebyschef hat bald danach be-wiesen, dass der Quotient

$$\pi(x) : \frac{x}{\log\ x}$$

von einem gewissen x an grösser ist als eine positive Konstante und kleiner als eine gewisse endliche Konstante. Man vermutete also, dass er den Limes 1 hat, und Tschebyschef hat bewiesen, dass sein $\limsup_{x=\infty}$ endlich, ausserdem, dass er ≥ 1 ist, und er hat bewiesen, dass der $\liminf_{x=\infty} > 0$, und ausserdem, dass er ≤ 1 ist. Bei = Tschebyschefs Untersuchungen spielen neben $\pi(x)$ noch zwei andere Funktionen $\vartheta(x)$ und $\psi(x)$ eine Rolle, die folgendermassen erklärt sind: $\vartheta(x)$ ist die Summe

$$\vartheta(x) = \sum_{p \leq x} \log\ p$$

der natürlichen Logarithmen aller Primzahlen bis x ; $\psi(x)$ ist die Summe

$$\psi(x) = \sum_{p^m \leq x} \log\ p,$$

erstreckt über alle Primzahlpotenzen bis x, wo also für jede 1te, 2te,... Primzahl-potenz der Logarithmus ihrer Basis in die Summe aufgenommen wird. Für die 9 Quotienten $\frac{\vartheta(x)}{x}$ und $\frac{\psi(x)}{x}$ bewies Tschebyschef genau dasselbe, was ich oben überden Quotienten $\pi(x) : \frac{x}{\log\ x}$ gesagt habe; er bewies es sogar zuerst für diese handlicheren Ausdrücke; daraus folgt aber jenes ohne Schwierigkeit. Überhaupt ist der damals vermutete Primzahlsatz ein unmittelbares Korollar jeder der beiden Vermutungen

$$\vartheta(x) \sim x$$

und

$$\psi(x) \sim x,$$

wie man leicht einsehen kann, und wie übrigens in einer Abhandlung Ihres be-rühmten Landsmanns Sylvester vom Jahre 1891 besonders hervorgehoben worden ist. Sie können aus dieser Andeutung entnehmen, dass auch im Jahre 1891 das Problem noch nicht gelöst war; und doch bin ich in meiner historischen Auseinan-dersetzung erst bei Tschebyschef, d. h. in der Mitte des 19ten Jahrhunderts.

Ich gehe jetzt zu meinem grossen Landsmann und Göttinger Vorgänger Riemann über, dem wir im Primzahlgebiete eine kurze, keines der darin ent-haltenen Hauptprobleme lösende und doch bahnbrechende Arbeit aus dem Jahre 1859 verdanken. Wir würden alle nichts im Primzahlgebiete erreicht haben, wenn uns Riemann nicht den Weg gewiesen hätte. Übrigens stellte sich Riemann einanderes Ziel als den Beweis jener asymptotischen Relation, die ich Primzahlsatz nannte. Es handelt sich bei ihm um einen gewissen expliziten Ausdruck für eine mit $\pi(x)$ eng verwandte Funktion; nämlich eine unendliche Reihe von Integralen, bei der in jedem Glied eine nicht reelle Nullstelle einer von Riemann neu in die Analysis eingeführten Funktion vorkommt, der sog. Zetafunktion. Weder bewies Riemann, dass diese Nullstellen existieren; noch ihre Existenz vorausgesetzt dass

seine unendliche Reihe konvergiert; noch die Richtigkeit seiner Formel voraus-gesetzt dass daraus der Primzahlsatz folgt; ein anderes Problem, welches in seiner Arbeit gestellt ist, ist bis heute ungelöst. Und doch hat Riemann den späteren Forschern durch die Einführung der Zetafunktion und durch das, was er in seiner Abhandlung bewiesen und nicht bewiesen hat, das Werkzeug in die Hand gegeben, mit dem später der Primzahlsatz und vieles andere dem mathematischen Wissen hinzuerobert wurde. Daher ist es sehr wichtig, etwas genauer bei der Riemannschen Abhandlung zu verweilen. Riemann betrachtet die unendliche Reihe

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s},$$

wo s eine komplexe Variable ist, deren Abszisse ich stets o, deren Ordinate ich stets t nennen werde: $s = \sigma + ti$. Es bedeutet x^s dabei $e^{s \log\, s}$, wo der reelle Wert des Logarithmus gemeint ist. Es ist leicht zu zeigen, dass die unendliche Reihe in der Halbebene $\sigma > 1$ konvergiert, sogar absolut konvergiert und dort eine reguläre analytische Funktion von 8 darstellt. Das ist uns heute nach dem Weierstrassschen Doppelreihensatz trivial; Riemann begründete es direkt. Es entsteht nun die Frage, ob $\zeta(x)$ über die Gerade $\sigma = 1$ fortgesetzt werden kann. Riemann bewies, dass die Funktion $\zeta(s)$ in der ganzen Ebene bis auf den Punkt $s = 1$ regulär ist, und dass $s = 1$ Pol erster Ordnung mit dem Residuum 1 ist. $\zeta(s) - \dfrac{1}{s-1}$ ist also eine ganze transzendente Funktion. Riemann bewies ferner die Funktionalgleichung

$$\zeta(1-s) = \frac{2}{(2\pi)^s} \cos\frac{s\pi}{2} \Gamma(s)\zeta(s).$$

welche uns lehrt, dass wir die Funktion in der ganzen Ebene beherrschen, wenn wir sie in der Halbebene $\sigma \geq \frac{1}{2}$ gut genug studiert haben. Für $\sigma > 1$ besteht die leicht beweisbare Identität

$$\zeta(s) = \prod_{p} \frac{1}{1 - \dfrac{1}{p^s}}$$

wo p alle Primzahlen in beliebiger Reihenfolge durchläuft. Sie sagt nichts anderes aus als die Tatsache der eindeutigen Zerlegbarkeit der zusammengesetzten Zahlen in Primfaktoren; wenn nämlich der auf p bezügliche Faktor in die (sogar für $\sigma > 0$ konvergente) geometrische Reihe

$$\frac{1}{1 - \dfrac{1}{p^s}} = 1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \frac{1}{p^{3s}} + \dots$$

entwickelt wird und alle diese Reihen multipliziert werden, so kommt für $\sigma > 1$ (wie formal klar und auch leicht zu rechtfertigen ist) genau die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

heraus, da ja jedes a eindeutig $2^a 3^b 5^c \dots$ ist, wo alle Exponenten ganze Zahlen ≥ 0 sind. Diese Produktdarstellung, welche natürlich für Riemann die Veranlassung war, $\zeta(s)$ als Hilfsmittel in

die Primzahltheorie einzuführen, lehrt, dass $\zeta(s)$ rechts. von $\sigma = 1$ keine Nullstelle besitzt. Die Funktionalgleichung transformiert diese Halbebene in sigma ¡ 0 und Riemann konnte leicht aus ihr ablesen, dass $\zeta(s)$ zwar in den Punkten $-2, -4, -6, \ldots, -2q, \ldots$ je eine Nullstelle erster Ordnung besitzt (ich will diese die trivialen Nullstellen nennen), dass aber sonst in der Halbebene $\sigma < 0$ keine Nullstelle gelegen ist. Jede sonst noch etwa vorhandene Nullstelle gehört. daher dem Streifen $0 \leq \sigma \leq 1$ an. Dass auf der reellen Strecke 0 bis 1 keine Wurzel liegt, ist leicht einzusehen. Auf Grund der Tatsache, dass die Funktion für reelle s reell ist, in Verbindung mit der Riemannschen Funktionalgleichung ist ersichtlich, dass alle etwa im Streifen vorhandenen Nullstellen symmetrisch zur reellen Achse und symmetrisch zur Geraden $\sigma = \frac{1}{2}$ liegen. Riemann sprach nun, ohne irgend eine derselben beweisen zu können, folgende 6 Vermutungen aus; sie sind nicht un-abhängig, und ich wähle diese Formulierung, weil die nachfolgenden historischen Erörterungen dann verständlicher sind.

(I) Es gibt unendlich viele Nullstellen von $\zeta(s)$ im Streifen $0 \leq \sigma \leq 1$.

(II) Wenn für $T > 0$ unter $N(T)$ die Anzahl der Nullstellen des Rechtecks

$$0 \leq \sigma \leq 1, \qquad 0 \leq t \leq T$$

verstanden wird, die natürlich endlich ist und nach (I) mit 7 unendlich wird, so ist

$$N(T) = \frac{1}{2\pi} T \log\ T - \frac{1 + \log(2\pi)}{2\pi} T + \mathrm{O}(\log\ T)$$

unter $\mathrm{O}(g(t))$ verstehe ich immer eine Funktion, deren Quotient durch $g(t)$ für alle hinreichend grossen 7 absolut genommen unterhalb einer endlichen Schranke liegt.

(III) [was übrigens aus II reichlich folgt] Wenn palle nicht trivialen Wurzeln von (8) durchläuft, so ist

$$\sum_{\rho} \frac{1}{|\rho|^2}$$

konvergent.

Hieraus folgt in heutiger Bezeichnungsweise, dass die Weierstrasssche Produktdar-stellung der ganzen Funktion $(s-1)\zeta(s)$ die Gestalt

$$(s-1)\zeta(s) = e^{K(s)} \prod_{w} \left(1 - \frac{s}{w}\right) e^{\frac{s}{w}}$$

hat, wo w alle Wurzeln von $\zeta(s)$ durchläuft und $K(s)$ eine ganze transzendente Funktion ist.

Riemann vermutete weiter:

(IV) $K(s)$ ist eine lineare Funktion von s; in heutiger Bezeichnungsweise: die ganze Funktion hat endliches Geschlecht und zwar das Geschlecht 1.

(V) Die Wurzeln von $\zeta(s)$ im Streifen $0 \leq \sigma \leq 1$ haben alle den reellen Teil $\frac{1}{2}$.

(VI) Es besteht eine gewisse Identität für (2), die ich oben schon erwähnt habe, aber hier nicht aufschreiben will, zumal sie nur das Ende eines Seitenweges darstellt und für die anderen Fortschritte der Primzahl-theorie nicht von Bedeutung ist.

Die Riemannschen Anregungen lagen 34 Jahre brach. Erst im Jahre 1893 gelang es Herrn Hadamard, nachdem er zu diesem Zwecke uns als Abschluss früherer Ansätze von Poincaré und Laguerre die Theorie der ganzen Funktionen endlichen Geschlechtes geschenkt hatte, die Riemannschen Vermutungen (I), (III) und (IV) zu beweisen, also die Existenz jener geheimnisvollen Nullstellen, die Konvergenz der Summe der absoluten Werte ihrer reziproken Quadrate, und dass die Funktion $(s-1)\zeta(s)$ das Geschlecht 1 hat. Herr Hadamard betont besonders, dass er die Riemannsche Vermutung (II) nicht beweisen konnte, nicht einmal die Existenz des Limes

$$\lim_{T=\infty} \frac{N(T)}{T \log\ T}.$$

Des weiteren hat sich Herr von Mangoldt zwei grosse Verdienste um die Primzahltheorie erworben. Erstens bewies er im Jahre 1895, von den Hadamard-schen Resultaten ausgehend, durch Hinzufügung einer langen Reihe weiterer Schlüsse die Riemannsche Primzahlformel (VI), und zweitens bewies Herr von Man-goldt im Jahre 1905 die Riemannsche Vermutung (II) über $N(T)$. Für beide von Mangoldtschen Resultate habe ich übrigens später viel kürzere Beweise angegeben.

Von den 6 Riemannschen Vermutungen blieb also allein (V) offen; und diese Frage, ob wirklich die nicht trivialen Nullstellen $\beta + \gamma i$ von $\zeta(s)$ alle den reellen Teil $\frac{1}{2}$ haben, ist bis heute ungelöst. Bewiesen wurde nur 1896 durch die Herren Hadamard und de la Vallée Poussin, dass beta ¡ 1 also wegen der Funktionalgleichung $0 < \beta < 1$ ist, und 1899 durch Herrn de la Vallée Poussin, dass bei passender Wahl einer absoluten positiven Konstanten c stets

$$\beta < 1 - \frac{1}{c \log |\gamma|}.$$

ist, also

$$\frac{1}{c \log |\gamma|} < \beta < 1 - \frac{1}{c \log |\gamma|}$$

ist. Von dem Streifen $0 \leq \sigma \leq 1$ ist also auf beiden Seiten ein bestimmtes Flächen-stück, das oben und unten immer dünner wird, aber doch unendlichen Flächeninhalt hat, herausgeschnitten, so dass dort $\zeta(s) \neq 0$ ist. Für die ersten Nullstellen hat allerdings Herr de la Vallée Poussin 1899 bewiesen, dass sie auf der Geraden $\sigma = \frac{1}{2}$ liegen. In besonders geschickter Weise hat kürzlich, 1912, Herr Backlund diesen Beweis für die ersten 58 Nullstellen, nämlich alle zwischen den Ordinaten -100 und 100 gelegenen, geführt; diese Wurzeln ergeben sich ausserdem als einfache Wurzeln. Mehr weiss man nicht über die Nullstellen der Zetafunktion.

Nun zurück zur Primzahltheorie! Auf die Hadamardschen Resultate gestützt haben unabhängig und gleichzeitig im Jahre 1896 Herr Hadamard und Herr de la Vallée Poussin den Primzahlsatz bewiesen, auf ganz verschiedenen Wegen abgesehen von der gemeinsamen Grundlage. Einen dritten, auch hierauf basierenden Beweis gab Herr von Koch 1901. Ich habe später, im Jahre 1903, einen vierten Beweis angegeben, welcher nicht nur viel kürzer ist, sondern von jener heute klassischgewordenen Hadamardschen Theorie der ganzen Funktionen keinen Gebrauch macht. Dieser letztere Umstand

war von grösster Bedeutung für die Theorie der Primideale eines algebraischen Zahlkörpers, welche die Primzahltheorie als Spezialfall enthält. Hier weiss man von der zugehörigen verallgemeinerten Zetafunktion bis heute nicht, ob sie in der ganzen Ebene existiert, und meine Methode war daher die erste und bis heute einzige, welche zum Beweise des sogenannten Primideal-satzes führt, den ich 1903 entdeckt habe, mit dem Wortlaut: In jedem algebraischen Körper gibt es asymptotisch gleich viele Primideale, deren Norma ist, indem eben diese Anzahl für jeden Körper $\sim \frac{x}{\log\ x}$ ist; doch will ich in diesem Vortrag nur von Primzahlen reden und nicht weiter auf Körper und Ideale abschweifen. Ich erwähnte vorhin Herrn de la Vallée Poussin als einen der beiden Forscher, denen unabhängig die Lösung des klassischen Gauss-Legendre-Dirichletschen Problems geglückt ist; der Primzahlsatz lässt sich auch

$$\pi(x) \sim \mathrm{Li}(x)$$

(sprich: Integrallogarithmus von x) schreiben, indem bekanntlich

$$\frac{x}{\log\ x} \sim \int_2^x \frac{du}{\log\ u}$$

und dies Integral plus einer additiven Konstanten Li (x) ist. Das folgende Resultat, welches den Primzahlsatz enthält, hat Herr de la Vallée Poussin allein entdeckt, nämlich den Satz

$$\pi(x) = \mathrm{Li}(x) + \mathrm{O}(\frac{x}{\log^q\ x}$$

wo q eine beliebig grosse Konstante ist. Er bewies sogar

$$\pi(x) = \mathrm{Li}(x) + \mathrm{O}(xe^{-\alpha\sqrt{\log\ x}}),$$

wo α eine bestimmte positive Konstante ist.

Nun kehre ich zur arithmetischen Reihe zurück. Die Herren Hadamard und de la Vallée Poussin bewiesen 1896 unabhängig für die Anzahl $\pi_1(x)$ der Primzahlen in der Progression $ky + l$

$$\pi_1(x) \sim \frac{1}{\phi(k)} \frac{x}{\log\ x}$$

woraus durch Division die Richtigkeit der Legendre-Dirichletschen Vermutung folgt, dass die Anzahlen für zwei Progressionen mit der Differenz k asymptotisch gleich sind. Herr de la Vallée Poussin konnte, ohne es besonders anzuführen, sogar

$$\pi_1(x) = \frac{1}{\phi(k)}\mathrm{Li}(x) + \mathrm{O}(xe^{-\alpha \log\ x})$$

beweisen, wo a eine nur von k und l abhängige oder, was auf dasselbe hinauskommt, nur von k abhängige Konstante bezeichnet; ich bewies dies später kürzer und sogar mit absolut konstantem α.

Nun sei noch von einem anderen analogen Problem die Rede, das ich bisher nicht gestreift habe. Es sei eine quadratische Form $au^2+buv+cv^2$ gegeben und dabei a, b, c teilerfremd, ferner $a > 0$ im Falle $b^2-4ac < 0$. Es sind dabei u, v ganzzahlige Variable. Dirichlet hat einen Beweis dafür skizziert, dass

die qua-dratische Form unendlich viele Primzahlen darstellt, ohne den Hauptpunkt, das Nichtverschwinden gewisser Reihen, genauer auszuführen. Das tat erst Herr Weber 1882; aus einem 1909 herausgegebenen Manuskripte E. Scherings ist ersichtlich, dass auch dieser einen vollständigen Beweis besessen hat. Herr de la Vallée Poussin bewies nun 1897 durch eine lange und scharfsinnige Schlusskette sogar das Analogon zum Primzahlsatz, und meine allgemeinen Untersuchungen über Primideale in sogenannten Idealklassen lieferten 1907 durch passende Spezialisierung den de la Vallée Poussinschen Satz und sogar einen schärferen, nämlich als Anzahl der durch die Form darstellbaren Primzahlen $\leq x$

$$\frac{1}{h}\mathrm{Li}(x) + \mathrm{O}(xe^{-sqrt[\gamma]\log\ x})$$

wo γ eine positive Konstante ist und h die Klassenzahl oder (für sog. zweiseitige Klassen) ihr Doppeltes bezeichnet.

Nun habe ich bisher in diesem Vortrag abwechselnd von zwei ganz getrennten Forschungsobjekten gesprochen, einerseits von den Primzahlen, andererseits von der Riemannschen Zetafunktion; allgemeiner ausgedrückt einerseits von gewissen zahlentheoretischen Funktionen, andererseits von gewissen analytischen Funktionen. Welches ist die Brücke? Wieso hat speziell das Studium der Zetafunktion zum Beweise des Primzahlsatzes geführt?

Es sei a_n eine beliebige zahlentheoretische Funktion; dann kann ich formal ohne Rücksicht auf Konvergenz die unendliche Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$$

aufschreiben. Es besteht nun ein gewisser Zusammenhang zwischen den Eigen-schaften dieser Reihe als analytischer Funktion von s und dem Verhalten der Summe

$$\sum_{n=1}^{[x]} a_n$$

für grosse x ; $[x]$ bezeichnet die grösste ganze Zahl $\leq x$. Ehe ich diesen Zusammenhang andeute, will ich an einem Beispiel zeigen, welche Zahlenmenge a_n für das Primzahlproblem ausschlaggebend ist. Ich sagte schon, dass alles auf das Studium der Funktion $\psi(x)$, d. h. der Funktion

$$\psi(x) - [x] = \sum_{p^m \leq x} \log\ p - \sum_{n=1}^{[x]} 1,$$

ankommt; da habe ich also zu setzen:

$$a_n = \begin{cases} \log\ p - 1 & \text{für} \quad n = p^m \quad (m \geq 1), \\ -1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die zugehörige Funktion ist nun aber, wie leicht aus der Produktdarstellung von $\zeta(s)$ folgt, für $\sigma > 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} = \sum_{p,m} \frac{\log\ p}{p^{ms}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \zeta(s).$$

Nun denken wir uns a wieder allgemein. Über das Konvergenzgebiet einer solchen sog. Dirichletschen Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$$

hat Herr Jensen im Jahre 1884 den fundamentalen Satz entdeckt, dass es eine Halbebene

$$\sigma > \gamma$$

ist, ganz analog, wie das Konvergenzgebiet einer Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$$

ein Kreis ist; nämlich Konvergenz rechts von $\sigma = \gamma$, Divergenz links von =y, wobei zwei extreme Fälle möglich sind: Konvergenz überall, d. h. $\gamma = -\infty$, und Konvergenz nirgends, d. h. $\gamma = +\infty$. Potenzreihen und Dirichletsche Reihen sind beides Spezialfälle einer allgemeineren Reihenkategorie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$$

wo

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots, \quad \lim_{n=\infty} \lambda_n = \infty$$

ist, und bei der Herr Jensen die Existenz einer Konvergenzhalbebene gleichfalls bewies; nämlich die Dirichletsche Reihe der Spezialfall $\lambda_n = \log\ n$, die Potenzreihe der Spezialfall $\lambda_n = n, e^{-s} = x$ als Variable angesehen; ich will aber hier nicht von diesem allgemeinen Typus λ_n sprechen. In der Konvergenzhalbebene stellt, wie Herr Cahen 1894 als leichte Anwendung der Sätze über gleichmässige Konvergenz zeigen konnte, die Dirichletsche Reihe eine reguläre analytische Funktion dar; Herr Cahen konstatierte auch, analog zur bekannten Cauchyschen Darstellung des Konvergenzradius einer Potenzreihe, dass hier im Falle $\gamma \geq 0$ die sog. Konvergenz-abszisse γ die untere Grenze aller c ist, für welche die Relation

$$\sum_{n=1}^{[x]} a_n = \mathrm{O}(x^c)$$

richtig ist. Die Konvergenzabszisse der Dirichletschen Reihe gibt uns also Aufschluss über das Anwachsen der summatorischen Funktion

$$\sum_{n=1}^{[x]} a_n$$

in Bezug auf Potenzen von x als Vergleich. Zum Beweise des Primzahlsatzes mussten allerdings feinere Vergleichsskalen hinzugenommen werden. Denn die blosse Tatsache, dass die Dirichletsche Reihe für

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \zeta(s)$$

ihre Konvergenzabszisse 1 hat (und mehr weiss man bis heute nicht über diese Zahl!) besagt nur, dass aber $\psi(x) - x = \mathrm{O}(x^c)$ für jedes $c > 1$ ist, was trivial ist; man will aber

$$\lim_{x=\infty} \frac{\psi(x) - x}{x} = 0$$

beweisen.

Da ich einmal von der Analogie der Dirichletschen Reihen mit den Potenzreihen gesprochen habe, so möchte ich nicht unterlassen, auch zweier Unterschiede Erwähnung zu tun.

Erstens: Aus der Konvergenz einer Potenzreihe in einem Punkte folgt be-kanntlich ihre absolute Konvergenz in jedem Punkte, welcher näher am Mittelpunkt liegt. Die Potenzreihe konvergiert also absolut im Innern ihres Konvergenzkreises. Bei Dirichletschen Reihen ist dies nicht der Fall; sondern es folgen allgemein gesprochen-von links nach rechts drei Gebiete auf einander: Eine Halbebene der Divergenz, ein Streifen bedingter Konvergenz, dessen Dicke übrigens höchstens 1 ist, und eine Halbebene absoluter Konvergenz. Beispiel:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^s} = \frac{1}{1^s} - \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} - \frac{1}{4^s} + \dots$$

divergiert für $\sigma < 0$ konvergiert bedingt für $0 < \sigma < 1$ absolut für $\sigma > 1$. Übrigens ist diese Funktion $= (1 - 2^{1-s})\zeta(s)$.

Zweiter Unterschied: Auf dem Konvergenzkreis einer Potenzreihe muss min-destens eine singuläre Stelle der Funktion liegen. Bei Dirichletschen Reihen braucht dies nicht einmal in beliebiger Nähe der Konvergenzgeraden der Fall zu sein. Das soeben genannte Beispiel stellt sogar eine ganze Funktion dar.

Um nun von meinem Beweise des Primzahlsatzes einen skizzenhaften Begriff zu geben, so will ich nur folgendes sagen: Wenn eine Dirichletsche Reihe

$$\sum_{n=1}^{[x]} \frac{a_n}{n^s} = f(s)$$

für $\sigma > 1$ absolut konvergiert, so ist es ganz leicht, für $x \geq 1$ bei jedem $b > 1$ und Integration über die unendliche Gerade ob die Identität

$$\sum_{n=1}^{[x]} a_n \log \frac{x}{n} = \frac{1}{2\pi\, i} \int_{b-\infty\, i}^{b+\infty\, i} \frac{x^s}{s^2} f(s) ds$$

nachzuweisen, welche einen genauen Ausdruck für eine mit der zu untersuchenden Funktion

$$\sum_{n=1}^{[x]} a_n = A(x)$$

eng zusammenhängende summatorische Funktion liefert. Die linke Seite jener Identität ist nämlich $\int_1^x \frac{A(u)}{u} du$. Unter dem Integral rechts kommt z als Parameter vor; wenn es gelingt, den Integrationsweg auf Grund des Cauchyschen Satzes durch einen links von der Geraden $\sigma = 1$ verlaufenden Integrationsweg zu ersetzen, so ist der Integrand in jedem festen Punkt des neuen Weges $\mathrm{o}(x)$, d. h. so beschaffen, dass der Quotient durch x für $x = \infty$ gegen Null strebt; unter Umständen, die eben beim Primzahlproblem und Primidealproblem glücklicher-weise eintreten, kann man aber zeigen, dass das ganze Integral $\mathrm{o}(x)$ ist; so erhalte ich z. B., wenn ich den Ansatz auf die oben genannte Funktion

$$f(s) = -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \zeta(s)$$

anwende, auf Grund gewisser Hilfssätze von mir über die Zetafunktion

$$\int_1^x \frac{A(u)}{u} du = \mathrm{o}(x)$$

woraus man leicht durch elementare Schlüsse zu

$$A(x) = \mathrm{o}(x)$$

d. h. hier

$$\psi(x) - [x] = \mathrm{o}(x),$$

$$\psi(x) \sim x$$

übergehen kann und somit den Primzahlsatz erhält. Man kann übrigens allgemein mit f(s) in Verbindung bringen, durch die für nicht auch $A(x)$ statt $\int_1^x \frac{A(u)}{u} du$ mit $f(s)$ in Verbindung bringen, durch die für nicht ganze $x > 1$ giltige Identität

$$A(x) = \frac{1}{2\pi\, i} \int_{b-\infty\, i}^{b+\infty\, i} \frac{x^s}{s} f(s) ds.$$

Wegen der nur bedingten Konvergenz des Integrals ist es schwieriger, diese Identität den asymptotischen Schlüssen zu Grunde zu legen. Aber in diesem Jahre 1912 ist es mir gelungen, auch auf diesem Weg zum Ziel zu gelangen.

Ich kehre zurück zu der vorher angedeuteten Beziehung zwischen der Grössen-ordnung der Summe und der Konvergenz der zugehörigen Dirichletschen Reihe. Ich erinnere nochmals daran, dass das Konvergenzgebiet der Reihe, welches für das Studium der Summe ausschlaggebend ist, nicht durch die obere Grenze der Abszissen der singulären Punkte bestimmt ist, wenn es auch natürlich nicht weiter reichen kann. Es fragt sich also, welche Bedingungen zur Regularität hinzukommen müssen, damit man mit Sicherheit schliessen kann eine Dirichletsche Reihe, deren Konvergenz sagen wir für $\sigma > 1$ bekannt ist, konvergiert sogar sagen wir für $\sigma > \tau$, wo τ eine bestimmte Zahl < 1 ist.

In dieser Richtung habe ich die erste Entdeckung gemacht. Es war schon bekannt, dass, wenn o, grösser ist als die Konvergenzabszisse einer Dirichletschen Reihe $f(s)$, in der Halbebene $\sigma > \sigma_0$ bei positiv oder negativ ins Unendliche rücken-dem t gleichmässig

$$f(\sigma + ti) = \mathrm{O}(|t|)$$

ist. Ich habe nun den Satz bewiesen: "Es sei $a_n = \mathrm{O}(n^\epsilon)$ für jedes $\epsilon > 0$, also die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} = f(s)$$

für $\sigma > 1$ absolut konvergent. Die analytische Funktion, welche durch $f(s)$ definiert ist, sei für $\sigma \geq \eta$ regulär, wo η eine bestimmte Zahl des Intervalls $0 < \eta < 1$ ist, und in der Halbebene $\sigma \geq \eta$ sei gleichmässig

$$f(s) = \mathrm{O}(|t|^s),$$

wo a eine Konstante ist. Dann ist die Dirichletsche Reihe über $\sigma = 1$ hinaus konvergent". Herr Schnee ging dann weiter und bewies: Wenn $0 \leq a < 1$ ist, so ist die Reihe sicher für $\sigma > \dfrac{\eta + a}{1 + a}$ konvergent; übrigens habe ich hier später die Ein-schränkung $a < 1$ ohne Modifikation der Behauptung fortgebracht. Der Schneesche Satz enthält speziell: Falls für $\sigma \geq \eta$:

$$f(s) = \mathrm{O}(|t|^a)$$

bei jedem noch so kleinen positiven a richtig ist, so ist die Reihe für $\sigma > \eta$ konvergent. Wendet man die Schneesche Beweismethode auf die (in $s = 1$ einen Pol besitzende) Funktion

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$$

an, so erhält man auf Grund gewisser Eigenschaften der Zetafunktion einen Beweis des Satzes, den zuerst Herr von Koch 1901 auf anderem Wege bewiesen hatte: Unter der Annahme der Richtigkeit der Riemannschen Vermutung (V) ist

$$psi(x) = x + \mathrm{O}(x^{1/2+\epsilon})$$

mit jedem $\epsilon > 0$ und

$$\pi(x) = \mathrm{Li}(x) + \mathrm{O}(x^{\frac{1}{2}+\epsilon})$$

mit jedem $\epsilon > 0$. Mutatis mutandis, falls die obere Grenze der reellen Teile der Nullstellen von $\zeta(s)$ zwischen $\frac{1}{2}$ exkl. und 1 exkl. liegen sollte. Übrigens wäre, wie Herr von Koch damals zuerst und ich später mit meinen Methoden kürzer bewies, das x^ϵ in den beiden letzten Formeln auch durch $\log^2 x$ bezw. $\log\ x$ ersetzbar.

Ich benutze diese Gelegenheit, um über eine andere spezielle Dirichletsche Reihe ein paar Worte zu sagen: Für $\sigma > 1$ ist

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s},$$

wo $\mu(n)$ die sog. Möbiussche Funktion bezeichnet:

$\mu(1) = 1$

$\mu(n) = 0$ für Zahlen, die mindestens eine Primzahl öfter als einmal enthalten;

$\mu(n) = (-1)^\rho$ für quadratfreie Zahlen > 1, die aus genau p verschiedenen Primfaktoren bestehen.

Stieltjes sprach 1885 die Behauptung

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(n) = \mathrm{O}(\sqrt{x})$$

aus, ohne seinen vermeintlichen Beweis mitzuteilen. Ob Stieltjes' Behauptung richtig ist, weiss ich nicht. Mit ihr wäre auch die Riemannsche Vermutung bewiesen, indem aus Stieltjes' Behauptung a fortiori die Konvergenz von

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}$$

für $\sigma > \frac{1}{2}$, also die Riemannsche Behauptung und noch mehr-z. B. dass alle Nullstellen von (8) einfache seien-folgen würde. Ich habe aus meinem oben genannten Satz über Dirichletsche Reihen, dessen Voraussetzungen bei 1 $\frac{1}{\zeta(s)}$ verifiziert werden können, folgern können, dass umgekehrt aus der Richtigkeit der Riemannschen Ver-mutung die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}$$

über $s = 1$ hinaus folgen würde. Aber es blieb einem jüngeren englischen Forscher aus dieser Stadt Cambridge, Herrn Littlewood, vorbehalten, in diesem Jahre 1912 zu beweisen, dass diese Reihe dann sogar für $\sigma > \frac{1}{2}$ konvergieren würde. Es gelang ihm nämlich durch scharfsinnige Schlüsse, für jedes $\delta > 0$ und jedes $\epsilon > 0$ zu beweisen, dass unter der Annahme der Richtigkeit der Riemannschen Vermutung für $\sigma \geq \frac{1}{2} + \delta$:

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \mathrm{O}(|t|^{\epsilon})$$

wäre; daraus folgt nach dem Satz von Schnee ohne weiteres die Behauptung.

Nun will ich wieder von der Riemannschen Vermutung absehen und mich auf den festen Boden der mathematischen Wahrheiten zurückbegeben. Was weiss man über die μ-Reihe? Euler vermutete 1748, ohne es beweisen zu können, und Herr von Mangoldt bewies 1897, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n}$$

konvergiert; Möbius vermutete 1832, ohne es beweisen zu können, und ich bewies 1899, dass sogar

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n) \log\ n}{n}$$

konvergiert. Ich bewies 1903, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}$$

auf der ganzen Geraden $\sigma = 1$ konvergiert und natürlich $\dfrac{1}{\zeta(s)}$ darstellt, ja sogar, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n) \log^q n}{n^s}$$

für jedes noch so grosse feste q auf der Geraden sigma = 1 konvergiert; viel mehr weiss man über diese Frage nicht. Ich habe aber 1905 die Konvergenz der soeben ge-nannten Reihe auch mit der Modifikation bewiesen, dass n nicht alle ganzen Zahlen, sondern nur die einer arithmetischen Progression durchläuft. Desgleichen, wenn statt $\mu(n)$ die Liouvillesche Funktion $\lambda(n)$ steht, die stets $+1$ oder -1 ist, je nachdem die Anzahl der Primfaktoren von n, mehrfache mehrfach gezählt, gerade oder ungerade ist. Hieraus ergab sich das Korollar: In jeder arithmetischen Progression gibt es asymptotisch ebensoviele Zahlen, die aus einer geraden, als solche, die aus einer ungeraden Anzahl von Primfaktoren zusammenge-setzt sind.

Übrigens ist es nicht ohne Interesse zu untersuchen, ob die genannten aus denselben transzendenten Quellen geschöpften Sätze über $\pi(x)$ und $\mu(n)$ aus einander direkt durch elementare Schlüsse hergeleitet werden können. Erst 1911 gelang es mir zu beweisen, dass der Primzahlsatz und der von Mangoldtsche Satz

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} = 0$$

in diesem Sinne äquivalent sind; die eine Hälfte hiervon hatte ich schon 1899 in meiner Dissertation bewiesen.

Über Primzahlen möchte ich nur noch weniges sagen, um mich dann etwas in die Theorie der Zetafunktion zu vertiefen, deren Studium auch ohne Rücksicht auf vorläufige Anwendbarkeit in einer Reihe hervorragender Arbeiten der neueren Zeit, insbesondere meines Freundes Bohr in Kopenhagen, zum Selbstzweck geworden ist.

Die Primzahlen will ich verlassen, nachdem ich einige Fragen genannt haben werde, welche ich für unangreifbar beim gegenwärtigen Stande der Wissenschaft halte. Ich wähle Fragen mit präzisem Wortlaut, nicht so verschwommene wie: "Das Gesetz der Primzahlen zu finden" oder "$\pi(x)$ für grosse a möglichst gut abzuschätzen." Ich nenne vier Fragen und wähle in ihnen spezielle Konstanten, um den Kern deutlicher hervortreten zu lassen.

(1) Stellt die Funktion $u^2 + 1$ für ganzzahliges u unendlich viele Primzahlen dar?

(2) Hat die Gleichung $m = p + p'$ für jedes gerade $m > 2$ eine Lösung in Primzahlen?

(3) Hat die Gleichung $2 = p - p'$ unendlich viele Lösungen in Primzahlen?

(4) Liegt zwischen n^2 und $(n + 1)^2$ für alle positiven ganzen a mindestens eine Primzahl?

Nun zur Zetafunktion zurück: Für jedes feste σ verstehe ich unter $\nu(\sigma)$ die untere Grenze der Konstanten c, für welche bei unendlich wachsendem t

$$\zeta(\sigma + ti) = \mathrm{O}(t^c)$$

ist. Leicht beweisbar ist, dass dies v endlich ist, und dass

$$\nu(\sigma) = 0 \quad \text{für} \sigma \geq 1$$

ist; auch folgt aus der Riemannschen Funktionalgleichung und einer Stieltjesschen Abschätzung der Gammafunktion leicht

$$\nu(1 - \sigma) = \nu(\sigma) + \sigma - \frac{1}{2}$$

für jedes reelle σ ; für $\sigma \leq 0$ ist also

$$\nu(\sigma) = \frac{1}{2} - \sigma$$

Wie verläuft nun die Kurve $\nu = \nu(\sigma)$auf der Strecke $\leq \sigma \leq 1$? Herr Lindelöf hat auf Grund eines allgemeinen funktionentheoretischen Satzes von ihm selbst und Herrn Phragmén bewiesen, dass die Kurve stetig und konvex ist; daraus folgt ins-besondere, dass für $0 \leq \sigma \leq 1$

$$\nu(\sigma) \leq \frac{1 - \sigma}{2}$$

ist. Das Lindelöfsche Endresultat ist, dass das Kurvenstück fürs Intervall $0 \leq \sigma \leq 1$ dem Dreieck mit den Ecken $(0, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, 0), (1, 0)$ angehört. Mehr weiss ich darüber nicht. Aber Herr Littlewood hat bewiesen, dass unter der Annahme der Richtigkeit der Riemannschen Vermutung für $\frac{1}{2} \leq \sigma \leq 1$

$$\nu(\sigma) = 0$$

also für $0 \leq \sigma \frac{1}{2}$ $\qquad\qquad$ $\nu(\sigma) = \frac{1}{2} - \sigma$

wäre. Da ich wieder einmal den festen Boden verlassen habe, füge ich hinzu, dass ich 1911 aus der Richtigkeit der Riemannschen Vermutung die Folgerung ziehen konnte, dass dann die Differenz

$$N(T) - \frac{1}{2\pi} T \log\ T - \frac{1 + \log\ 2\pi}{2\pi} T,$$

die nach Herrn von Mangoldt $\mathrm{O}(\log\ T)$ ist, nicht $\mathrm{O}(1)$ sein könnte.

Und indem ich zur Wirklichkeit zurückkehre, erwähne ich noch, dass es mir zwar nicht gelungen ist, Licht über die geheimnisvollen Zetanullstellen zu verbreiten, wohl aber ein neues Rätsel durch die Entdeckung der folgenden Tatsache (1912) aufzugeben, welche auf einen geheimnisvollen unbekannten Zusammenhang der Nullstellen mit den Primzahlen deutet. Es sei $x > 0$ und ρ durchlaufe alle Nullstellen, die der oberen Halbebene angehören, nach wachsender Ordinate geordnet. Dann ist die Reihe

$$\sum_{\rho} \frac{x^{\rho}}{\rho}$$

divergent für $x = 1$,$x = p^m$, $x = frac1p^m$; konvergent für alle anderen $x > 0$ gleichmässig konvergent in jedem Intervall $x_0 < x < x_1$, welches innen und an den Enden von jenen Divergenzpunkten

frei ist ; ungleichmässig konvergent in jedem Intervall $x_0 < x < x_1$, welches innen keinen Divergenzpunkt enthält, aber an mindestens einen solchen angrenzt.

Ich komme jetzt zu einigen anderen Untersuchungen über $\zeta(s)$. Es sind bei einer analytischen Funktion die Punkte, an denen sie 0 ist, zwar sehr wichtig; ebenso interessant sind aber die Punkte, an denen sie einen bestimmten Wert a annimmt. Zu beweisen, dass $\zeta(s)$ jeden Wert a annimmt, ist ein leichtes. Wo liegen aber die Wurzeln von $\zeta(s) = a$? Die erste Frage ist, welche Werte $\zeta(s)$ in der Halbebene $\sigma > 1$ annimmt, aus der eine Umgebung des Poles $s = 1$, z, B durch einen Halbkreis mit dem Radius 1, herausgeschnitten ist. Herr Bohr hat 1910 die für mich wenigstens ganz unerwartete Tatsache bewiesen, dass $\zeta(s)$ in diesem Gebiet nicht beschränkt ist. D. h. die Ungleichung

$$\zeta(s) > g$$

hat bei gegebenem $g > 0$ und gegebenem $t_0 > 0$ in der Viertelebene$\sigma > 1, t > t_0$, eine Lösung. Daraus schlossen Bohr und ich 1910 in einer gemeinsamen Arbeit, einen Lindelöfschen Ansatz und die Arbeiten von Herrn Schottky und mir über gewisse Verallgemeinerungen des Picardschen Satzes uns zu Nutze machend: Wenn $\delta > 0$ beliebig gegeben ist, so nimmt $\zeta(s)$ im Streifen $1-\delta < \sigma < 1+\delta$ alle Werte mit höchstens einer Ausnahme an.

Dadurch entstand Hoffnung, die Riemannsche Vermutung zu widerlegen, indem es z. B. gelingen könnte nachzuweisen, dass $\zeta(s)$ in der Halbebene $\sigma > \frac{3}{4}$ den Wert 1 nicht annimmt; dann müsste ja $\zeta(s)$ daselbst alle übrigen Werte, insbesondere also den Wert 0 annehmen, während die Riemannsche Vermutung offenbar mit der Behauptung $\zeta(s) \neq 0$ für $\sigma > \frac{1}{2}$ identisch ist. Die Möglichkeit, auf diesem Wege das Riemannsche Problem zu lösen, verschwand aber dadurch, dass Herr Bohr 1911 die erstaunliche Tatsache nachwies, dass $\zeta(s)$ bereits im Streifen $1 - \delta < \sigma < 1 + \delta$ jeden von 0 verschiedenen Wert annimmt, sogar unendlich oft.

Nun bewies Herr Littlewood in der schon mehrfach erwähnten Arbeit aus diesem Jahre noch den Satz: Für jedes $\delta > 0$ hat in der Halbebene mindestens eine der beiden Funktionen $\zeta(s)$ und $\zeta'(s)$ eine Nullstelle. Danach wäre also die Riemannsche Vermutung widerlegt, wenn man das Nichtverschwinden von ' (3) z. B. in der Halbebene $\sigma > 9/10$ beweisen könnte. Die Untersuchung der Nullstellen in $\zeta'(s)$ ist ein schwieriges Problem, indem für $\zeta'(s)$ die schöne Produkt-darstellung fehlt, welche das Studium von $\zeta(s)$ erleichtert. Aber auch hier wusste Herr Bohr Rat, und es gelang ihm in einer am 4. Juni dieses Jahres erschienenen Arbeit zu beweisen: $\zeta'(s)$ hat sogar in der Halbebene $\sigma > 1$ eine Nullstelle, übrigens unendlich viele, so dass also der Littlewoodsche Satz zu keiner Lösung des Riemann-schen Problems führen kann. Das fand Bohr mit dem Umwege über

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -\sum_p \frac{\log\ p}{p^s - 1}\ ;$$

er stellte fest, dass diese Funktion in der Halbebene $sigma > 1$ den Wert 0 und sogar jeden Wert annimmt; übrigens sogar im festen Streifen $1 < \sigma < 1 + \delta$, und zwar unendlich oft.

Zum Schluss meines Vortrags will ich erwähnen, dass meine für die Primzahl-theorie geschaffenen Hilfsmittel sich auch kürzlich als geeignet erwiesen haben, andere Probleme aus der analytischen Zahlentheorie und über Abzählung von Gitterpunkten in gewissen mehrdimensionalen Bereichen

zu lösen, welche vordem unerledigt geblieben waren. Ich habe dies in einer kürzlich erschienenen Abhand-lung auseinandergesetzt und will hier nur einen ganz speziellen Satz daraus erwähnen. Die beiden Dirichletschen Reihen

$$f(s) = 1 - \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} - \frac{1}{7^s} + \frac{1}{9^s} - \frac{1}{11^s} + \dots$$

und

$$g(s) = 1 - \frac{1}{5^s} + \frac{1}{7^s} - \frac{1}{11^s} + \frac{1}{13^s} - \frac{1}{17^s} + \dots$$

konvergieren offenbar für $\sigma > 0$ Ihr formal gebildetes Produkt ist wieder eine Dirichletsche Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n^s}$$

dieselbe konvergiert natürlich für $\sigma > 1$ wo ja die gegebenen Reihen absolut konvergieren; nach einem leicht beweisbaren Satze von Stieltjes (1885) über Dirichletsche Reihen konvergiert das formale Produkt sogar für $\sigma > \frac{1}{2}$ Andererseits hat Herr Bohr (1910) ein Beispiel zweier Dirichletscher Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$$

und

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^s}$$

gebildet, die für $\sigma > 0$ konvergieren, während ihr formales Produkt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n^s}$$

nicht über die durch den Stieltjesschen Satz gelieferte Gerade $\sigma = \frac{1}{2}$ hinaus konvergiert. Für mein obiges Beispiel $f(s)g(s)$ kann ich aber Konvergenz für $\sigma > \frac{1}{3}$. Dies spezielle Beispiel repräsentiert natürlich zwei Reihen vom Typus beweisen.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}$$

wo $\chi(n)$ ein sogenannter Charakter nach einem Modul k ist. Diese Reihen waren durch Dirichlet beim Beweise des Satzes von der arithmetischen Progression einge-führt, und für jedes Paar solcher Reihen, wenn nur keiner der beiden Charaktere Hauptcharakter ist (sonst konvergiert bekanntlich das Produkt überhaupt nicht einmal für $s = 1$) kann ich Konvergenz für $\sigma > \frac{1}{3}$ beweisen.

Ich bitte um Entschuldigung für die Länge meines Vortrags; aber ich habe ohnehin zahlreiche unter mein Thema fallende Dinge nicht berührt. Umfasst doch allein das Litteraturverzeichnis meines 1909 erschienenen *Handbuchs der Lehre von der Verteilung der Primzahlen* mehr als 600 Abhandlungen. Und habe ich doch durch dies Handbuch erreicht, dass zahlreiche Forscher sich diesem interessanten Gebiet zuwandten, so dass seitdem viele weitere Arbeiten darüber erschienen sind. Ich würde mich freuen, wenn es mir durch diesen Vortrag gelungen sein sollte, den einen oder anderen Mitarbeiter noch hinzuzugewinnen.