Transcription en Latex de deux extraits d'un texte de Jean-Pierre Bourguignon,[1] au sujet de l'opérateur de Dirac et de ses valeurs propres

3. L'opérateur de Dirac: premières propriétés.

a) Définition de l'opérateur de Dirac

PROPOSITION-DÉFINITION 7. *Soit γ une métrique spinorielle sur une variété différentielle M. L'opérateur de Dirac $\mathcal{D}_\gamma$ est l'opérateur différentiel du premier ordre défini pour un champ de spineurs ψ en un point x de M par*

$$\mathcal{D}_\gamma\, \psi(x) = \sum_{i=1}^{n} e_i \cdot D^\gamma_{e_i}\psi(x)$$

où (e_i) désigne une base g-orthonormée de T_xM. L'opérateur $\mathcal{D}_\gamma$ a pour symbole principal $\sigma(D_\gamma) : T^*M \otimes \sum_\gamma \longrightarrow \sum_\gamma M$ la multiplication de Clifford. En dimension paire, $\mathcal{D}_\gamma$ échange les champs de spineurs positifs et négatifs.

Cette définition ne suppose bien sûr pas que la métrique g soit riemannienne, mais alors pour pouvoir définir l'opérateur globalement il faut disposer d'une structure spinorielle adaptée à la signature de la métrique. Cette définition est la transposition directe de celle que P.A.M. Dirac avait donnée pour l'espace de Minkowski. Il faut cependant prendre garde que dans la littérature (notamment physique) plusieurs conventions de signe (ou la présence d'un facteur $i = \sqrt{-1}$) existent. Cela tient en particulier à l'interférence avec une représentation particulière des spineurs. L'avantage de la présentation utilisant les algèbres de Clifford est d'éviter a priori ce genre de complications.

Quelques exemples soulignent l'intérêt de cet opérateur. Pour $(\mathbb{R}, e)$, alors $\mathrm{Cl}_1 \simeq \mathbb{C}$ et sur $\mathbb{R}$ (de coordonnée x_1) $\mathcal{D} = \sqrt{-1}\dfrac{\partial}{\partial x^1}$.

Pour $(\mathbb{R}^2, e)$, $\mathrm{Cl}_2 \simeq \mathbb{H}$ et sur $\mathbb{R}$ que l'on peut identifier à $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ à cause de la $\mathbb{Z}_2$-graduation. En coordonnées (x^1, x^2), l'opérateur de Dirac $\mathcal{D}$ peut s'écrire en introduisant $z = x^1 + ix^2$.

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{\partial}{\partial \overline{z}} & 0 \end{pmatrix}$$

d'où le fait qu'en restriction aux spineurs positifs $\mathcal{D}$ s'identifie à l'opérateur de Cauchy-Riemann.

[1] Il s'agit des sections 3 et 6 du texte L'opérateur de Dirac et la géométrie riemannienne, Rend. Sem. Mat. Univers. Politecn. Torino, Vol. 44, 3, 1986. Consultable en ligne ici : http://www.seminariomatematico.polito.it/rendiconti/cartaceo/44-3/317.pdf.

Transcription : Denise Vella-Chemla, mars 2024.

b) Extensions de la définition

La première extension naturelle consiste à remplacer la connexion spinorielle de Levi-Civita D^γ par une connexion spinorielle générale ∇ en posant pour un champ de spineurs ψ, ${}^\nabla D_\gamma = \sum_{i=1}^{n} e_i \cdot \gamma \nabla_{e_i}\psi$. Pour chaque connexion ∇, il est nécessaire de vérifier si les propriétés de l'opérateur de Dirac restent valables : cela dépend bien sûr des propriétés algébriques de $\alpha = D^\gamma - \nabla$.

La définition de l'opérateur de Dirac s'étend naturellement à tout module sur l'algèbre de Clifford, mais certains modules obtenus en prenant un fibré de coefficients jouent un rôle très important car ils permettent de retrouver la plupart des opérateurs classiques de la géométrie différentielle. Pour cela, un fibré $\pi : E \longrightarrow M$ muni d'une connexion ∇ étant donné, on introduit *l'opérateur de Dirac tordu* $\mathcal{D}_\gamma^\nabla$ agissant sur les sections de $\sum_\gamma M \otimes E$ de la façon suivante : si $\psi \otimes \epsilon$ est une section de $\sum_\gamma M \otimes E$, alors

$$\mathcal{D}_\gamma^\nabla(\psi \otimes \epsilon) = (\mathcal{D}_\gamma\psi) \otimes \epsilon + \sum_{i=1}^{n} e_i \cdot_\gamma \psi \otimes \nabla_{e_i}\epsilon.$$

Le premier exemple important est celui du fibré en algèbres de Clifford Cl_gM, qui en tant que O_n-fibré est isomorphe à ΛT^*M. En utilisant par exemple le fait qu'en dimension paire $Cl_gM \simeq \mathrm{End}_K \sum_\gamma M \simeq \sum_\gamma M \otimes_K \sum_\gamma$ pour $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ou $\mathbb{H}$ suivant la congruence de n à 8, on peut former l'opérateur de Dirac tordu $\mathcal{D}_\gamma^D$ qui s'identifie à $d + \delta_g$ où δ désigne l'adjoint de la différentielle extérieure d, souvent appelé la *codifférentielle*. (On rappelle qu'en dimension n, $\delta_g|\Omega^p = (-1)^{np+n+1} *_g \circ d \circ *_g$ où $*_g$ est l'opérateur de Hodge, donc qu'en dimension paire $\delta_g = - *_g \circ d \circ *_g$).

Cette correspondance se prolonge au cas où X est une variété complexe de dimension complexe m. En passant au complexifié et en utilisant le fait que $C\sum_\gamma M$ peut s'identifier à $\oplus_{k=1}^m \Lambda^{(m,k)} T_C^* M$, on trouve alors que l'opérateur de Dirac tordu par le fibré des formes de type $\Lambda^{(k,0)}$ s'identifie à l'opérateur $\overline{\partial} + \partial^*$ fondamental dans la théorie de Dolbeault (ici, ∂^* désigne l'adjoint de $\overline{\partial}$ pour la métrique hermitienne). Pour plus de détails, voir [Mn].

c) Ellipticité et caractère autoadjoint

Nous mettons maintenant en évidence la propriété fondamentale de l'opérateur de Dirac.

THÉORÈME 8. *L'opérateur de Dirac $\mathcal{D}_\gamma$ associé à une métrique spinorielle γ provenant d'une métrique riemannienne est elliptique et formellement auto-adjoint.*

Preuve. En effet dans la direction cotangente α le symbole de $\mathcal{D}_\gamma$ est $\psi \longrightarrow \alpha \cdot \psi$ qui est inversible puisque son carré n'est rien d'autre que $\alpha \cdot \alpha \cdot = -g^{-1}(\alpha, \alpha) Id$ (où g^{-1} désigne la métrique sur T^*M).

L'opérateur $\mathcal{D}_\gamma$ est formellement autoadjoint car, pour des champs de spineurs ψ et ψ' à support compact,

$$\int_M (\psi, \mathcal{D}_\gamma\psi') v_g = \int_M (\mathcal{D}\gamma\psi, \psi') v_g.$$

La formule résulte d'une intégration par parties faisant intervenir la divergence du champ de vecteurs v tel que $g(v,w) = (\psi, w \cdot \psi')$ (voir [L-Mn2] pour le détail).

Les extensions de l'opérateur de Dirac que nous avons données dans la section précédente jouissent de la même propriété. Dans le cas de connexions spinorielles modifiées, il s'agit en effet seulement d'une modification d'ordre 0, donc n'affectant pas le symbole principal.

d) La formule de Lichnerowicz

Dans la section précédente, nous avons, sans le dire, utilisé le carré de l'opérateur de Dirac pour constater que son symbole principal est donné par la métrique g^{-1} sur le fibré cotangent, autrement dit que $\mathcal{D}_\gamma^2$ est un *laplacien*. Dans [Li1], on trouve la formule complète exprimant $\mathcal{D}_\gamma^2$. Cette formule joue un rôle fondamental dans la façon dont l'opérateur de Dirac interagit avec la géométrie riemannienne.

Théorème 9. *Pour un champ de spineurs, la formule de Lichnerowicz*

$$\mathcal{D}_\gamma^2 \psi = D^{\gamma^*} D^\gamma \psi + \frac{1}{4} s_g \psi \tag{9}$$

relie le carré de l'opérateur de Dirac au laplacien brut $D^{\gamma^*} D^\gamma$ (ici, D^{γ^*} désigne l'adjoint formel de la dérivation covariante D^γ et s_g la courbure scalaire de la métrique g).

Quoiqu'élémentaire, le calcul conduisant à cette formule utilise toutes les symétries de la courbure riemannienne (cf. [L-Mn2] ou [Bs] Appendice 2ème partie). Il est facile de voir que la courbure de la connexion spinorielle canonique s'exprime à partir du tenseur de Riemann pour des vecteurs tangents v, w et un spineur ψ par

$$R^\gamma_{v,w}(\psi) = R^g_{v,w} \cdot \psi$$

où $R^g_{v,w}$ est considéré comme une 2-forme extérieure.

Il est cependant possible de prédire a priori que seule la partie scalaire de la courbure va apparaître dans la formule de Lichnerowicz par le raisonnement suivant : l'identité considérée fait intervenir linéairement et de façon O_n-invariante la courbure qui doit apparaître comme un endomorphisme sur les spineurs, donc via une des représentations extérieures, alors que l'espace des tenseurs de courbure est la somme de trois représentations O_n-irréductibles (cf. [Bs]), l'une triviale contenant la partie scalaire de la courbure, l'autre contenant la partie à trace nulle de la courbure de Ricci (présente dès que $n \geq 3$), la dernière contenant le tenseur de courbure conforme de Weyl (présente dès que $n \geq 4$). La seule représentation commune aux deux espaces est donc la représentation triviale, d'où l'apparition de la courbure scalaire.

Nous examinons les nombreuses conséquences de cette formule dans les paragraphes suivants.

e) Comportement par changement de métrique

La métrique étant présente via la multiplication de Clifford dans le symbole de l'opérateur de Dirac, cet opérateur change donc substantiellement avec elle. Cette dépendance est analysée dans [Bz-Py] et [Py]. Nous présentons une autre solution prolongeant la comparaison des spineurs donnée en 1.e).

Comme il a déjà été remarqué lors de l'étude des spineurs, le cas du changement conforme de métrique $\overline{g} = e^{2c}g$ est plus simple, car l'isomorphisme entre bases spinorielles peut être décrit explicitement.

Ici l'ingrédient supplémentaire est la connexion dont le comportement par changement conforme est bien connu. Si on note $\overline{\psi}$ le champ de γ-spineurs image de ψ par l'isomorphisme décrit en 1.e) et plus généralement avec une barre tout ce qui est attaché à $\overline{\gamma}$, alors

$$\overline{\nabla}_x\overline{\psi} = \overline{\nabla_x\psi} - \frac{1}{2}\overline{x \cdot dc \cdot \psi} - \frac{1}{2}dc(x) \cdot \psi$$

et par suite (voir [Hi2] par exemple)

Proposition 10. *Les opérateurs de Dirac associés à deux métriques spinorielles γ et $\overline{\gamma}$ conformément reliées entre elles ($\overline{g} = e^{2c}g$) sont reliés par la formule*

$$\mathcal{D}_{\overline{\gamma}} = \overline{e^{-\frac{n+1}{2}c} \circ \mathcal{D}_\gamma \circ e^{\frac{n-1}{2}c}}. \tag{10}$$

(Noter que la formule donnée dans [Hn] pour (10) est incorrecte).

Ce comportement simple fait quelquefois dire que l'opérateur de Dirac est invariant conforme. En le considérant comme agissant sur le produit tensoriel des champs de spineurs par des densités appropriées, on peut produire effectivement cette invariance.

Le cas général est plus complexe à exprimer. Soient g et g' deux métriques qui, relativement à la même classe de cohomologie dans $H^1(M, \mathbb{Z}_2)$, donnent lieu aux métriques spinorielles γ et γ'. Nous avons expliqué en 1.e) comment on pouvait construire un isomorphisme $\beta_\gamma^{\gamma'}$ entre les fibrés de spineurs $\sum_\gamma M$ et $\sum_{\gamma'} M$. Grâce à cet isomorphisme, il est aussi possible de transporter la forme de connexion $\widetilde{\omega}'$'. On a alors la formule

$$\mathcal{D}_{\gamma'} = \beta_\gamma^{\gamma'}\left(\sum_{i=1}^n f_i \cdot_\gamma D^{\gamma'}_{\beta_\gamma^{\gamma'}(f_i)}\right)$$

qui montre que l'opérateur de Dirac $\mathcal{D}_{\gamma'}$ pour la métrique spinorielle γ' n'est pas purement et simplement l'image de l'opérateur de Dirac $\mathcal{D}_\gamma$. Il faut faire intervenir l'opérateur différentiel $D^{\gamma'}_{\beta_\gamma^{\gamma'}(X)}$ qui n'est pas une dérivation covariante puisque son symbole principal est $\beta_\gamma^{\gamma'}$.

L'expression précédente se simplifie dans le cas d'un changement conforme de métrique pour deux raisons : d'abord l'isomorphisme $\beta_\gamma^{\gamma'}$ est un multiple de l'identité ; de plus, la modification de la connexion peut être absorbée par la multiplication par un terme approprié.

[...]

6. Les valeurs propres de l'opérateur de Dirac.

a) Le spectre de $\mathcal{D}_\gamma$

Nous allons nous limiter au cas où la variété spinorielle (M, γ) est compacte, car la discussion du cas non-compact requiert beaucoup plus de soin et les problèmes qui se posent sont (pour le moment) moins géométriques. C'est pourtant le cadre naturel dans lequel se posent les problèmes physiques.

Comme $\mathcal{D}_\gamma$ est un opérateur elliptique du premier ordre, nous avons le théorème suivant :

Théorème 26. *Sur une variété spinorielle (M, γ), le spectre de l'opérateur de Dirac $\mathcal{D}_\gamma$ est formé d'une suite discrète de nombres tendant vers $+\infty$ et vers $-\infty$.*

La valeur propre 0 à laquelle sont associées les spineurs harmoniques joue, quand elle existe, un rôle particulier. L'opérateur $\mathcal{D}_\gamma^2$ étant positif ou nul, elle apparaît comme sa valeur propre limite. De plus, lorsque la dimension est paire, c'est la seule valeur propre qui admet des champs de spineurs propres de type pur, positif ou négatif.

Proposition 27 *Sur une variété spinorielle compacte (M, γ) de dimension paire, le spectre de $\mathcal{D}_\gamma$ est pair, chaque champ de spineurs propre non harmonique ayant une partie positive et une partie négative non nulle.*

Preuve. En effet, si δ est une valeur propre de $\mathcal{D}_\gamma$ de champ de spineurs propre associé $\psi = \psi^+ + \psi^-$, alors $-\delta$ est aussi une valeur propre de $\mathcal{D}_\gamma$ car, de $\mathcal{D}_\gamma(\psi) = \delta\psi$, on déduit que $\mathcal{D}_\gamma^+\psi^+ = \delta\psi^-$ et $\mathcal{D}_\gamma^-\psi^- = \delta\psi^+$ et par suite

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_\gamma(\psi^+ - \psi^-) &= \mathcal{D}_\gamma^+\psi^+ - \mathcal{D}_\gamma^-\psi^- \\ &= \delta\psi^- - \delta\psi^+ \\ &= -\delta(\psi^+ - \psi^-).\end{aligned}$$

Cette symétrie du spectre est particulière aux dimensions paires. Au contraire, en dimension impaire, l'asymétrie du spectre contient une information géométrique subtile. Si, pour un nombre complexe s de partie réelle suffisamment grande, on définit la fonction $\eta_\gamma(s) = \sum \operatorname{sgn} \delta_i^\gamma |\delta_i^\gamma|^{-s}$ où les δ_i^γ sont les valeurs propres de $\mathcal{D}_\gamma$, alors on démontre que η_γ est une fonction méromorphe dont 0 n'est pas un pôle. On vérifie alors que la variation de η_γ par rapport à la métrique est donnée par des quantités locales sans que η_γ elle-même ait une expression locale (voir [A-Pi-S] pour les développements correspondants).

b) Estimation des valeurs propres

Très peu de résultats sont en fait connus sur ce sujet pourtant important, à part la présence assurée de la valeur propre 0 sous certains conditions topologiques que nous avons examinées dans la Section 4. Par la théorie générale des opérateurs elliptiques nous savons que le comportement asymptotique du nombre N_δ^γ de valeurs propres inférieures à δ est donné par le théorème d'Hermann Weyl (en se souvenant que l'opérateur de Dirac est d'ordre 1)

$$N_\delta^\gamma \sim \mathrm{Vol}(M, g)\delta^{\frac{1}{n}}.$$

Un résultat dû à O. Hijazi (cf. [Hil]) tire avantage du comportement de $\mathcal{D}_\gamma$ par changement conforme de métrique pour comparer les carrés des valeurs propres de $\mathcal{D}_\gamma$ à la plus petite valeur propre de l'opérateur $L_g = 4\,\dfrac{n-1}{n-2}\,\Delta_g + s_g$ agissant sur les fonctions, souvent appelé le *laplacien conforme* à cause de son équivariance par changement conforme de métrique.

Théorème 28. *Sur une variété spinorielle compacte (M,γ) de dimension n, toute valeur propre δ_γ de l'opérateur de Dirac $\mathcal{D}_\gamma$ vérifie l'inégalité*

$$\frac{n}{4(n-1)}\lambda_g \leq (\delta_\gamma)^2$$

où λ_g désigne la première valeur propre du laplacien conforme L_g associée à la métrique riemannienne g subordonnée à γ.

Cette inégalité est un raffinement d'une inégalité due à T. Friedrich (cf. [Fh1]) faisant intervenir la borne inférieure de la courbure scalaire.

Cette inégalité ne donne d'information sur les carrés des valeurs propres de $\mathcal{D}_\gamma$ que si $0 < \lambda_g$. Il est connu que cette propriété ne dépend que de la classe conforme de la métrique g et est équivalente à ce que cette classe contienne une métrique à courbure scalaire positive. Une borne supérieure est donnée par J. Lott dans [Lt] où on trouve aussi des estimations des valeurs propres d'ordre plus élevé grâce à une présentation probabiliste du noyau de la chaleur.

Par ailleurs il est possible de discuter le cas d'égalité en termes géométriques. En toutes dimensions, la sphère S^n munie de sa métrique canonique fournit un exemple de variété spinorielle où l'égalité est atteinte, mais suivant la dimension elle est ou n'est pas le seul exemple possible (cf. [Fh2], [Fh-Gd] et [Hi2] pour une discussion de ce point). Dans (Hi2], dans le cas d'égalité, le spineur propre associé à cette valeur propre est annulé par toute forme harmonique de degré différent de 0 et n (pour la multiplication de Clifford). Cette propriété exclut toutes les variétés kählériennes du cas d'égalité. Une inégalité améliorant celle de T. Friedrich a été obtenue pour cette famille de variétés par K.D. Kirchberg (cf. [Kg]), l'égalité n'étant possible que pour les variétés de dimension complexe impaire.

Il est à noter que toutes les formules déduites du théorème de l'indice que nous avons présentées jusqu'à présent ne faisaient pas intervenir explicitement la structure spinorielle. Celle-ci apparaît dans la discussion du cas d'égalité (le cas de S^3 et des espaces lenticulaires est traité dans [Fh1]).

c) Espacement des valeurs propres

Dans ce paragraphe, nous présentons brièvement un théorème dû à C. Vafa et E. Witten (cf. [Va-W]) qui nous écarte un peu de notre chemin dans la mesure où il s'intéresse à la dépendance de l'opérateur de Dirac $\mathcal{D}_\gamma^\nabla$ tordu par une connexion ∇ sur un fibré auxiliaire E, mais dont la preuve est suffisamment originale pour justifier ce détour.

Théorème 29. *Il existe une constante C_γ ne dépendant que de la variété spinorielle (M,γ) supposée de dimension impaire telle que tout intervalle de longueur C_γ contienne (au moins) une valeur* *propre de* $\mathcal{D}_\gamma^\nabla$.

Dans le cas de dimension paire, C. Vafa et E. Witten donnent aussi un résultat pour lequel nous renvoyons à [A2]. Bien que le contenu de ce théorème soit analytique, la preuve s'appuie sur une forme du théorème de l'indice appliqué à la variété $M \times S^1$. On considère la famille d'opérateurs de Dirac indexée par le cercle. Dans [A-Pi-S], M.F. Atiyah, V.K. Patodi et I.M. Singer ont donné une formule topologique pour estimer le flot spectral de la famille qui compte le nombre de valeurs propres négatives qui sont devenues positives en un tour moins le nombre de celles positives qui sont devenues négatives. Il faut s'assurer qu'on peut modifier la situation géométrique tout en la contrôlant pour que cet indice ne soit pas nul. Pour les détails, nous renvoyons à [A2] et pour les motivations physiques à [Va-W].

Il faut remarquer qu'un théorème analogue n'est pas vrai pour le laplacien dont la première valeur propre n'est pas nécessairement bornée quand on change le type topologique du fibré. De même le Théorème 29 ne se généralise pas au cas de dimension paire, des espacements arbitrairement grands pouvant apparaître assez loin dans le spectre.

d) Variation des valeurs propres avec la métrique

Les valeurs propres d'un opérateur elliptique défini sur une variété M sont des invariants numériques attachés à la structure qui permet de définir l'opérateur. Si le sous-espace propre est de dimension constante dans un domaine de variation de cette structure, la dépendance de la valeur propre est lisse.

Nous nous intéressons aux variations des valeurs propres de l'opérateur de Dirac $\mathcal{D}_\gamma$ par changement de métrique. En faisant une telle déformation nous altérons son symbole principal, soit beaucoup plus que ce qui a été fait au paragraphe précédent. Pour simplifier les expressions, nous nous limitons au cas où le spineur propre ψ_γ associé à la valeur propre δ_γ est simple. Pour le cas général qui n'est pas sans intérêt (pensez aux spineurs harmoniques sur certaines variétés), nous renvoyons à [Bn].

Proposition 30. *La dérivée d'une valeur propre simple δ_γ par rapport à un changement infinitésimal de métrique $b = \frac{1}{n}cg + z$ (où z est à trace nulle) est donnée par la formule*

$$\frac{d\delta_{\gamma+tb}}{dt}_{|t=0} = \int_M (z, Q^{\psi_\gamma})v_g - \frac{1}{2}c\delta_\gamma \int_M |\psi_\gamma|^2 v_g \tag{30}$$

où Q^ψ désigne la forme quadratique $X \mapsto (X \cdot D_X^\gamma \psi, \psi)$.

Remarques :

i) La formule de variation par changement conforme se simplifie considérablement puisqu'elle ne fait pas intervenir la dérivée du champ de spineurs propre.

ii) On vérifie que cette dérivée est identiquement nulle si on change la métrique par difféomorphisme puisqu'une valeur propre est un invariant numérique.

Références

[A2] M.F. Atiyah, *Vector fields on manifolds*, Arbeitsgemeinschaft für Forschung des Landes Nordrhein-Westfalen, Natur-, Ingenieur- und Gesellschaftswissenschaften 200 (1970).

[A-Pi-S] M.F. Atiyah, V.K. Patodi, I.M. Singer, Spectral asymmetry and Riemannian geometry, I. Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 77 (1975), 43-69 ; idem, II, ibidem 78 (1975), 405-432 ; idem, III, ibidem, 79 (1976), 71-99.

[Bn] J.P. Bourguignon, Spineurs, opérateurs de Dirac et variations de métriques, à paraître.

[Bs] A. Besse, *Géométrie riemannienne en dimension 4*, CEDIC-Nathan, Paris (1981).

[Bz-Py] E. Binz, R. Pferschy, The Dirac operator and the change of the metric, C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada V (1983), 269-274.

[Fh1] T. Friedrich, Der erste Eigenwert des Dirac-Operators einer kompakten Riemannschen Mannigfaltigkeit nicht-negativer Krümmung, Math. Nach. 97 (1980), 117-146.

[Fh2] T. Friedrich, A remark on the first eigenvalue of the Dirac operator on 4-dimensional manifolds, Math. Nach. 102 (1981), 53-56.

[Fh-Gd] T. Friedrich, R. Grunewald, On the first eigenvalue of the Dirac operator on 6-dimensional manifolds, Ann. Global Anal. Geom., 3 (1985), 265-273.

[Hi1] O. Hijazi, A conformal lower bound for the smallest eigenvalue of the Dirac operator and Killing spinors, Commun. Math. Phys. 104 (1986), 151-162.

[Hi2] O. Hijazi, Caractérisation de la sphère par les premières valeurs propres de l'opérateur de Dirac en dimensions 3, 4, 7 et 8, Preprint, Max Planck Institut für Mathematik, Bonn 1986.

[Hn] N. Hitchin, Harmonic spinors, Adv. in Math. 14 (1974), 1-55.

[Kg] K.D. Kirchberg, An estimation for the first eigenvalue of the Dirac operator on closed Kähler manifolds of positive scalar curvature, Preprint, Humboldt Univ. zu Berlin, 1985.

[Li1] A. Lichnerowicz, Laplacien sur une variété riemannienne et spineurs, Atti Accad. Naz. dei Lincei, Rendiconti 33 (1962), 187-191.

[Lt] J. Lott, Eigenvalue bounds for the Dirac operator, Preprint, Harvard University.

[L-Mn2] H.B. Lawson, M.L. Michelsohn, *Spin geometry*, à paraître.

[Mn] M.L. Michelsohn, Clifford and spinor cohomology of Käler manifolds, Amer. J. Math. 102 (1980), 1083-1146.

[Py] R. Pferschy, *Die Abbängigkeit des Dirac-Operators von der Riemannschen Metrik*, Diss. Techn. Univ. Graz, 1983.

[Va-W] C. Vafa, E. Witten, Eigenvalue inequalities for fermions in gauge theories, Commun. Math. Phys., 95 (1984), 257-276.