

LE HASARD EXISTE-T-IL VRAIMENT ?

HUGO DUMINIL-COPIN

“L’homme a appelé Hasard la cause de toutes les surprises, la divinité sans visage, qui préside à tous les espoirs insensés, à toutes les craintes sans mesure, qui déjoue les calculs les plus soigneux, qui change les imprudences en décisions heureuses, les plus grands hommes en jouets, les dés et les monnaies en oracles, qui fait les batailles comparables à des parties... Le Hasard ne se peut regarder fixement.”

Paul Valéry, Cahiers I.

Bonjour à tous, merci beaucoup pour cette introduction, ça me met un peu de stress... C’est toujours le petit moment où tout le monde est un peu stressé parce que vous vous dites “ouhlala, 40 minutes de mathématiques, ça va être l’horreur !” et moi je me dis que vous êtes nombreux donc c’est l’horreur pour beaucoup. Je vois aussi beaucoup de physiciens, donc des gens qui probablement pourraient donner l’exposé mieux que moi et je vous préviens, je ne donne pas l’exposé pour vous (*désignant le groupe de physiciens*), je donne l’exposé pour le reste du monde.

Et voilà, donc, pas de panique et je sais que quand un mathématicien vous dit de ne pas paniquer, c’est le moment où il faut paniquer, je le sais très bien puisque je suis mathématicien, mais là, j’ai quand même fait un effort : il n’y aura pas de formule, aucune formule mathématique, ne vous inquiétez pas ; pas de doux souvenirs d’enfance, ou rarement pour être honnête, et pas non plus d’interro surprise à la fin... ou peut-être... je ne sais pas, on verra !

Alors de quoi allons-nous parler ? Déjà, on va parler de hasard et je veux tout de suite arrêter les ardeurs de tout le monde, je ne vais pas vous parler de toutes les façons dont on peut définir le hasard, je ne vais pas parler de philosophie, de contingence, de toutes ces choses comme ça, je vais me focaliser sur une notion de hasard qui est la notion scientifique de hasard. Je vais la définir dans quelques instants mais s’il y a des philosophes dans la salle, ne m’en voulez pas, je ne vais pas rentrer dans des débats de ce type-là. Hasard, disons qu’étymologiquement, ça vient du mot “az-zahr”, en arabe, et qu’est ce que ça veut dire, ça veut dire la cause d’un phénomène qui ne s’inscrit pas dans le cadre d’un processus déterminé et qui échappe à toute forme de prévision. Et c’est ça que je veux que vous reteniez, je ne suis pas en train de dire que c’est quelque chose que moi, personnellement, Hugo Duminil-Copin, je n’arrive pas à prédire, non, je dis que quels que soient les outils que j’utilise, que toute la communauté scientifique utilise, que tous les humains utilisent, nous n’arriverons pas à prédire ce qui se passe ; c’est ça un événement réellement hasardeux ; ça correspond, pour les gens qui s’ennuyaient déjà de ce que je disais et qui lisaient la citation, ça correspond vraiment à une toute petite partie de la citation qui était écrite juste avant “... qui

Référence https://www.youtube-nocookie.com/embed/IupY68PJ6iw?autoplay=1&load_policy_loop=1&modestbranding=1&playlist=IupY68PJ6iw.

Transcription des sous-titres de la Conférence du Colloque Wright 2021 (sous-titres obtenus par downsub), Denise Vella-Chemla, novembre 2021.

déjoue les calculs les plus soigneux”.

Vous voyez, je ne prétends pas refaire le monde on va juste se focaliser sur ces quelques mots de cette longue citation ; très bien ; donc le hasard c’est ce qui échappe à toute prédiction et en fait, quand le mot hasard entre dans le langage courant, à peu près au XVII^e siècle, on est au milieu d’une révolution, c’est la révolution Newtonienne, donc la mécanique classique est en train d’être construite et de trouver toutes les applications qu’on lui connaît. Et donc en particulier, un fantasme des mathématiciens, des physiciens, de tous les scientifiques de l’époque, c’est que peut-être que tout effet a en fait une cause physique.

C’est une telle révolution qu’on se mette à croire que ça, c’est une chose qui est possible, et du coup le hasard vient d’un certain point de vue et les événements qui restent encore inexplicables, on suppose que le hasard, en tout cas on utilise le mot hasard, pour dire que bah finalement, c’est la cause des choses qu’on n’arrive pas à expliquer. Mais puisqu’il y a une révolution, donc on est en mouvement, on peut naturellement se poser la question “est-ce que je suis également en mouvement ?”.

J’illustre un peu : on peut se demander si ce hasard, il existe vraiment ou si finalement, c’est juste quelque chose de très subjectif, qui est vrai à un moment parce qu’on n’a pas encore trouvé l’explication, qui convient pour l’événement en question et que finalement peut-être que toute chose, tout effet a effectivement une cause physique.

Donc ce n’est pas du tout une question anodine de se demander si le hasard existe vraiment. Alors qu’est-ce qui est hasardeux ? Si on vous le demande, normalement, la population se divise en deux parties : ceux qui répondent un lancer de pièce de monnaie et ceux qui répondent un lancer de dé ; ce sont les deux choses typiques qui pour les gens sont hasardeuses, aléatoires ; j’utiliserai d’ailleurs aléatoire à la place de hasard de façon un peu interchangeable, je suis désolé, je suis probabiliste, c’est un peu mon groupe, désolé, c’est comme ça, j’utilise aléatoire ou hasard, ne m’en voulez pas.

Et donc, pour le lancer de pièce de monnaie, qu’est ce qu’il faut ? Il faut une pièce de monnaie, il faut la gravité, en gros ce sont les deux choses qu’il faut, donc, n’essayez pas de faire ça dans la station spatiale, ça ne marche pas, mais ici il n’y a pas de souci, pièces de monnaie et gravité, on lance la pièce, elle retombe sur pile ou face, on a un retour équitable il y a autant de probabilité de tomber sur l’un ou sur l’autre et c’est typiquement aléatoire dans le sens où on n’arrive pas à prédire ce qui se passe.

On l’utilise tout le temps dans la culture populaire, on l’utilise dans le sport bien entendu, ces fameux toss, maintenant j’utilise les toss ; bon je suis mathématicien, il faut que je passe une référence geek. Il n’y en n’aura qu’une seule, je vous rassure, c’est... je vois les matheux qui font “oh non, pas une seule”.

Donc il y en aura une, c’est Double-Face, le méchant de Batman, qui décide avec un lancer de pièce de monnaie du sort de ces victimes ; c’est tout à fait glauque, oui, voilà, c’est ma référence geek.

Donc dans l'imaginaire collectif, le lancer de pièce de monnaie, c'est le hasard par définition. Pourquoi pense-t-on que c'est le hasard ? On pense que c'est le hasard parce qu'on n'arrive pas à prédire le résultat, c'est-à-dire que là, si je lance...

Bon, déjà, je ne vais pas le faire parce que je pense que je ne vais pas arriver à la rattraper, ou je vais glisser dessus ; bref, si je lançais cette pièce, vous êtes d'accord que ni moi qui vais taper dedans pour la lancer, je ne peux exactement taper de la bonne façon pour être sûr d'avoir un résultat et ni vous qui me regardez ne serez capable de savoir au moment où je tire sur quelle face la pièce de monnaie tombe. Donc finalement le hasard, c'est presque un synonyme de dire que pour nos cerveaux humains, on ne parvient pas en temps réel à prédire le comportement des systèmes quand je lance la pièce, ce que beaucoup de gens disent comme étant un problème où il y a trop de paramètres, on ne peut pas prévoir. Mais si vous réfléchissez, finalement, ce système, il n'est pas si compliqué que ça ; qu'est-ce qu'il y a à dire ? J'ai une pièce de monnaie. Au départ, quand je vais taper dedans, ça va lui donner une vitesse de rotation, une vitesse aussi, je pars d'un certain endroit, bon ben la gravité, on sait très bien décrire ce qu'elle est, ce qu'elle a comme impact sur cette pièce ; donc on va savoir prédire exactement quel est son mouvement ; il y a un moment où elle va arriver au sol, elle va taper d'une certaine façon ; là, on a des lois physiques qui prédisent quels sont les façons dont la pièce va rebondir, hop, elle va faire un premier rebond, peut-être un deuxième, un troisième, et finalement, les lois de la physique, on ne connaît pas tout mais on devrait tout connaître, et finalement cela nous permet de prédire tout à fait correctement ce qui va se passer pour cette pièce. Il n'y a rien d'aléatoire là-dedans. Mais bon, ça, c'est la théorie mais même au niveau pratique avec les super-ordinateurs, aujourd'hui, on parvient en fait même à faire des simulations ; on arrive très bien à prédire ce qui va se passer pour le comportement de cette pièce donc en fait, ce n'est pas un système qui a tant de paramètres : il y a peu de forces qui s'exercent dessus, il y a beaucoup de forces qui sont négligeables, d'ailleurs, peu de forces qui s'exercent dessus, peu de conditions, et finalement on n'arrive toujours pas à prédire donc c'était la première chose que je voulais peut-être mentionner, c'est que l'on se réfère toujours au fait qu'il y a trop de paramètres, oh là là là là, c'est compliqué, mais en fait des systèmes relativement simples nous paraissent déjà aléatoires et pour peut-être caricaturer encore plus ce qui se passe pour cette pièce de monnaie, je vais vous parler... je veux prendre le temps de vous parler de quelque chose que j'aurais pu sauter, mais je vais vous parler d'une théorie qui est magnifique qui s'appelle la théorie du chaos.

Je vous donne un exemple : la théorie du chaos, en quelque sorte, c'est une caricature de ce qui se passe pour la pièce, dans le sens où ce sont des systèmes qui sont très très simples mais qui sont ultra-sensibles aux conditions initiales ; donc ce sont des systèmes qui vont avoir l'air complètement aléatoires alors que finalement ils sont très très simples à décrire et je vais vous donner un exemple et j'espère que vous serez d'accord avec moi sur le fait que ce n'est pas un exemple si compliqué que ça.

Donc on va faire une petite expérience de pensée, tous, fermez les yeux, enfin vous n'êtes pas obligé de fermer les yeux, mais on va fermer les yeux et on va s'imaginer dans notre bar préféré en train de jouer au billard, d'accord, tout le monde s' imagine ça ; bon, les gens qui n'ont jamais joué au billard, je suis désolé pour les cinq prochaines minutes.

Mais avant donc on joue au billard et on joue bien au billard donc on est en train de gagner et si vous avez déjà joué, eh bien vous vous souvenez qu'à la fin d'une partie de billard, il y a

ce moment extrêmement frustrant parce que vous êtes en avance sur l'adversaire mais il reste un coup à jouer qui est qu'il faut rentrer cette fichue boule blanche après 3 rebonds dans un trou ; ça c'est clairement une règle qui a été inventée par quelqu'un qui n'avait pas envie de perdre parce qu'en général, du coup, on passe des heures à essayer de faire ça, c'est complètement aléatoire et les personnes nous rattrapent.

Donc je veux que vous imaginiez ce moment-là : vous avez tapé dans cette boule blanche et là, j'aimerais que vous soyez honnête avec vous-même et que vous admettiez la chose que je vais vous dire qui est que finalement, notre cerveau comprend assez bien ce qui va se passer ; notre main, elle, ne sait pas du tout réaliser ce qu'on veut faire, mais notre cerveau, il sait très bien que quand on va taper dans cette boule blanche, elle va partir en ligne droite, elle va aller heurter le bord du billard ; là, elle va rebondir en formant le même angle, et ça, en fait, on comprend assez bien intuitivement ce qu'elle fait, on le calcule, on est même prêt à imaginer ce qu'elle va faire après, avant d'aller taper ce deuxième bord, le troisième, et finalement, on essaye de calculer le bon angle pour pouvoir taper la boule de telle sorte qu'après les trois rebonds, elle arrive dans le trou.

Pourquoi j'ai fait ce petit aparté ? C'est pour essayer de vous convaincre que finalement, on comprend assez bien ce système physique même intuitivement, on le comprend très bien, le cerveau humain comprend ce qui se passe, eh bien pourtant, on peut créer à partir de ce système tout simple quelque chose qui a l'air complètement aléatoire, c'est ce que je vais vous montrer maintenant parce qu'un mathématicien, quand il comprend une situation, il aime la compliquer d'accord ? ! Donc une chose qu'on peut faire, si on a envie de s'amuser, c'est de dessiner des billards qui ne sont pas rectangulaires, pourquoi pas hein ?... Donc un billard par exemple circulaire et un billard, là, je vous l'accorde, c'est vraiment une idée de mathématicien, il a l'air bizarre, d'accord, vous allez comprendre pourquoi on l'a dessiné comme ça, pourquoi mon collègue mathématicien l'a dessiné comme ça.

Et maintenant, ce que j'ai fait, les petit carrés bleu et rouge. Alors on m'a dit que je pouvais faire quelque chose ça, c'est dur, vous voyez pourquoi je suis devenu mathématicien, donc là, ici, le petit carré bleu, en fait, ce sont des petits points qui représentent des billes de billard ; d'accord elles sont les unes à côté des autres et on va imaginer que quelqu'un tape dans ces billes un tout petit peu différemment, dans deux directions quasiment les mêmes, les billes partent quasiment du même endroit et on va voir ce qui se passe, c'est parti !

Petit moment de repos pour le cerveau, voilà, hélas, ce qu'on voit c'est que ça ne se passe pas tout à fait de la même façon : on voit qu'à droite, en rouge, finalement les billes sont parties proches l'une de l'autre, et elles continuent à aller finalement, à aller et venir, en restant dans une forme relativement ordonnée tandis qu'à gauche, à l'inverse, les billes, excusez-moi de le dire mais c'est un peu le bordel, à gauche, c'est n'importe quoi, les trajectoires des billes ont l'air complètement aléatoires et si je commençais la vidéo à ce moment-là, je pense que personne ne me dirait "Oh mais écoutez, c'est juste, c'est tout simple, on envoie des billes dans une direction, elles rebondissent à angle égal contre les murs et puis voilà."

Je les fais partir juste les unes à côté des autres et j'obtiens ce... Là, c'est un exemple typique d'aléatoire en quelque sorte au même sens finalement que cette pièce de monnaie aléatoire qui

partant de quelque chose qui était quasiment déterministe, on avait un système très simple, on a créé du désordre.

Pour ce jeu (*désignant le billard circulaire*), est-ce que vous avez tous vu ici le cercle au centre dans lequel les billes ne rentrent jamais... Je vous remets la vidéo, juste parce qu'en fait, comme ça, vous pouvez arrêter de m'écouter en général, ça attache très bien, voilà, c'est complètement hypnotique.

Voilà, c'est un système chaotique à gauche, tandis qu'à droite ce n'est pas chaotique, non je vois que tout le monde est fixé sur le cercle, le rouge, bref...

Pourquoi c'est important ce type de chaos? Eh bien parce qu'en fait, au fond du fond, c'est peut-être cette façon qui est la façon la plus simple de créer de l'aléatoire. Alors pas du vrai aléatoire, puisqu'on a vu que tout était déterministe : si je vous donne la condition initiale, on sait très bien prédire le comportement de la bille mais globalement, on crée de l'aléatoire du fait de la sensibilité, si vous voulez, à la condition initiale ; le fait que le cerveau humain n'arrive pas à analyser suffisamment bien la condition initiale et ça en fait, c'est l'idée de base de quasiment tous les générateurs. Je reviendrai après sur des améliorations récentes mais jusqu'à il y a peu de temps, c'était la façon dont on générait par exemple des nombres aléatoires ; on prenait des fonctions qu'on appelle chaotiques et on créait des nombres aléatoires en itérant ces fonctions, et les nombres qu'on obtenait, on considérait que c'étaient des nombres qui étaient suffisamment... enfin incalculables ; on va dire par des méthodes itératives, c'est suffisamment aléatoire pour pouvoir être utilisé.

Le problème c'est que c'était pour pouvoir être utilisé dans le domaine très important qu'est la cryptographie, c'est à dire que c'étaient les clés de nos systèmes de cryptage, alors vous pouvez imaginer que c'est un petit peu gênant si un système de cryptage est basé sur des clés qui finalement ne sont pas aléatoires du tout, s'il y a une loi, s'il y a une fonction qui vous donne ce nombre ; elle est compliquée mais il en existe une, donc imaginez que quelqu'un essaye de décrypter votre message, ou votre système de cryptographie, parce qu'il a en quelque sorte deviné la fonction. Et l'existence de cette fonction, c'est quelque chose qui est très gênant, d'accord?

Voilà, alors juste pour la petite histoire, j'ai fait quelque chose de classique chez les mathématiciens, c'est que je vous dis "oh on parle de lancers de pièces de monnaie, après je vous dis "ah mais du coup ça me fait penser aux systèmes chaotiques"". Et vous, vous vous dites "ah bah super, en fait le lancer de pièce de monnaie est un système chaotique.".

Eh bien pas du tout, cette pièce de monnaie n'est pas un système chaotique mais on va dire qu'elle l'est à l'échelle de la compréhension de notre cerveau.

Un système chaotique, en fait, pour qu'il soit vraiment chaotique, il faut que quelle que soit la toute petite perturbation des conditions initiales, si je mets la boule juste un tout petit peu à côté, j'obtiens quelque chose de complètement différent. Et c'est exactement ce qui se passe avec ce système-là ; je vous la remets juste pour le plaisir, je sais que vous aimez ça, juste ne me le cachez pas. Donc ce système, à gauche, c'est vraiment un système chaotique, le lancer de pièce de monnaie, il n'est pas chaotique parce qu'au fond du fond, si vous perturbez ne serait ce qu'un tout petit peu,

enfin, si vous êtes capable de juste perturber un tout petit peu la façon dont vous lancez cette pièce, elle retombera en fait sur le même côté, mais on va dire que les bassins d'attraction, le droit que vous avez de modifier la condition initiale, ce droit est tellement petit qu'il ne faut vraiment pas modifier beaucoup les conditions initiales et ce droit est suffisamment petit pour qu'en fait, l'esprit humain n'arrive pas du tout à comprendre ce qui se passe. Donc en gros il y a une sensibilité aux conditions initiales, voilà.

Alors à ce stade, je suis désolé il n'y aura pas que des vidéos comme ça, donc à ce stade, ce que je voulais vous dire, c'est que finalement le hasard de tous les jours, le hasard à notre échelle, en fait, c'est un hasard apparent ; ça vous allez peut-être dire que c'est un hasard subjectif, et qu'en quelque sorte c'est moi, en tant que Hugo Duminil-Copin qui suis incapable de prédire ce hasard, c'est aléatoire. Ce n'est pas le hasard au sens mathématique ou au sens physique puisqu'on avait dit que le hasard au sens mathématique, il faut que ça résiste à toute forme de prévision. Or là, on a vu par exemple avec les systèmes chaotiques que ce n'est pas le cas : dans un système chaotique, si vous connaissez la valeur initiale et la fonction, vous avez en fait le comportement de la bille de billard, c'est ce que vous imaginez, elle va tout droit, elle rebondit etc., vous pouvez décrire toute la trajectoire.

Donc il va falloir qu'on aille *un peu plus loin* pour trouver du vrai hasard, ou je devrais plutôt dire *un peu plus petit*.

Alors donc là, je me sens dans une situation qui est un peu compliquée parce qu'il y a pas mal de spécialistes de la physique quantique à côté, donc je vais faire attention à ce que je dis, enfin j'allais faire attention de toute façon mais encore plus.

Alors on va faire ce qu'on appelle une expérience de pensée. Une expérience de pensée, c'est une expérience mais qui n'est pas dans un laboratoire, d'accord?... Donc c'est typiquement ce qu'on aime faire en mathématiques et on aime aussi beaucoup faire ça en physique. Cette expérience de pensée va être la suivante : on va imaginer le protocole suivant donc on va avoir trois murs, jusque-là, tout va bien, ils sont très très espacés, dans le premier mur il va y avoir un trou, dans le deuxième mur, il y a deux trous et comme je suis mathématicien, j'ai beaucoup d'imagination on les appelle *Trou 1* et *Trou 2* et sur le dernier mur, il va y avoir des détecteurs. Je n'en ai dessiné qu'un seul mais imaginez qu'ils sont un peu partout d'accord, et on va...

Alors je dois dire qu'historiquement, en fait, on prend une mitraillette et on tire des balles mais je me disais que c'était un petit peu violent donc on va faire quelque chose d'un petit peu plus marrant, on va imaginer que l'émetteur, en fait, c'est un joueur frénétique de billard, il y a des tonnes de billes et lui il tape, il tape, dans toutes les directions, toutes ses billes ; donc il y a des billes et des billes qui sont lancées lancées lancées lancées et notre question, c'est "qu'est-ce qui se passe plus particulièrement, qu'est ce qui se passe ici ?"

Donc il ya beaucoup de billes qui rebondissent, qui ne passent pas par les trous, mais à cause du débit, il y en a qui parviennent finalement à passer par les trous et qui vont arriver dans nos détecteurs. Imaginez que le détecteur, c'est un bac de sable par exemple. Les billes sont arrêtées quand elles atteignent le 3^{ème} mur et on essaye de voir ce qui se passe donc ça, c'est une simu-

lation, ce ne sont pas des billes de billard et ce qu'on voit c'est que les billes apparaissent une à une bien sûr puisqu'on tire les billes une par une très très vite ; les tirs se répartissent un peu uniformément tout en étant aléatoires, enfin, on va voir pas tout à fait bien formellement, mais elles se répartissent selon la cloche suivante. On va faire une cloche bleue donc là, qu'est-ce que c'est que cette courbe ? Cette courbe, en quelque sorte, c'est la fréquence d'arrivée des billes, c'est-à-dire qu'il y a des endroits par exemple un peu plus blancs, ici le centre, typiquement, où il y a plus de billes qui arrivent qu'en d'autres endroits ; ça veut dire que la fréquence d'arrivée des billes à ces endroits-là est plus grande, il y a plus de billes qui arrivent en un temps donné et la courbe bleue, elle représente ces fréquences ; donc vous avez dû vous dire "là, on peut deviner ce qui se passe" ; très clairement, ce qui va se passer c'est qu'on s'attend à ce qu'il y ait des billes qui passent par le trou 1, elles vont arriver à peu près dans l'axe, ainsi ; je tire une droite à peu près dans l'axe entre l'émetteur et le trou ; alors elles rebondissent un peu, ces billes, sur le bord des trous, et donc elles n'arrivent pas toutes exactement au même endroit et puis aussi le tireur les envoie un peu dans toutes les directions donc ça fait une espèce de petite cloche comme ça ; et les billes qui passent par le trou 2 créent une deuxième cloche qui fait plutôt comme ça ; donc si je décompose en fermant un trou par exemple, ce que j'obtiens, c'est que les billes arrivent selon cette cloche de fréquences plutôt vers le haut, cette courbe de fréquences excusez-moi. Quand je ferme le trou 2, elles arrivent plutôt vers le bas, et une chose qui est complètement évidente, c'est que si j'ouvre le trou 1 et le trou 2, bien entendu, la courbe des fréquences est la somme des courbes des fréquences des billes qui passent par le trou 1 et des billes qui passent par le trou 2 forcément.

Et quand j'ouvre les deux trous, les billes passent soit par le trou 1 soit par le trou 2 donc il en arrive une certaine quantité du trou 1, une certaine quantité du trou 2 donc la fréquence d'arrivée des billes, c'est la somme des deux fréquences, OK.

Jusqu'à là je crois que je n'ai pas révolutionné le monde et je suis d'accord que vous pourriez vous demander quel est le rapport avec la choucroute.

Alors le rapport, il vient quand on change un tout petit peu le jeu.

Donc faisons un jeu un tout petit peu plus subtil : on descend d'échelle et on ne va pas lancer des boules de billard, on va lancer des électrons. Alors là, normalement vous devez vous dire "ouh là là, ça y est, il commence vraiment son expérience de pensée : c'est pas possible".

Alors c'est peut-être de la préhistoire pour beaucoup d'entre vous mais il y a un système qui correspond exactement, si vous voulez, à la mitraillette à électrons, c'est le tube cathodique. C'était exactement le concept des vieilles télévisions, on envoie des électrons, ça, c'est tout à fait faisable et en fait, on peut même les envoyer un par un c'est quelque chose d'assez admirable, c'est pas si simple que ça mais c'est faisable.

Donc imaginez que notre émetteur maintenant c'est une mitraillette à électrons, elle envoie les électrons, (*se retournant pour voir la diapositive projetée*) ah eh bien d'accord, très bien, non, alors ce n'est pas ce qui était prévu, hop, vous n'avez rien vu, donc on oublie !

On sort le détecteur, poc!¹.

Ok, donc, on va commencer la même expérience, on envoie des électrons mais on ferme déjà un des trous, on n'ouvre juste que le trou 1 d'accord?! Et on regarde ce qui se passe et là, quand on regarde ce qui se passe, eh ben il se passe la même chose que pour les billes donc jusque-là, cela n'a pas vraiment évolué, c'est toujours la même histoire; en fait, si vous ouvriez le trou 2 et que vous fermiez le 1, vous obtiendriez aussi la même chose, le même type de répartition que pour les billes de billard. Donc maintenant, l'étape d'après, on va regarder ce qui se passe quand on ouvre les deux trous; là, normalement, on peut faire un espèce de pari sur ce qui se passe mais le problème c'est que si je vous donne un qcm et que je vous donne deux solutions vous allez tous regarder la section de physique, ici, qui connaît la réponse, et vous allez les copier donc je ne vais pas faire ça; j'avais prévu, mais je ne vais pas le faire. Donc on ne va pas demander comment ça se passe, on va simplement vous montrer... un peu de suspense, alors une chose déjà admirable, là, il y a beaucoup de suspense, on voit rien du tout alors c'est beau, c'est une chose admirable déjà qui est que les électrons, ils arrivent un par un, ça, c'est quelque chose d'incroyable mais c'est dû au fait que les électrons sont des particules donc on peut vraiment les mesurer et un par un, et la deuxième chose qui est beaucoup plus admirable, c'est qu'on n'obtient pas du tout du tout du tout la même chose que dans le cas du billard parce que là, si vous regardez, je sais pas si je peux arrêter hop, là, je peux arrêter, parfait, si vous regardez ce qui se passe: il y a des zones complètement noires qui ne reçoivent aucun électron et il y a des zones à l'inverse blanches, oui, très blanches maintenant (*explication: ayant malencontreusement manipulé la trieuse de diapo, on voit un écran blanc*) celle-là, j'aurais voulu la faire, je n'y serais pas arrivé. Donc des zones très blanches, je vous laisse imaginer... Maintenant je relance, juste pour que vous voyiez des zones blanches où il y a beaucoup d'électrons qui arrivent.

Mais imaginez un peu ce qui vient de se passer, c'est quelque chose d'extrêmement étonnant, peut-être que je le vends très très mal, mais quand on ferme l'un des trous, le trou numéro 2, il y a des électrons qui arrivent un peu partout en particulier exactement aux endroits des zones noires, là, mais quand j'ouvre l'autre trou, alors ces zones ne reçoivent plus aucun électron. En fait la courbe de fréquences, dans ce cas-là, elle ne ressemble pas du tout à la somme des courbes quand j'ouvre seulement un des trous, elle ressemble à quelque chose de ce type-là.

Alors vous avez remarqué, je pense que tout le monde l'aura compris, je suis nul en informatique, d'accord, donc je n'ai pas su comment faire une rotation de cette vidéo pour qu'elle corresponde mieux à la courbe, mais bien sûr, cette image vous devriez l'imaginer avec une rotation de $\frac{\pi}{2}$, comme ça, je suis bien mathématicien (de 90 degrés pour ceux qui n'aiment pas les radians).

Très bien, donc on obtient quelque chose de complètement différent, on dit en fait qu'il y a interférence, d'accord, et ça, c'est quelque chose qui peut vous sembler hyper-bizarre parce qu'on a cette interprétation d'électrons qui sont des particules et qui viennent un à un. Et donc du coup, ces électrons, ils passent par le trou 1 ou le trou 2, normalement donc, on devrait obtenir la somme des fréquences mais on obtient quelque chose de complètement différent, on obtient en fait quelque chose qu'on voit très fréquemment avec les ondes d'accord, si vous prenez des vagues, donc là, on est content, à Saint-Jean-de-Luz ils nous ont fait le cadeau de nous faire deux trous et donc là, on

1. imitant un man in black effaçant la mémoire des auditeurs.

a des vagues et on a des interférences ; ici, c'est la lumière qui nous fait des interférences, et une très fameuse expérience de physique qui est l'expérience des deux fentes de Young qui a permis en fait de montrer que la lumière se comporte de façon ondulatoire et on obtient en fait le même type d'interférences qu'ici.

Bon mais alors ça, ça dit quelque chose quand même et parce que ce qu'on peut faire, à l'étape d'après, c'est de se demander, bon, ok, très bien, on a ces interférences mais d'où viennent les électrons ? Est-ce que les électrons sont passés par le trou 1 ? Est-ce que les électrons sont passés par le trou 2 ? C'est une question naturelle et pour faire ça, Richard Feynman, prix Nobel, qui en fait a démocratisé cette expérience de pensée, elle n'est pas de moi, propose la chose suivante : il dit "les électrons, ça réagit à la lumière, donc ce qu'on va juste faire, c'est qu'on va mettre une lampe." Parfois, les choses ont des réponses simples, donc on met une lampe, et cette lampe en gros quand les électrons passent, bingo, s'il est passé par le trou 1, elle va éclairer, il y a un petit spot lumineux, et si c'est le trou 2, ce sera au trou 2, et donc comme ça, on peut enregistrer si les particules passent par le trou 2, paf, paf, trou 1, trou 1, trou 1, trou 2, trou 2, trou 1, etc.

Le problème, c'est que ce qu'on obtient dans ce cas-là, c'est exactement la même courbe que pour le billard, le fait d'avoir éclairé ces électrons, finalement, ça les a complètement changés, maintenant, ils se comportent exactement comme des billes de billard et on obtient la somme.

Alors ça, c'est une chose qu'on connaît bien en physique quantique, c'est le fait que quand on mesure un système, on le modifie, on ne peut pas mesurer un système sans l'impacter.

Mais quel rapport avec l'aléa ? Le rapport avec l'aléa, il vient de là. Imaginez maintenant qu'il y ait un moyen de mesurer si l'électron passe par le trou 1 ou le trou 2 avant qu'il soit passé par le trou, c'est-à-dire imaginez que par exemple on puisse se poser près de l'émetteur ici et à chaque sortie d'électrons, on puisse mesurer des quantités physiques reliées à cet électron et qui nous disent, celui-là, c'est sûr, c'est trou 1, celui-là, c'est trou 2, etc.

Imaginez qu'on puisse faire ça ; c'est facile d'imaginer que dans ce cas-là, en fait, la présence de la source lumineuse pour vous dire si on passe par trou 1 ou trou 2, vous pourriez la mettre ou ne pas la mettre, ça ne changerait rien en fait, parce que vous avez l'information que l'on passe sous le trou. En outre ou du coup, qu'est ce que ça nous dit ? Eh bien ça nous dit que s'il n'y avait pas de source lumineuse, on devrait quand même tomber sur la courbe bleue. D'un certain point de vue, si on est capable de dire avant que l'électron ne passe s'il va passer par le trou 1 ou le trou 2, dans ce cas-là, les fréquences devraient s'additionner, on devrait avoir la somme de la fréquence de ce qui passe par le trou 1 seul et de la fréquence de ce qui passe par le trou 2 seul, donc on ne devrait pas tomber sur des interférences, on devrait tomber sur la somme des fréquences, or on tombe sur des interférences. Qu'est ce que ça nous dit ? Ça nous dit qu'il n'existe pas de façon de mesurer quelque chose sur l'électron, de moyen de prédire s'il va passer par le trou 1 ou par le trou 2 et en particulier par exemple quand on mesure ici s'il passe par le trou 1 ou 2 eh bien, avec cette lumière, en fait ils passent dans un trou ou l'autre de façon complètement aléatoire.

Il n'y a aucun moyen prédictif utilisant la physique qui permette, enfin, la physique quantique en tout cas, qui permette de dire si on passe par le trou 1 ou le trou 2. Ça, c'est un vrai aléa, alors

c'est une expérience de pensée, ce n'est pas si simple à réaliser. En fait, c'est une expérience qui a été introduite à des fins pédagogiques parce que là, je vous ai fait un crash course, très mauvais probablement d'ailleurs, un crash course sur la physique quantique parce qu'on a vu plein de phénomènes de physique quantique bizarres.

L'aléa, ce n'était que la cerise sur le gâteau parce qu'on a vu le fait qu'on impacte un système quand on mesure quelque chose dessus et ce fameux aléa intrinsèque donc vous imaginez que ça, c'est du pain béni pour un pédagogue et en particulier, Richard Feynman était un pédagogue extraordinaire et donc il utilisait beaucoup cette expérience de pensée pour décrire des rudiments de la physique quantique.

Voilà, vous avez pris un cours rapide de physique quantique. Maintenant vous pouvez raconter tout ça le soir dans les bars; donc c'est parfait. Mais ce que je voulais dire, c'est qu'en fait, cette expérience de pensée, elle a été reproduite récemment et en fait, on obtient ce genre d'interférences donc là, ici, c'est ce qu'on obtient avec les électrons quand on a fermé un des trous, ça, quand on a fermé l'autre trou, et ça quand on a ouvert les deux trous et on voit, ou on devine en tout cas, des interférences. De façon plus générale, il y a de nombreuses autres expériences qui confirment l'aléa au niveau quantique.

Et je dirais même qu'il y a des expériences bien meilleures. Ce n'est pas une si bonne expérience que ça mais je pense que ça donne déjà une bonne idée de ce qui se passe; il y a des expériences extraordinaires qui justifient, qui montrent que si on croit à la physique quantique, en tout cas il existe un aléa intrinsèque, un aléa objectif, il ne dépend pas de nous, il est impossible de prédire ce qui se passe.

Alors à ce stade normalement vous devriez ne plus me croire : "non, mais c'est pas possible; forcément, on peut prédire cette existence d'un aléa, c'est pas possible; ce sont ces physiciens, ces mathématiciens, ils sont fous...". Alors je vais vous apprendre quelque chose c'est que vous êtes dans une catégorie de gens qui est pas mal parce que c'est une catégorie de gens qui inclut Einstein. Et c'est toujours bien d'être dans la catégorie qui inclut, enfin presque toujours bien d'être dans la catégorie qui inclut Einstein, c'est à dire que lui-même avait du mal avec cette idée : c'est cette fameuse citation, je pense que lui-même doit regretter de l'avoir dite tellement elle est réutilisée mais "Dieu ne joue pas aux dés". Ce qu'il pensait, c'est que cette interprétation probabiliste de la physique quantique, ce n'est pas qu'elle est fausse mais c'est que ce n'est qu'une étape, c'est en quelque sorte qu'on n'en sait pas assez, et un jour on aura de meilleures théories qui nous expliqueront la physique sans cet aléa. Première chose, il a travaillé pour essayer de montrer aux physiciens de l'époque et à ceux des générations futures qu'effectivement, ce n'était pas une si bonne idée d'introduire de l'aléa et il a en particulier développé des paradoxes et le plus connu, c'est le paradoxe EPR qui montrait que les choses vont mal si on suppose ce type de chose.

Je tiens à vous dire qu'il y a des expériences vraiment superbes, en particulier celles qui utilisent les photons donc c'est ce qu'on a, c'est toute une discipline qu'on appelle l'optique quantique et qui consiste à essayer de prouver l'existence de cet aléa.

Donc Alain Aspect, en premier, en 1983, a montré par exemple que ce grand paradoxe qui avait

été énoncé, en fait, ce n'était pas un paradoxe : pas de souci, il faut juste renoncer à quelque chose qu'on appelle la localité. Ce n'est peut-être pas si simple de renoncer à cette idée mais en tout cas c'est possible, et si on renonce à ça, ce n'est plus un paradoxe.

Je mentionne cette expérience parce que cette expérience a été améliorée à Genève justement, et d'ailleurs nous avons une des personnes qui a participé à cette expérience dans la salle, donc je ne vais pas vous en dire plus parce que sinon je vais dire des choses fausses et quelqu'un va se ruer sur l'estrade pour me plaquer ; donc je ne veux pas prendre ce risque.

Ils sauraient dire des choses bien meilleures que moi, surtout sur ce sujet, mais ces expériences sont merveilleuses parce qu'elles permettent à la fois de contredire enfin de dire que ce paradoxe n'est pas un paradoxe et en fait, elles permettent aussi de montrer beaucoup plus efficacement la présence d'un aléa vraiment fondamental en physique. Donc ce n'est pas juste une vue de l'esprit, ce n'est pas juste une mauvaise explication, c'est en tout cas quelque chose qui est intrinsèque à la physique quantique, je devrais dire pour être plus précis à une interprétation qu'on appelle l'interprétation de Copenhague de la physique quantique. Il y a des gens qui continuent à résister et qui essaient d'avoir des interprétations différentes de la physique quantique, qui ne seraient pas basées sur le hasard mais là et c'est peut-être la punchline de cet exposé, c'est que quand on est scientifique, tout fonctionne de façon axiomatique, je ne prétends pas qu'il n'y a pas une description du monde qui n'est pas basée sur l'aléatoire ; ce que je prétends, c'est qu'avec la physique mécanique et la physique quantique, et moi je crois ces deux choses-là et je crois que je ne suis pas le seul, avec ces deux physiques à notre disposition, c'est normal de penser que l'aléa gouverne le monde quantique, c'est juste normal, c'est ce qui sort de la théorie. Peut-être qu'un jour, on améliorera la théorie, peut-être qu'on la rendra différente et qu'on se rendra compte qu'il n'y a pas d'aléa mais axiomatiquement, si on conditionne par le fait qu'on croit à la physique d'aujourd'hui, le monde est aléatoire, d'accord, en tout cas, c'est ce que je pense.

Alors juste une chose, parce que vous pouvez dire "mais du coup pourquoi les scientifiques passent autant de temps à essayer de prouver qu'il y a de l'aléa dans le monde?". Donc à part le fait que c'est cool quand même, soyons honnête, ça a aussi des applications et en particulier, l'expérience de Genève et les travaux du professeur Gisin permettent en fait de créer de vrais générateurs de nombres aléatoires ou cette fois, on ne crée pas de l'aléa à partir d'un système chaotique d'aucune fonction donnée, on utilise le monde quantique pour créer cet aléa. On sait en tout cas avec les connaissances d'aujourd'hui que ce sera parfaitement aléatoire donc il y a des applications réelles de ces idées qui peuvent peut-être paraître loufoques à première vue, ok, on arrive vers le money time, on est bientôt à la fin, ne vous inquiétez pas.

Doit-on abandonner le principe de causalité déterministe, doit-on oublier complètement que chaque chose, chaque effet a une cause ? Eh bien, ce n'est pas tellement ce que la physique quantique nous dit. La physique quantique nous dit quelque chose d'un peu plus mesuré : elle nous dit qu'il faut oublier l'idée de pouvoir déterminer si un événement a lieu ou pas, de pouvoir déterminer un système quantique, mais elle ne nous dit pas qu'on ne peut pas déterminer les probabilités que les événements aient lieu et finalement si on y réfléchit, c'est déjà très bien, c'est largement suffisant. Donc la physique quantique en fait nous explique comment calculer des lois de probabilité et ces lois de probabilité, par contre, elles ont une causalité ; la physique quantique nous explique

pourquoi c'est cette probabilité et pas une autre. Donc finalement, si on oublie le fait qu'on veut déterminer l'état d'un système, et qu'on veuille seulement déterminer sa probabilité liée à une causalité tout à fait bien définie, et juste parce que bon, je suis un mathématicien, je ne pourrais quand même pas vous faire un exposé sans une seule formule mathématique, il faut quand même que vous reveniez avec des étoiles dans les yeux, donc juste pour vous la mentionner ; il y a une équation, l'équation de Schrödinger, qui vous permet justement de calculer l'évolution des probabilités dans un système quantique qui évolue, c'est une équation, elle n'est pas si compliquée que ça quand on la voit comme ça ; en général, une équation qui a l'air simple, ça veut dire qu'elle est très compliquée ; en fait, donc, elle n'est pas si simple, ne vous inquiétez pas, mais elle n'est pas si compliquée que ça non plus à énoncer. Et donc, elle vous permet de calculer les lois de probabilité.

Donc on résume : il y a toujours un principe de causalité d'un certain point de vue. C'est juste qu'on est maintenant en train d'essayer de déterminer des causes de probabilité et non pas de réalisation d'événements ; quand on voit ça maintenant, il y a une chose qui devient naturelle, c'est que ce que je raconte là, ça semble mettre un nouveau joueur au milieu de la partie, ce sont les probabilités ; ça devient crucial de comprendre ce que c'est que la probabilité de quelque chose, je vois les élèves de maths qui sont là, il est en train de faire de la pub pour son cours, parce que bien entendu, du coup, quand on a un nouvel objet qu'on veut étudier, il faut le comprendre lui-même et donc il y a une théorie qui s'attache à comprendre ce que c'est que les probabilités, comment on les manipule, comment on les additionne, comment les contrôler, et c'est la théorie des probabilités et c'est en particulier la théorie dont je suis spécialiste, hop la ! On va faire juste un exemple pour finalement peut-être boucler la boucle et après, j'aurai un dernier slide pour juste ouvrir un petit peu.

On a parlé de hasard apparent, enfin de hasard objectif, de hasard subjectif. En quelque sorte, le hasard à petite échelle est objectif ; le hasard subjectif, c'est le hasard à grande échelle parce que c'est juste notre incapacité à comprendre les choses, d'accord, mais du coup, parfois des systèmes sont effectivement trop compliqués pour qu'on puisse vraiment comprendre la physique déterministe de ces systèmes donc qu'est-ce qu'on peut faire au lieu de se dire "eh bien, ce n'est que de l'aléatoire subjectif", on peut embrasser ce problème et se dire "modélisons ça par les probabilités". C'est juste de l'aléa subjectif, c'est pas grave, on va calculer les probabilités quand même et ça va nous permettre de comprendre un peu mieux ce qui se passe. Et c'est exactement ce qu'on fait quand on étudie des systèmes dépendant de trop de paramètres.

Par exemple, imaginez le comportement d'un atome dans un gaz, d'une molécule dans un gaz, elle heurte toutes les autres molécules qui rebondissent, etc. : c'est comme un billard avec des milliards de milliards de milliards de milliards de boules, donc ça semble là pour peu complètement échapper à notre compréhension on va dire personnelle. Eh bien là, on modélise par de l'aléatoire, c'est de l'aléatoire peut-être d'un troisième type, un aléatoire artificiel. Peut-être que le mathématicien, le physicien modélisent ça par les probabilités et là, on arrive à décrire ce qui se passe très très bien ; on génère donc cet aléa subjectif, c'est pas *faux*, il n'y a pas de connotation péjorative, c'est un aléa très utile au contraire, il faut l'étudier et le comprendre.

Je finis juste avec une chose, c'est que l'aléatoire, il y a des lois qui le régissent ; ça, c'est quelque chose qu'il est hyper-important de comprendre et je veux vous en mentionner une parce que c'est une loi qui en ce moment en plus a une certaine importance. Cette loi, elle est due à Jacques Ber-

noulli. Jacques était un membre d'une famille de scientifiques suisses absolument extraordinaires, ils sont tous hyper-connus, et ce théorème dit la chose suivante, c'est même un théorème mathématique : il dit que si je répète une expérience, $n = 10\ 000$, on sait que je compte le nombre de fois où l'événement A a lieu, le résultat, c'est alors $\frac{1}{n}$; ce sera très très proche de la probabilité que l'événement advienne, que le résultat soit A d'accord. Je vous donne deux exemples parce que les exemples, c'est toujours mieux que les théorèmes. Enfin, je ne suis pas d'accord mais on m'a dit de dire ça. Donc, premier exemple, si la probabilité qu'une pièce tombe sur pile est $\frac{1}{2}$, alors si on lance une pièce de monnaie dix mille fois, il y aura, avec une très grande probabilité, à peu près la moitié des lancers qui tomberont sur pile ; c'est une chose intuitivement complètement évidente, on aura environ 5000 lancers qui tomberont sur pile et environ 5000 lancers qui tomberont sur face. Même chose si je prends un dé à 6 faces, je le lance un grand nombre de fois, il y aura peu près un tiers des lancers qui tomberont sur 1 ou 2 parce que la probabilité qu'un dé à 6 faces tombe sur 1 ou 2, c'est un tiers. Jusque-là, je pense que je n'ai pas révolutionné la science, je pense que je ne vous ai même peut-être rien appris. Mais je voulais juste montrer cette petite vidéo parce qu'elle m'a fait marrer, j'avoue, alors c'est quoi ? Qu'est ce qui se passe ? C'est un toss et là, paf, ça tombe sur la tranche. Donc déjà, voilà, je voulais vous apprendre qu'un lancer de pièce de monnaie, c'est pas toujours pile ou face, ça peut être la tranche, faut pas avoir de chance mais ça arrive, voilà !

Ce n'est pas très grave parce qu'heureusement, la chance que ça arrive une deuxième fois juste après est vraiment toute petite, donc vous allez finalement arriver à vous en sortir. Mais qu'est ce que cette vidéo dit. Et c'est sur ça que je voulais finir, c'est un peu la morale de ces deux derniers slides : c'est que quand on voit des événements qui ont lieu, on a tendance à penser qu'ils ont une probabilité beaucoup plus grande qu'elle ne l'est réellement. Pourquoi ? Parce qu'on oublie totalement le fait qu'il y a beaucoup d'expériences qui sont réalisées. Pour le lancer de pièce, c'est bien sûr une très petite probabilité que la pièce tombe sur la tranche, je pense que si on regarde dans la salle, personne n'a jamais lancé une pièce qui est tombée sur la tranche mais vous imaginez le nombre de personnes qui font des toss, surtout maintenant, on voit des matchs de foot partout, donc rien que sur les matchs de foot, il y a déjà un nombre de lancers incroyable et donc de temps en temps, ça arrive parce que le nombre de fois où ça arrive, c'est à peu près n fois la probabilité donc si n est très très grand, s'il y a énormément de lancer de pièce, même avec un événement de toute petite probabilité, ça finit par avoir lieu et là, vous me voyez peut-être venir, parce qu'en ce moment, c'est un problème justement ces biais cognitifs. Je pense que les médecins dans la salle confirmeront : il y a très peu de chances d'avoir un effet secondaire compliqué et dangereux d'un vaccin mais le problème, c'est qu'aujourd'hui, on est en train de vacciner, enfin, c'est pas le problème d'ailleurs, c'est plutôt très bien, on est en train de vacciner l'ensemble des terriens et il y a à peu près 5 milliards, 6 milliards, donc 5 milliards quand je suis né, 7 milliards quand certains d'entre vous sont nés trois milliards quand d'autres sont nés, mais beaucoup de personnes se font vacciner et donc même ces effets qui ont une très petite chance d'arriver, finalement, on les voit à la télé et notre cerveau qui est un très mauvais calculateur de risque pense finalement que la probabilité a l'air beaucoup plus grande qu'elle ne l'est. Mais nous, quand on se fait vacciner, ce n'est qu'une expérience parmi toutes ces expériences et donc nous-même, on a très très peu de chances d'avoir un effet secondaire grave. Heureusement ! Mais voilà, c'était pour vous dire cette loi des grands nombres, en fait, elle vient de notre esprit, et en fait, elle permet de rectifier un biais cognitif naturel. Et en fait, les probabilités en général, c'est ça.

Je vous donne un dernier truc : j'avais parlé d'interro mais il va y en avoir une quand même ; vous prenez 23 élèves dans une classe ; quelle est la probabilité que deux d'entre eux aient la même date d'anniversaire, c'est un qcm, je vous aide : est-ce que c'est 5% ? Est ce que ces 15% ? Ou est-ce que c'est 50% ? Attendez, attendez, il faut laisser le temps à tout le monde, il y a toujours les élèves qui veulent parler en premier, on va répondre, mais après, on va faire une pool, ce serait très bien.

Je vous remercie de votre attention avant de vous donner la réponse, je voulais juste vous remercier de m'avoir écouté et pour vous remercier de m'avoir écouté, je voulais vous montrer quelque chose. "Qu'est-ce que c'est que cette vidéo ?", vous pouvez peut-être vous dire. Mais en fait, bon votre aléa, envoyer des électrons un par un et ceux qui passent par le trou 1, par le trou 2, ça ne se voit pas ça, moi, je ne vais jamais voir ça dans la vie de tous les jours. Donc finalement, tout ce que je vois, ce n'est jamais aléatoire. Eh bien là, cette vidéo, c'est du vrai aléatoire, qu'est-ce que c'est que cette vidéo ? C'est de l'uranium fin, de l'uranite donc, c'est un minéral d'uranium, donc c'est radioactif, et comme c'est radioactif, ça émet des particules chargées quand ça décroît et ces particules, la physique quantique nous dit que les directions dans lesquelles les particules partent sont uniformément réparties. Ça part dans n'importe quelle direction mais ce qui se passe là, c'est qu'il y a un gaz autour de cette uranite et quand les particules chargées passent, elle excite les ions dans ce gaz et elles laissent une traînée, un peu comme dans la vidéo que j'ai montrée, quand la lumière éclaire l'électron et qu'elle vous dit, il passe par tel trou. En fait, ce gaz il vous montre exactement la direction que prennent les particules chargées et cette direction est totalement aléatoire. Ça, c'est du vrai aléa.

Donc ça, c'était pour finir sur un petit peu de poésie, voilà, c'est très joli je trouve, c'est assez hypnotique, voilà, pour dormir le soir, et maintenant on va finir avec l'interro. Qui pense que c'est 5%, waouh, d'accord, j'ai peut-être pas donné le bon exposé si tout le monde... 15% ? Ah quand même, quelques personnes, vous êtes obligés de répondre, on va pas rejouer le jeu de l'école primaire là où personne ne répond au truc. 50% ? Bon ben, il y a beaucoup de gens qui ont un bon mécanisme, c'est 50%, et la loi des grands nombres vous dit du coup que par exemple, à Genève, à peu près dans la moitié des classes, il y a deux élèves qui ont le même âge, enfin qui sont vraiment du même jour, c'est ça que je voulais dire, bien entendu, qui ont même date d'anniversaire.

Voilà et sur ces belles paroles, je vous remercie beaucoup pour votre attention.

[Applaudissements.]