Remarques sur le "Théorème de Goldbach".

de G. H. Hardy et J. E. Littlewood

New College, Oxford Trinity College, Cambridge

4.1. Notre méthode échoue quand $r = 2$[1]. Elle n'échoue pas *en principe*, car elle amène à un résultat précis qui semble être correct ; mais nous ne pouvons surmonter les difficultés de la preuve, même si nous supposons que $\theta = \frac{1}{2}$. La meilleure limite supérieure que nous pouvons déterminer pour l'erreur est trop large d'(environ) une puissance $n^{\frac{1}{4}}$[2].

La formule à laquelle notre méthode nous amène est contenue dans la

Conjecture A. *Tout nombre suffisamment grand est la somme de deux nombres premiers impairs. La formule asymptotique pour le nombre de décompositions est*

$$N_2(n) \sim 2\,C_2 \frac{n}{(\log\ n)^2} \prod_{\mathfrak{p}} \left(\frac{\mathfrak{p}-1}{\mathfrak{p}-2}\right) \tag{4.11}$$

où $\mathfrak{p}$ *est un nombre premier impair divisant* n *et*

$$C_2 = \prod_{\varpi=3}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{(\varpi-1)^2}\right). \tag{4.12}$$

Nous ajoutons quelques mots concernant l'histoire de cette formule, et l'évidence empirique de sa vérité[3] .

La première formulation précise d'un résultat de ce genre semble être due à Sylvester[4], qui, dans un court résumé publié dans les *Proceedings of London Mathematical Society* en 1871, a suggéré que

$$N_2(n) \sim \frac{2n}{\log n} \prod \left(\frac{\varpi-2}{\varpi-1}\right), \tag{4.13}$$

Traduction d'un extrait de l'article *Some problems of "partitio numerorum" ; III : On the expression of a number as a sum of primes*, Acta Mathematica 44, 1923 (imprimé le 16 février 1922), 1-70.

[1]Cette note étant seulement la transcription d'un extrait de l'article de Hardy et Littlewood, il convient de préciser les notations utilisées par les auteurs, qui sont fournies dans les pages précédant la page 32 et non transcrites ici : ϖ est un nombre premier, $\mathfrak{p}$ est un nombre premier divisant n, $\Lambda(n) = \log \varpi$ si $n = \varpi^m$ et 0 sinon. $N_r(n)$ est le nombre de décompositions de n en une somme de r nombres premiers, en faisant attention à l'ordre dans lequel ils apparaissent et en autorisant des répétitions d'un même nombre premier. $v_r(n)$ désigne la somme $\displaystyle\sum_{\varpi_1+\varpi_2+\ldots+\varpi_r=n} \log \varpi_1\ \log \varpi_2 \ldots \log \varpi_r$ de telle façon que $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} v_r(n)x^n = (f(x))^r$ en appelant $f(x)$ la fonction essentielle de l'article définie par $f(x) = \displaystyle\sum_{\varpi} \log \varpi x^{\varpi}$.

[2]Le paramètre θ est à trouver dans l'article complet en page 4, dans l'hypothèse R, qui stipule "il existe un nombre $\theta < \frac{3}{4}$ tel que $\beta \leq \theta$ pour tout ρ de toute $L(s)$.", ρ dénotant un zéro de $L(s)$ et β désignant la partie réelle de ρ. Tous les résultats de l'article dépendent de cette hypothèse R.

[3]Concernant l'histoire la plus ancienne du "théorème de Goldbach", voir L. E. Dickson, *History of the Theory of Numbers*, vol. I (Washington 1919), p. 421-425.

[4]J. J. Sylvester, "On the partition of an even number into two primes, *Proc. Lond. Math. Soc.* ser. I, vol. 4 (1871), p.4-6 (*Math. Papers*, vol. 2, p. 709-711). Voir aussi "On the Goldbach-Euler Theorem regarding prime numbers", Nature, vol. 55, (1896-7), p. 196-197, 269 (*Math. Papers*, vol. 4, p. 734-737).
Nous devons notre connaissance des notes de Sylvester sur le sujet à M. B. M. Wilson du Trinity College, Cambridge. Voir, en connexion avec tout ce qui suit Shah and Wilson, 1, et Hardy et Littlewood, 2.

avec

$$3 \leq \varpi < \sqrt{n}, \qquad \varpi \not| \, n.$$

Puisque

$$\prod_{\varpi<\sqrt{n}} \left(\frac{\varpi-2}{\varpi-1}\right) = \prod_{\varpi<\sqrt{n}} \left(1-\frac{1}{(\varpi-1)^2}\right) \prod_{\varpi<\sqrt{n}} \left(1-\frac{1}{\varpi}\right) \sim C_2 \prod_{\varpi<\sqrt{n}} \left(1-\frac{1}{\varpi}\right),$$

et[5]

$$\prod_{\varpi<\sqrt{n}} \left(1-\frac{1}{\varpi}\right) \sim \frac{2\,e^{-C}}{\log n}, \tag{4.14}$$

où C est la constante d'Euler, (4.13) est équivalente à

$$N_2(n) \sim 4\,e^{-C}\, C_2 \frac{n}{(\log\ n)^2} \prod_{\mathfrak{p}} \left(\frac{\mathfrak{p}-1}{\mathfrak{p}-2}\right), \tag{4.15}$$

et contredit (4.11), les deux formules différant d'un facteur $2e^{-C} = 1.123...$. Nous prouvons en 4.2 que (4.11) est la seule formule de cette sorte qui peut être correcte, de telle façon que la formule de Sylvester est erronée. Mais Sylvester a été le premier à identifier le facteur

$$\prod \left(\frac{\mathfrak{p}-1}{\mathfrak{p}-2}\right) \tag{4.16}$$

auquel les *irrégularités* de $N_2(n)$ sont dues. Il n'y a pas d'évidence claire de la manière dont il a été amené à ce résultat.

Une formule un peu différente a été suggérée par Stäckel[6] en 1896, i.e.

$$N_2(n) \sim \frac{n}{(\log\ n)^2} \prod \left(\frac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{p}-1}\right).$$

Cette formule n'introduit pas le facteur (4.16), et ne donne pas de bonne approximation des faits ; elle a de toute façon été démontrée comme étant incorrecte par Landau[7] en 1900.

En 1915 est apparu un essai incomplet sur le théorème de Goldbach par Merlin[8]. Merlin ne donne pas une formule asymptotique complète mais il reconnaît (comme Sylvester avant lui) l'importance du facteur (4.16).

À peu près à la même époque, le problème a été attaqué par Brun[9]. La formule à laquelle l'argument de Brun conduit naturellement est

$$N_2(n) \sim 2H\, n \prod_{\mathfrak{p}} \left(\frac{\mathfrak{p}-1}{\mathfrak{p}-2}\right) \tag{4.17}$$

[5]Landau, p. 218.

[6]P. Stäckel, "Über Goldbach's empirisches Theorem : Jede grade Zahl kann als Summe von zwei Primzahlen dargestellt werden", *Göttinger Nachrichten*, 1896, p. 292-299.

[7]E. Landau, "Über die zahlentheoritsche Funktion $\varphi(n)$ und ihre Beziehung zum Goldbachschen Satz", *Göttinger Nachrichten*, 1900, p. 177-186.

[8]J. Merlin, "Un travail sur les nombres premiers", *Bulletin des sciences mathématiques*, vol. 39, 1915, p. 121-136.

[9]V. Brun, "Über das Goldbachsche Gesetz und die Anzahl der Primzahlpaare", *Archiv for Mathematik* (Christiania), vol. 34, part 2, 1915, no. 8, p. 1-15. La formule (4.18) n'est pas vraiment formulée par Brun : voir la discussion par Shah et Wilson, 1, et Hardy et Littlewood, 2. Voir aussi un second article du même auteur, "Sur les nombres premiers de la forme ap+b", ibid., part. 4, 1917„ n° 14, p. 1-9 ; et le postscriptum à ce mémoire.

où

$$H = \prod_{3 \leq \varpi < \sqrt{n}} \left(1 - \frac{2}{\varpi}\right). \tag{4.171}$$

On montre facilement que cela est équivalent à

$$N_2(n) \sim 8e^{-2\gamma} C_2 \frac{n}{(\log\ n)^2} \prod_{\mathfrak{p}} \left(\frac{\mathfrak{p}-1}{\mathfrak{p}-2}\right), \tag{4.18}$$

et diffère de (4.11) par un facteur $4e^{-2C} = 1.263....$ L'argument de 4.2 montrera que cette formule, comme celle de SYLVESTER, est incorrecte.

Finalement, en 1916, STÄCKEL[10] est revenu sur ce sujet dans une série de mémoires publiés dans le *Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften*, que nous n'avons pas pu consulter jusqu'à une date très récente. Des remarques plus approfondies concernant ces mémoires seront trouvées dans notre postscriptum final.

4.2. Procédons à la justification de notre assertion que les formules (4.15) et (4.18) ne peuvent pas être correctes.

Théorème F. *Supposons qu'il soit vrai que*[11]

$$N_2(n) \sim A \frac{n}{(\log n)^2} \prod_{\mathfrak{p}} \left(\frac{\mathfrak{p}-1}{\mathfrak{p}-2}\right) \tag{4.21}$$

si

$$n = 2^{\alpha} \mathfrak{p}^{a} \mathfrak{p}'^{a'} \dots \qquad (\alpha > 0, a, a', \dots > 0),$$

et

$$N_2(n) = o\left(\frac{n}{(\log n)^2}\right) \tag{4.22}$$

si n est impair. Alors

$$A = 2C_2 = \prod_{\varpi=3}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{(\varpi-1)^2}\right). \tag{4.23}$$

Écrivons

$$\Omega(n) = A\, n \prod_{\mathfrak{p}} \left(\frac{\mathfrak{p}-1}{\mathfrak{p}-2}\right) \ \ (n \textit{ pair}), \ \ \Omega(n) = 0 \ (n \textit{ impair}). \tag{4.24}$$

Alors, par (4.21) et par le théorème C, maintenant valide en vertu de (4.21),

$$v_2(n) = \sum_{\varpi + \varpi' = n} \log \varpi \log \varpi' \sim \Omega(n), \tag{4.25}$$

en comprenant que, lorsque n est impair, cette formule signifie

$$v_2(n) = o(n).$$

[10] P. STÄCKEL, "Die Darstellung der geraden Zahlen als Summen von zwei Primzahlen", 8 august 1916 ; "Die Lückenzahlen r-ter Stufe und die Darstellung der geraden Zahlen als Summen und Differenzen ungerader Primzahlen", I. Teil 27 décembre 1917, II Teil 19 janvier 1918, III Teil 19 juillet 1918.

[11] Durant tout 4.2, A est *la même* constante.

De plus, appelons

$$f(s) = \sum \frac{\Omega(n)}{n^s} = \sum \frac{\Omega(n)}{n^{1+u}},$$

cette série étant absolument convergente si $\mathfrak{R}(s) > 2, \mathfrak{R}(u) > 1$. Alors

$$\begin{aligned} f(s) &= A \sum_{n \equiv 0 \pmod 2} n^{-u} \prod_{\mathfrak{p}} \left(\frac{\mathfrak{p}-1}{\mathfrak{p}-2} \right) \\ &= A \sum_{a>0} 2^{-au} \mathfrak{p}^{-au} \mathfrak{p}'^{-a'u} \ldots \frac{(\mathfrak{p}-1)(\mathfrak{p}'-1)\ldots}{(\mathfrak{p}-2)(\mathfrak{p}'-2)\ldots} \\ &= \frac{2^{-u} A}{1-2^{-u}} \prod_{\varpi=3}^{\infty} \left(1 + \frac{\varpi-1}{\varpi-2} \frac{\varpi^{-u}}{1-\varpi^{-u}} \right) = \frac{2^{-u} A}{1-2^{-u}} \xi(u), \end{aligned} \tag{4.26}$$

disons. Supposons maintenant que $u \to 1$, et posons

$$\eta(u) = \prod_{\varpi=3}^{\infty} \left(1 + \frac{\varpi^{-u}}{1-\varpi^{-u}} \right) = \prod_{\varpi=3}^{\infty} \left(\frac{1}{1-\varpi^{-u}} \right) = (1-2^{-u}) \zeta(u).$$

Alors

$$\frac{\xi(u)}{\eta(u)} = \prod \left(\left(1 + \frac{\varpi-1}{\varpi-2} \frac{\varpi^{-u}}{1-\varpi^{-u}} \right) \Big/ \left(1 + \frac{\varpi^{-u}}{1-\varpi^{-u}} \right) \right)$$

$$\to \prod \left(\left(1 + \frac{1}{\varpi-2} \right) \Big/ \left(1 + \frac{1}{\varpi-1} \right) \right) = \prod \left(\frac{(\varpi-1)^2}{\varpi(\varpi-2)} \right)$$

$$= \prod \left(\frac{(\varpi-1)^2}{(\varpi-1)^2-1} \right) = \frac{1}{C_2}$$

Par conséquent,

$$f(s) \sim A\xi(u) \sim \frac{A}{C_2} \eta(u) \sim \frac{A}{2C_2} \zeta(u) \sim \frac{A}{2C_2(u-1)} = \frac{A}{2C_2(s-2)}. \tag{4.27}$$

D'un autre côté, lorsque $x \to 1$,

$$\sum v_2(n) x^n \sim \left(\sum \log \varpi x^{\varpi} \right)^2 \sim \frac{1}{(1-x)^2},$$

et ainsi [12]

$$v_2(1) + v_2(2) + \ldots + v_2(n) \sim \frac{1}{2} n^2. \tag{4.28}$$

Il s'en déduit élémentairement que

$$g(s) = \sum \frac{v_2(n)}{n^s} \sim \sum \frac{1}{n^{s-1}} \sim \frac{1}{s-2}$$

lorsque $s \to 2$; et par conséquent[13] que (sous les hypothèses (4.21) et (4.22))

$$f(s) \sim \frac{1}{s-2}. \tag{4.29}$$

[12] Nous utilisons ici le Théorème 8 de notre article "Théorèmes Taubériens concernant les séries de puissances et les séries de Dirichlet dont les coefficients sont positifs", *Proc. London Math. Soc.*, sér. 2, vol. 13, p. 174-192. C'est la preuve la plus rapide, mais en aucun cas la plus élémentaire. La formule (4.28) est équivalente à la formule

$$\sum_{1}^{n} N_2(m) \sim \frac{n^2}{2(\log n)^2}$$

utilisée par Landau dans sa note citée p. 33.

[13] Pour les théorèmes généraux incluant ceux utilisés ici comme des cas très particuliers, voir K. Knopp, "Divergenscharactere gewisser Dirichlet'scher Reihen", *Acta Mathematica*, vol. 34, 1909, p. 165-204 (*e.g.* Satz III, p. 176).

En comparant (4.27) et (4.29), nous obtenons le théorème comme résultat.

4.3. Le fait que les formules de Sylvester et de Brun contiennent toutes deux un facteur erroné, et que ce facteur dans les deux cas soit une simple fonction du nombre e^{-C}, n'est pas si remarquable que cela pourrait le sembler.

En premier lieu, nous observons que toute formule dans la théorie des nombres premiers, *déduite de considérations de probabilités,* est susceptible d'être erronée de cette même manière. Considérons, par exemple, le problème *"Quelle est la probabilité qu'un grand nombre soit premier ?"*. Nous savons que la réponse à cette question est que cette probabilité est approximativement $\dfrac{1}{\log n}$.

Maintenant, la probabilité que n ne soit pas divisible par n'importe quel nombre premier inférieur à un nombre fixé x est asymptotiquement équivalente à

$$\prod_{\varpi<x}\left(1-\frac{1}{\varpi}\right);$$

et il serait naturel d'inférer[14] que la probabilité requise est asymptotiquement équivalente à

$$\prod_{\varpi<\sqrt{n}}\left(1-\frac{1}{\varpi}\right)$$

Mais[15]

$$\prod_{\varpi>\sqrt{n}}\left(1-\frac{1}{\varpi}\right)\sim\frac{2e^{-C}}{\log n};$$

et notre inférence est incorrecte, selon un facteur de $2e^{-C}$[16].

Il est vrai que l'argument de Brun n'est pas énoncé en termes de probabilités[17], mais il entraîne un passage heuristique à la limite exactement du même genre que l'argument que nous venons de citer. Brun a d'abord trouvé (par une utilisation ingénieuse du "crible d'Eratosthène") une formule asymptotique du nombre de représentations de n comme somme de deux nombres, *ni l'un ni l'autre divisible par n'importe quel nombre fixé de nombres premiers.* Cette formule est correcte et la preuve est valide. Il en est de même de la première étape de l'argument ci-dessus ; elle s'appuie sur une énumération de cas, et toute référence aux "probabilités"[18] est facilement éliminée. C'est dans le passage à la limite que l'erreur est introduite, et la nature de l'erreur est la même dans un cas et dans l'autre.

4.4. Shah et Wilson ont testé la conjecture A extensivement par comparaison avec les données empiriques collectées par Cantor, Aubry, Haussner, et Ripert. Nous réimprimons leur table de résultats ; mais quelques remarques préliminaires sont nécessaires. En premier lieu, il est essentiel, lors d'un test numérique, de travailler avec une formule pour $N_2(n)$, comme celle de (4.11), et non avec une formule pour $v_2(n)$, comme celle de (4.25). Dans notre analyse, d'un autre côté, c'est $v_2(n)$ qui se présente en premier, et la formule pour $N_2(n)$ est secondaire. Pour dériver la formule asymptotique pour $N_2(n)$, nous écrivons

$$v_2(n)=\sum_{\varpi+\varpi'=n}\log\varpi\log\varpi'\sim(\log n)^2N_2(n).$$

[14]On peut aussi bien remplacer $\varpi<\sqrt{n}$ par $\varpi<n$, auquel cas nous obtiendrions une probabilité moitié moins grande. Cette remarque est en elle-même suffisante pour montrer le caractère insatisfaisant de cet argument.

[15]Landau, p. 218.

[16]ndd : noter le changement de signe entre les produits dans l'article original.

[17]Nous n'avons pas de moyen direct de juger si l'argument de Sylvester est valide ou pas.

[18]*La probabilité* n'est pas une notion de mathématique pure, mais une notion de philosophie ou de physique.

Le facteur $(\log n)^2$ est certainement erroné selon un ordre de grandeur de $\log n$, et il est plus naturel [19] de remplacer $v_2(n)$ par

$$((\log n)^2 - 2\log n + \dots)\ N_2(n).$$

Pour la formule *asymptotique*, naturellement, la substitution que nous adoptons est indifférente. Mais, dans un but de *vérification dans la limite des calculs*, elle n'est en aucun cas indifférente, car le terme en log n n'est en aucun cas d'une importance négligeable ; et l'on trouvera que cela fait une différence vitale dans la plausibilité des résultats. Gardant ces considérations à l'esprit, Shah et Wilson ont travaillé non avec la formule (4.11), mais avec la formule modifiée

$$N_2(n) \sim \rho(n) = 2\ C_2 \frac{n}{(\log n)^2 - 2\log n} \prod_{\mathfrak{p}} \left(\frac{\mathfrak{p}-1}{\mathfrak{p}-2}\right).$$

Le défaut de tenir compte de ce genre de choses a été responsable d'un certain nombre d'incompréhensions par le passé. Ainsi (comme cela est souligné par Shah et Wilson[20]), la formule erronée de Sylvester donne, pour les valeurs de n dans les limites de la Table I, des résultats décidément *meilleurs* que ceux obtenus par la formule (4.11) *inmodifiée.*

Il y a un autre point de moindre importance. La fonction qui se présente le plus naturellement dans notre analyse n'est pas

$$f(x) = \sum \log \varpi x^{\varpi}$$

mais

$$g(x) = \sum \Lambda(n) x^n = \sum_{\varpi, l} \log \varpi x^{\varpi^l}.$$

Les fonctions numériques correspondantes ne sont pas $v_2(n)$ et $N_2(n)$, mais

$$g_2(n) = \sum_{m+m'=n} \Lambda(m)\Lambda(m'), \quad Q_2(n) = \sum_{\varpi^l + \varpi^{l'} = n} 1$$

(de telle façon que $Q_2(n)$ est le nombre de décompositions de n *en deux nombres premiers ou en deux puissances de nombres premiers).* Ici à nouveau, $N_2(n)$ et $Q_2(n)$ sont asymptotiquement équivalentes ; la différence entre elles est en effet d'un ordre moindre que les erreurs que nous négligeons dans tous les cas ; mais on doit dire quelque chose pour prendre cette dernière comme base de comparaison, quand (ce qui est inévitable), les valeurs de n ne sont pas très grandes.

Dans la table, les décompositions en nombres premiers, et puissances de nombres premiers sont prises en compte séparément ; mais c'est le total qui est comparé à $\rho(n)$. La valeur de la constante $2C_2$ est 1.3203. On verra que la comparaison entre les valeurs calculées et les valeurs effectives est excellente.

[19] Comparer Shah et Wilson, *l. c.*, p. 238. On peut arriver à la même conclusion par différents chemins.
[20] *l. c.*, p. 242.

Table I.

n	$Q_2(n)$	$\rho(n)$	$Q_2(n)/\rho(n)$
$30 = 2.3.5$	$6 + 4 = 10$	22	0.45
$32 = 2^5$	$4 + 7 = 11$	8	1.38
$34 = 2.17$	$7 + 6 = 13$	9	1.44
$36 = 2^2.3^2$	$8 + 8 = 16$	17	0.94
$210 = 2.3.5.7$	$42 + 0 = 42$	49	0.85
$214 = 2.107$	$17 + 0 = 17$	16	1.07
$216 = 2^3.3^3$	$28 + 0 = 28$	32	0.88
$256 = 2^8$	$16 + 3 = 19$	17	1.10
$2\ 048 = 2^{11}$	$50 + 17 = 67$	63	1.06
$2\ 250 = 2.3^2.5^3$	$174 + 26 = 200$	179	1.11
$2\ 304 = 2^8.3^2$	$134 + 8 = 142$	136	1.04
$2\ 306 = 2.1153$	$67 + 20 = 87$	69	1.26
$2\ 310 = 2.3.5.7.11$	$228 + 16 = 244$	244	1.00
$3\ 888 = 2^4.3^5$	$186 + 24 = 210$	197	1.06
$3\ 898 = 2.1949$	$99 + 6 = 105$	99	1.06
$3\ 990 = 2.3.5.7.19$	$328 + 20 = 348$	342	1.02
$4\ 096 = 2^{12}$	$104 + 5 = 109$	102	1.06
$4\ 996 = 2^2.1249$	$124 + 16 = 140$	119	1.18
$4\ 998 = 2.3.7^2.17$	$228 + 20 = 308$	305	1.01
$5\ 000 = 2^3.5^4$	$150 + 26 = 176$	157	1.12
$8\ 190 = 2.3^2.5.7.13$	$578 + 26 = 604$	597	1.01
$8\ 192 = 2^{13}$	$150 + 32 = 182$	171	1.06
$8\ 194 = 2.17.241$	$192 + 10 = 202$	219	0.92
$10\ 008 = 2^3.3^2.139$	$388 + 30 = 418$	396	1.06
$10\ 010 = 2.5.7.11.13$	$384 + 36 = 420$	384	1.09
$10\ 014 = 2.3.1669$	$408 + 8 = 416$	396	1.05
$30\ 030 = 2.3.5.7.11.13$	$1\ 800 + 54 = 1\ 854$	1 795	1.03
$36\ 960 = 2^5.3.5.7.11$	$1\ 956 + 38 = 1\ 994$	1 937	1.03
$39\ 270 = 2.3.5.7.11.17$	$2\ 152 + 36 = 2\ 188$	2 213	0.99
$41\ 580 = 2^2.3^3.5.7.11$	$2\ 140 + 44 = 2\ 184$	2 125	1.03
$50\ 026 = 2.25013$	$702 + 8 = 710$	692	1.03
$50\ 144 = 2^5.1567$	$607 + 32 = 706$	694	1.02
$170\ 166 = 2.3.79.359$	$3\ 734 + 46 = 3\ 780$	3 762	1.00
$170\ 170 = 2.5.7.11.13.17$	$3\ 784 + 8 = 3\ 792$	3 841	0.99
$170\ 172 = 2^2.3^2.29.163$	$3\ 732 + 48 = 3\ 780$	3 866	0.98