Les frissons de l'abstraction
Paul R. Halmos

Ma femme et moi avons récemment été invités à une fête, à laquelle ont assisté quatre autres couples, soit un total de dix personnes. Certains de ces dix connaissaient certains des autres, et pour certains, ce n'était pas le cas, certains ont été polis et d'autres non. En conséquence, un certain nombre de poignées de mains ont été échangées de manière imprévisible, sous réserve seulement de deux conditions évidentes : personne ne s'est serré la main et aucun mari n'a secoué la main de sa femme. Quand tout était fini, je suis devenu curieux et j'ai fait le tour de la fête demandant à chaque personne : "Combien de mains avez-vous serrées ?...". "Et vous ?...". "Et vous ?". "Quelles réponses aurais-je pu recevoir ?" Peut-être que certaines personnes auraient pu dire "Aucune", et d'autres auraient pu me donner n'importe quel nombre entre 1 et 8 inclus... C'est vrai, non ? Étant donné que les "auto"-poignées de main et les poignées de main du conjoint étaient exclues, 8 est le nombre maximum de mains que n'importe qui parmi les 10 a pu secouer.

J'ai demandé à neuf personnes (tout le monde, y compris ma propre femme), et chaque réponse a été l'un des neuf chiffres de 0 à 8 inclus. Ça m'intéressait de noter les réponses, et je déclare par la présente que les neuf personnes différentes m'ont donné neuf réponses différentes ; l'un(e) a dit 0, quelqu'un a dit 1, et ainsi de suite, et, enfin, quelqu'un a dit 8. Quand ça a été fini, ma curiosité était satisfaite : je connaissais toutes les réponses. Le lendemain matin, j'ai raconté l'histoire à mes collègues de bureau, exactement comme je l'ai racontée maintenant, et je les ai défiés de me dire, sur la base des informations juste fournies, de me dire combien de mains ma femme avait serrées.

Je mentionne ce problème non pas parce que c'est ce que je veux principalement dire (mais je chuchote entre parenthèses que c'est un problème légitime et de bonne foi, et que mes collègues auraient pu le résoudre), mais parce qu'il illustre, en quelque sorte, l'un des principes mathématiques de base dont je veux discuter. Voici une autre question, qui mène à un autre principe mathématique de base : existe-t-il un nombre qui a la propriété que quand on le multiplie par lui-même cinq fois, le résultat est le même que si on lui ajoute 2 ? Quiconque n'a pas réussi à rester complètement innocent par rapport à l'algèbre du lycée reconnaîtra la question comme une manière non symbolique de demander si l'équation $x^5 = x + 2$ a des solutions.

Nombres, phonèmes et espèces

Voici encore une question : qu'y a-t-il de commun entre le concept biologique d'espèce, le concept linguistique de phonème, et le concept mathématique de nombre ?

Je vais passer aux questions dans l'ordre inverse, mais avant de faire cela, j'aimerais décrire le leitmotiv de toute la discussion.

Qu'est-ce qu'un trou noir ? Je ne sais pas, mais j'en ai une vague idée de temps en temps lorsque je lis un article informel dans un journal ou un magazine. Cela semble être quelque chose de très très lourd - si lourd que toute chose qui entre un jour dans son domaine d'attraction gravitationnelle ne peut alors plus jamais lui échapper, pas même la lumière, et, par conséquent, c'est quelque chose que nous ne pouvons jamais percevoir avec aucun de nos sens - quelque chose que nous ne pouvons jamais voir, entendre, sentir, goûter ou sentir. Un trou noir a une influence mesurable sur une partie du monde que nous pouvons percevoir, mais il est lui-même une abstraction. Ce que j'ai dit est probablement faux, mais je pense que même ma notion vague et erronée d'un trou noir mérite d'être connue - quand je l'ai appris, mon âme a grandi, cela m'a enrichi. J'ai eu cette vision dont je n'avais jamais rêvé auparavant, mon imagination était stimulée d'une manière nouvelle.

Toutes les parties de l'effort intellectuel humain ont leurs abstractions : l'économie l'utilité du brouillard, le "ça" du psychologue, la molécule du chimiste, l'espèce du biologiste, le phonème du linguiste, et, bien sûr, le nombre du mathématicien - tout cela est abstractions, et chacune de ces abstractions est une partie séminale du champ auquel elle appartient. Quand j'ai demandé cependant ce qu'espèce, phonème et nombre ont en commun, je ne voulais pas seulement recevoir la réponse superficielle que ce sont toutes des abstractions. La question demande plus que cela.

Un dictionnaire pourrait définir un phonème d'une langue comme "la plus petite unité de parole qui distingue un mot d'un autre". C'est trop rapide, trop superficiel, trop simpliste, mais c'est le début d'une définition. Un exemple aidera à clarifier le problème. Si je remplace *b* par *m* dans "*bat*", j'obtiens un autre mot anglais, "*mat*", cela signifie quelque chose de complètement différent ; c'est pourquoi *b* et *m* appartiennent à deux phonèmes anglais différents.

Considérez, d'autre part, les mots "*stone*" et "*tone*". Est-ce que tout le monde réaliser que le *t* sonne différemment dans ces mots ? Dans "*tone*", il est aspiré, et dans "*stone*" ce n'est pas le cas. Par aspiré, le linguiste veut dire que si je tiens un bout de papier à deux ou trois pouces de mes lèvres et que je dis "*tone*", le papier se déplacera, mais si je dis "*stone*", ce ne sera pas le cas. Il y a des langues (je crois que l'hindi est l'une d'entre elles) dans lesquelles le remplacement d'un *t* non aspiré par un *t* aspiré peut changer le sens (juste comme le remplacement de *b* par *m* change le sens de "*bat*"). En anglais, cependant, bien que les phonéticiens et leurs machines puissent faire la distinction entre les deux *t*, il n'y a pas de contexte dans lequel le remplacement de l'un par l'autre change le sens. Si une personne qui n'est pas un locuteur natif de l'anglais utilise un *t* sans inspiration où il ne devrait pas, nous sentons qu'il y a quelque chose de légèrement décalé, qu'il a un accent étranger dans un certain sens, mais nous n'avons aucune difficulté à le comprendre. En ce qui concerne l'anglais, les deux t concernés sont "iso-sémantiques". Ce mot n'existe pas, je l'ai inventé - mais tout le monde peut probablement deviner ce qu'il signifierait s'il existait : il signifie que le remplacement d'un mot par l'autre préserve le sens.

Qu'est-ce donc qu'un phonème ? Ou, mieux demandé, quel est le phonème d'un son ? *Réponse* : la collection de tous les sons qui sont iso-sémantiques avec lui. Puisque b et m ne sont pas iso-sémantiques, b n'appartient pas au phonème de m, mais le t dans "*tone*" appartient au phonème du t dans "*stone*".

Une analyse similaire de la notion d'espèce est possible, mais je ne m'y consacrerai pas maintenant. Un dictionnaire pourrait définir une espèce comme "un ensemble d'organismes capables de métissage", mais avant de pouvoir discuter de l'analogue pertinent de "iso-sémantique", nous aurions besoin de trier les sexes, et cette digression, bien que peut-être intéressante, prendrait trop de temps.

Le concept de nombre est plus proche et, au moins dans les cercles mathématiques, très bien connu. Nous utilisons tous des mots comme "*cinq*" chaque jour, mais beaucoup de gens se demandent ce que c'est que "*cinq*" ? Et, d'ailleurs, ne devraient-ils pas avoir honte d'eux-mêmes ? Nous n'utiliserions pas des mots tels que "$grand - p\grave{e}re$", ou "*taxe*", ou "*tondeuse* à *gazon*" sans pouvoir les définir, i.e. sans, pour être précis, pouvoir dire à un enfant de dix ans exactement ce qu'est un grand-père, ou une taxe, ou une tondeuse à gazon, mais le défi est de lui dire exactement ce qu'est un nombre. Je ne veux pas dire ce que fait un nombre, ou comment un nombre peut être utilisé - je veux dire vraiment ce qu'il *est*.

D'accord : qu'est-ce que "5" ? Nous ne le savons peut-être pas, mais nous savons que si c'est la réponse à "Combien de doigts y a-t-il sur votre main droite ?", alors c'est aussi la réponse à "Combien de joueurs y a-t-il dans une équipe de basket-ball ?". En d'autres termes, alors que nous ne savons pas ce qu'est un "nombre", nous savons quand deux ensembles d'objets (que ce soit des doigts, ou quoi que ce soit) sont "équipotents". Ils sont tels que nous pouvons établir un correspondance entre eux (par exemple, en désignant chaque basketteur sur l'équipe avec un doigt différent) qui est une correspondance individuelle telle qu'à chaque objet dans chaque ensemble correspond un objet unique dans l'autre ensemble.

Qu'est-ce donc qu'un nombre ? Ou, mieux demandé, quel est le nombre d'objets d'un ensemble ?
Réponse : la collection de tous les ensembles équipotents à ce nombre.

Abstraction et attitude : relations d'équivalence et extensionnalisme

Ceci est une définition abstraite, c'est une définition effrayante, c'est une ingénieuse définition. Elle est due à Bertrand Russell, et cela m'amène maintenant à commenter deux choses : primo, une abstraction, un concept mathématique de base, qui comprend la façon dont les espèces, les phonèmes, les nombres et de nombreux autres concepts dans de nombreuses parties de la vie sont pensés du mieux qu'il est possible, et secundo, une attitude, une position philosophique, que certains mathématiciens embrassent, et qui contribue grandement à la clarté et à la précision des mathématiques. Le nom du concept est "relation d'équivalence", et il est bien connu et le nom de l'attitude est "extensionnalisme" et, bien que cette attitude ne soit pas rare, le mot qui lui est associé, pour autant que je sache, est quelque chose que j'utilise depuis peu de temps en privé, mais personne d'autre n'en a jamais entendu parler.

Une relation d'équivalence est une relation qui a trois propriétés en commun avec les relations d'être iso-sémantique et équi-nomère, à savoir qu'elle est réflexive, symétrique et transitive. Le remplacement d'un énoncé par lui-même (qui n'est, bien sûr, pas un remplacement du tout) conserve sûrement du sens, et chaque ensemble a une correspondance individuelle avec lui-même - c'est ce que signifie "réflexif". Officiellement : une relation est réflexive lorsqque chaque objet dans son domaine est en relation à lui-même. Ainsi, par exemple, la paternité n'est pas réflexive - personne ne peut être son propre père - et si la fraternité entre, disons, les hommes est ou n'est pas selon un petit débat au sujet de la façon dont vous voulez utiliser les mots. Suis-je mon propre frère ?

Dire qu'une relation est "symétrique" signifie que les rôles de deux objets en relation peuvent toujours être inversés. Exemple : le son initial dans "*pit*" est iso-sémantique avec le son initial dans "*pendule*", puis, inversement, le son initial dans "*pendule*" est iso-sémantique avec le son initial dans "*pit*". De même : les membres d'une équipe de basket peuvent être mis en relation bi-univoque avec les doigts de ma main droite, puis, vice versa, il y a autant de doigts dans ma main droite que de joueurs dans une équipe de basket-ball. Voici quelques contre-exemples : la paternité n'est pas symétrique (mon père est en relation avec moi, mais je ne suis pas en relation avec lui), et la tendresse n'est pas symétrique - même s'il arrive souvent que quelqu'un que j'aime m'aime, ce n'est pas garanti, et une seule exception réfute l'universalité de la propriété.

La "transitivité" est un concept tout aussi simple, mais il faut un peu plus de temps pour le dire. Si trois sons sont iso-sémantiques dans l'ordre, c'est-à-dire que le premier et le second sont iso-sémantiques, et le deuxième et le troisième le sont, alors il s'ensuit que le premier et le troisième le sont aussi.

Un contre-exemple bien connu est l'amitié : il n'est pas toujours vrai que si Tom est l'ami de Dick et si Dick est l'ami de Harry, alors Tom est l'ami de Harry.

Voilà donc ce qu'est une relation d'équivalence : une relation réflexive, symétrique et transitive. Et chaque fois que nous rencontrons une relation d'équivalence, les objets auxquels elle s'applique peuvent être divisés en ce qu'on appelle des classes d'équivalence et, en utilisant ce vocabulaire, je peux maintenant dire qu'un phonème est une classe d'équivalence de la relation être iso-sémantique, et qu'un nombre est une classe d'équivalence de la relation être égal.

C'est l'un de mes principaux points, et quand je l'ai appris, j'ai senti que j'avais gagné un aperçu passionnant - c'est ce que je veux dire par un frisson d'abstraction. La notion de relation d'équivalence est l'une des composantes de base sur lesquelles la pensée de tous les mathématiciens est construite. C'est simple, c'est général, c'est largement applicable, et c'est 100% explicite et précis. Et, de plus, cela n'a rien à voir avec des colonnes de nombres ou des triangles ou des ordinateurs électroniques ou quoi que ce soit d'autre dont on pense parfois que cela constitue la pensée mathématique - c'est de la pensée abstraite pure.

Maintenant, à propos de "l'extensionnalisme" - là je ne suis pas sûr de pouvoir expliquer ce que je ressens. En une courte phrase, ce que j'essaie de dire, c'est que pour un mathématicien - en tout cas, pour moi - un concept EST son extension. Prenons, par exemple, le chiffre 5. Qu'est-ce que c'est ? Pas "Que fait-il ?", "Comment peut-il être utilisé ?", Ou "Comment le distinguer des autres ?", mais "Qu'est-ce que C'EST ?". Les mathématiciens posent généralement de telles questions : leur insistance sur les définitions et leur insistance sur la précision totale dans la définitions et la cohérence complète dans leur utilisation est l'un des signes distinctifs caractéristiques de leur art. L'"extension" d'une propriété (un ancien terme provenant du domaine de la philosophie) est la classe de tous les objets qui possèdent cette propriété. Ainsi, l'extension du "bleu" est la classe de toutes les choses bleues - le ciel, le Danube, les livres, les cravates, peu importe - tout ce qui est bleu. L'extension de "5" est la classe de toutes les équipes de quintuples - équipes de basket-ball, les doigts d'une main, peu importe. Un lexicologue prudent pourrait être prêt à aller aussi loin avec le mathématicien : très bien, il pourrait dire, 5 est la propriété commune à tous les quintuples. Le mathématicien rigoureux considérerait qu'il charrie, cependant. Qu'est-ce au juste qu'une "propriété", demanderait-il. Et comment osons-nous parler de "la" propriété commune de l'ensemble de tous quintuples - comment savons-nous qu'il n'y en a qu'un ? Non, monsieur !, il dirait : tout ce que je veux vraiment savoir sur la "cinquitude", c'est que je suis prêt à l'affirmer des doigts de ma main droite, et, à partir de là, de tout autre ensemble que je peux mettre en correspondance un à un avec ces doigts. En d'autres termes, il dirait, je connais l'extension de la cinquitude et c'est tout ce que j'en sais. La seule façon courageuse de définir 5, est donc de suivre le principe selon lequel un concept EST son extension et, en tant qu'extensionnaliste religieusement observateur, je *définis* donc 5 comme étant la classe d'équivalence d'équipotence à laquelle appartient le jeu de doigts de ma main droite.

Il y a quelque chose de froid et d'interdit, quelque chose d'impersonnel et d'effrayant, à propos de cette définition, on pourrait penser que, même si elle est intellectuellement, défendable, il manque en quelque sorte l'essence du concept en cours de définition. Cela me rappelle la définition classique, et tout aussi insatisfaisante d'un homme comme un "bipède sans plumes". Quand je l'ai entendu pour la première fois, je m'y suis opposé. Je pensais sûrement que l'humanité, c'est plus que ça. Qu'en est-il de l'âme, de l'humour, de l'art, de la culture, la technologie, la guerre, l'amitié, la maternité - qu'en est-il de tous ces caractères "essentiels", les caractéristiques de l'humanité - une définition de sang-froid comme "bipède sans plumes" ne les rate-t-elle pas tous, et ainsi rate son but ? Après de nombreuses années pendant lesquelles je me suis accoutumé à l'idée, je ne ressens plus ce malaise en présence d'une définition par extension. S'il est effectivement vrai (je répète : *s'il* est effectivement vrai, je n'affirme pas que ça le soit) que l'humanité est co-extensive avec la classe des bipèdes sans plumes, alors l'humanité est la classe des bipèdes sans plumes. Et, de la même façon, puisque la "cinquitude" est co-extensive avec la classe de tous les quintuples, j'embrasse joyeusement la définition selon laquelle 5 *est* cette classe.

Rêveurs et preuves non constructives

Il est temps que je me tourne vers la deuxième des trois questions que j'ai posées, afin de décrire une seconde croyance et un comportement mathématiques de base très différents. Existe-t-il, ai-je demandé, un nombre qui multiplié par lui-même 5 fois donne le même résultat qu'en lui ajoutant 2 ? Il y a des personnes, tant chez les rêveurs que chez les personnes au grand sens pratique, qui répondraient à cette question par oui seulement si elles pouvaient produire explicitement un numéro avec la propriété décrite, ou, à tout le moins, dans le pire des cas, si elles pouvaient explicitement décrire un algorithme, une procédure de calcul, qui produirait un tel nombre. Ainsi, par exemple, si je change le nombre 2 du problème en 240, et si j'observe que $3^5 = 243$, qui est égal à $3 + 240$, alors, je pense que nous serions tous d'accord pour dire qu'il a été répondu à la question modifiée par l'affirmative.

Il existe cependant une autre façon de répondre à ces questions, la méthode des preuves non-constructives, dont je donnerai un modeste exemple. Imaginez que j'ai un ordinateur ultra-efficace mais pas spécialement intelligent, programmé pour me dire instantanément lequel est le plus grand de x^5 ou $x + 2$, chaque fois que je lui pose la question pour un nombre entier particulier x, mais qui ne connaît que les nombres entiers. D'accord, je dis à l'ordinateur, allons-y : $x = 0$. Il dit : $x + 2$ est supérieur à x^5. Je dis : $x = 1$. Il dit : $x + 2$ est plus grand. Je dis : $x = 2$. Il dit : x est plus grand. Je dis : Hourra ! - le jeu est terminé, et la réponse est oui. C'est vrai, non ? Si je m'imagine me déplacer le long de la ligne, balayant tous les nombres à partir de 0, et si je sais que quelque part (disons, quand $x = 1$), $x + 2$ est le plus grand de x^5 et $x + 2$, et qu'un peu plus tard (lorsque $x = 2$) x^5 est le plus grand, alors, par une propriété intuitivement évidente et rigoureusement prouvable, je peux être assuré que quelque part entre les deux, x^5 et $x+2$ seront exactement égaux.

Qu'est-ce que je sais maintenant que je ne savais pas avant ? Est-ce que je connais un nombre x tel que $x^5 = x + 2$? Non, non. Tout ce que je sais, mais je le sais avec certitude, c'est que même si je ne suis pas (pas encore !) capable d'en construire un, un tel nombre existe.

Je viens de donner, comme je l'ai promis, un modeste exemple de non-constructivité d'une preuve d'existence. J'appelle cela un exemple “modeste”, car, en fait, avec un peu de difficultés, il peut être converti en un algorithme concret qui produira un nombre du type souhaité aussi précisément que voulu : au profit du lecteur qui meurt de curiosité, je fournis une réponse arrondie à cinq décimales, qui est 1,26717.

Les véritables preuves d'existence non constructives, du genre de celles qui ne peuvent pas être converties en une procédure de calcul, sont parfois une source de débats animés dans la communauté mathématique. Ce sont des démonstrations impressionnantes de l'ingéniosité humaine et de la profondeur de la pensée mathématique. Parfois, par exemple, afin de prouver qu'un certain ensemble (comme l'ensemble des points sur la droite numérique) contient au moins un objet d'un type particulier (tel qu'un nombre x pour lequel $x^5 = x + 2$), un mathématicien pourrait utiliser une méthode “stochastique”. C'est un concept compliqué dont les détails de la description nous mèneraient trop loin, mais en termes qualitatifs, cela signifie quelque chose comme ça. Concevoir un jeu de hasard, un jeu de dés, disons, dont les résultats possibles sont les objets de l'ensemble considéré ; utiliser les propriétés souhaitées pour les objets particuliers dont on cherche à prouver l'existence, et calculer la probabilité que le jeu de hasard produira l'un de ces objets. Si cette probabilité se révèle être un nombre positif (en d'autres termes, pas 0), alors nous pouvons être sûrs que l'ensemble des objets souhaités ne sera pas vide - des objets comme ça doivent exister - même si la méthode de la preuve ne donne même pas un espoir de ce côté du paradis de ne jamais en exposer concrètement un.

La méthode stochastique est un exemple beaucoup plus juste d'une approche non constructive d'existence plutôt que la “modeste” preuve basée sur la continuité. Beaucoup de preuves d'existence non constructives utilisent une certaine notion de “taille” d'un ensemble (comme la probabilité ou la dimension, ou même un nombre cardinal), et atteignent leur but en prouvant que la taille de l'ensemble des objets dont l'existence n'est pas connue est suffisamment grande pour garantir que cet ensemble n'est pas vide !

Le principe des tiroirs

La toute première question que j'ai posée (Vous rappelez-vous ? Il s'agissait de la question concernant les nombres de poignées de mains.) peut être utilisée pour illustrer un troisième principe de pensée de base de mathématiques passionnantes, pures et abstraites, le soi-disant principe des tiroirs, ou principe du trou de pigeon, mais je pense que je vais céder à ma tendance congénitale au sadisme mathématique, et laisser cette question en suspens comme un défi pour vous, je vais utiliser une autre question pour expliquer le principe des tiroirs.

Supposons qu'un certain nombre d'entre nous soyons ensemble dans une pièce, 100 d'entre nous, disons, et que nous formions temporairement une petite société à nous. Dans cette société fermée, il existe un certain nombre de relations de connaissances : certains d'entre nous en connaissent d'autres. Je ne sais pas lesquels d'entre nous connaissent quels autres, mais je suis sûr d'une chose : je parie qu'au moins deux d'entre nous ont le même nombre de connaissances.

Le croyez-vous ? Voyons voir si je peux vous fournir un argument convaincant. Supposons que quelqu'un demande, à chacun de nous, moi-même inclus, "Avec combien d'autres personnes de cette société fermée êtes-vous en relation ?". Nous pourrions tous lui répondre "un nombre entre 0 et 100". Non, attendez une minute. Si nous sommes exactement 100, alors personne d'entre nous ne connaît 100 autres personnes ; le plus grand nombre ne peut pas dépasser 99. Pour autant que 0 est concerné, ça va, il pourrait bien y avoir des ermites parmi nous, mais ce n'est pas probable, et, en tout état de cause, je peux facilement régler ce cas. S'il y a deux ermites ou plus, alors j'ai déjà gagné mon pari : deux ermites ont le même nombre de connaissances. S'il n'y a qu'un ermite, alors ostracisons-le, ne le comptons pas, allons jusqu'à prétendre qu'il n'est pas là. Je dois encore prouver que parmi les 99 restants, nous sommes deux avec le même nombre de connaissances, et je vais le faire, mais parce que 100 est plus facile à dire que 99, je suppose que même si le seul ermite possible n'est pas compté, nous sommes encore 100.

Alors, quels chiffres possibles chacun des 100 d'entre nous donnera-t-il au questionneur ? Réponse : tout nombre compris entre 1 et 99 inclus. Qu'est-ce que je parie ? Réponse : que deux d'entre nous donneront le même numéro à celui qui pose la question. En effet : comment pourrions-nous échouer ? Il n'y a que 99 chiffres à lui dire et nous sommes 100 à dire : il doit y avoir au moins une répétition.

N'est-ce pas joli ? Je pense que ça l'est et, soit dit en passant, c'est une application du principe des tiroirs impressionnante mais enfantine de facilité. Le principe dit que si nous avons un certain nombre de pigeonniers, et s'il y a plus de lettres que de pigeonniers, alors au moins un pigeonnier contiendra plus d'une lettre. Ce principe d'une simplicité enfantine est encore un autre élément de base des mathématiques que l'on utilise encore et encore, parfois dans des contextes très sophistiqués, et c'est la colonne vertébrale de toutes les mathématiques dites finies ou combinatoires.

Notez que les trois principes de base que j'ai décrits jusqu'à présent sont de trois sortes différentes. La "relation d'équivalence" est un concept ; la preuve d'"existence non constructive" est une technique (et une attitude) ; et le principe des tiroirs est un théorème, un fait (avec, bien sûr, des millions d'applications et des cas spéciaux très différents). Je pourrais vous présenter, et pour plus de clarté, je suis sûr que j'aurais dû le faire, d'autres exemples des domaines d'application des trois principes de base déjà mentionnés, et, du même coup, j'aurais pu et dû donner d'autres principes, qui sont utilisés dans d'autres problèmes. Tout comme l'exhaustivité dans une discussion comme celle-ci est impossible en quelques pages, mais je pourrais peut-être rendre davantage justice à la fois au sujet et au lecteur en mentionnant au moins ce qui aurait pu être dit d'autre.

Ainsi, par exemple, est-il évident que le cadran d'une horloge est, en fait, une image d'une relation d'équivalence ? (Je pense à la relation entre deux nombres qui tient lorsque l'un est obtenu de l'autre en lui ajoutant 12, ou, d'ailleurs, n'importe quel multiple de 12, de sorte que 13 heures est représenté par la même aiguille que 1 heure.). Ou bien est-il évident que l'arrondi vers le bas (autorisé par l'Internal Revenue Service lorsque nous calculons notre impôt sur le revenu) définit une relation d'équivalence ? (En ce sens, une taxe de 317,23 \$ équivaut à 317,00 \$; plus généralement, deux taxes calculées sont équivalentes si vous ignorez les centimes, à nombre d'euros égal, n'importe quel nombre de centimes, compris entre 1 et 99, les rend égaux.)

Quant aux exemples de preuves d'existence non constructives : beaucoup d'entre elles dépendent de la fameuse loi (pour certains infâme) du tiers exclu. Voulons-nous prouver qu'une certaine construction mathématique "existe" ? Très bien, supposons qu'il n'y a pas de nombre, ou triangle, ou autre, qui réponde à la définition avec laquelle nous sommes en train de travailler ; nous allons supposer cette hypothèse (d'existence), et, si nous sommes chanceux, nous aboutirons alors à une contradiction. Conclusion : la non-existence est intenable, et au moins une instance de l'objet doit effectivement exister. Ce genre de preuve d'existence non constructive rend les gens qui n'y croient pas plus en colère que tout le reste.

Existe-t-il des nombres normaux ?

D'autres exemples de preuves non constructives peuvent être faites dans la théorie des soi-disant "nombres transcendants" (il y a, au sens de la théorie des ensembles de Cantor, "plus" de nombres transcendants que de nombres non transcendants donc il doit y en avoir au moins un), et dans la théorie des nombres “normaux” (la “longueur” de l’ensemble des des nombres normaux, ou, en d’autres termes, la “probabilité” qu’un nombre soit normal, n’est pas nulle, et donc il doit y avoir au moins un tel nombre).

La dernière chose que j’ai mentionnée est suffisamment intéressante pour que je sois fortement tenté d’entrer dans un petit détail technique. Je promets que ça ne durera pas longtemps.

Dans cette discussion, les “nombres” que je veux considérer sont les fractions propres - les nombres positifs qui n’ont pas de partie entière, tels que

.5000000....
.3333000....
.3333333....
.142857142857....
.12345678901234567890....

Quand on regarde la forme décimale d’un tel nombre, on peut se demander à quelle fréquence le chiffre 8 se présente dans cette forme, comme tendance moyenne à long terme ? La réponse pour les trois premiers nombres ci-dessus est “jamais” - 8 n’est tout simplement pas dans la loi. La réponse pour le quatrième chiffre après la virgule est “à fréquence un sixième”. Ce n’est pas clair ? Il y a exactement un 8 dans chaque groupe de six chiffres ; parmi le premier million de chiffres, le nombre de 8 est d’environ un sixième, et si nous remplaçons “millions” par de plus en plus, l’approximation d’un sixième devient de plus en plus presque parfaite. Pour le dernier nombre de la liste, le la réponse est “un dixième” ; le raisonnement est le même que ci-dessus.

Il y a dix chiffres à notre disposition, et nous pourrions considérer qu’un nombre est “juste” si chacun d’eux est traité de la même manière que tous les autres - en d’autres termes, si chacun des dix chiffres se produisent dans ce nombre exactement un dixième du temps, à long terme en moyenne. En ce sens, seul le cinquième des cinq nombres de ma liste d’exemples est juste.

Il existe cependant une notion d’équité plus sophistiquée, selon laquelle aucun des nombres de ma liste n’est juste. Pour illustrer ce que je veux dire, permettez-moi de poser cette question. Étant donné un nombre (sous forme décimale, sans partie entière), à quelle fréquence est-ce que les chiffres 5 et 7 y apparaissent, côte à côte, dans cet ordre (dans le même sens d’en moyenne à long terme que précémment) ? La réponse est “jamais” dans tous mes exemples, sauf pour le quatrième, et dans ce cas, c’est “un sixième”. Pour voir ce que je veux dire, parcourez les chiffres, comptez tous les “blocs” de longueur deux, et gardez une trace de la proportion d’entre eux qui sont “57”.

Quelle devrait être la réponse si nous voulons considérer le nombre comme juste, juste non seulement selon chaque chiffre individuel, mais aussi selon chaque paire imaginable ? La réponse dépend du nombre de paires possibles - et la réponse est 100. C'est clair ? Bien sûr : il suffit de les compter, à partir de 00, 01, 02,. . . , 09, 10,. . . , à 97,98, 99. C'est cent, et, par conséquent, la seule façon dont un nombre peut être "juste par paire" est qu'il contienne chaque paire possible un centième du temps (dans la moyenne à long terme).

Pouvons-nous écrire un nombre qui soit juste pour chaque chiffre ainsi que pour chaque paire de chiffres ? Bien sûr, nous pourrions, avec du papier, un crayon et un peu de temps, mais dès que la tâche serait terminée, je serais prêt avec une nouvelle question à poser. La nouvelle question porterait sur des triplets, comme 293. Je refuserais maintenant de qualifier un nombre de l'adjectif juste à moins qu'il ne traite équitablement chaque chiffre (avec une fréquence un sur dix), chaque paire (avec une fréquence de un sur cent), et chaque triplet (avec une fréquence - sûrement que la réponse est devinable - de un sur mille). Et une fois que le schéma est clair, je peux le continuer : dans mon avidité infinie pour la justice, je vais exiger un nombre absolument juste, ce que je veux dire, c'est que c'est un nombre dans lequel tous les blocs de toutes longueurs se produisent avec la "bonne" fréquence (un sur dix, ou cent, ou mille, ou dix mille, etc., pour les suites de chiffres célibataires, doubles, triples, quadruples, etc.). Le nom technique et mathématique habituel n'est pas "absolument juste" mais "normal", et maintenant nous avons une question, une vraie, dure et juteuse question mathématique. Toutes ces conditions, infiniment nombreuses, peuvent-elles être satisfaites simultanément ? En d'autres termes : existe-t-il des nombres normaux ?

Question à laquelle je ne pense pas que la plupart des gens peuvent répondre, sauf s'ils sont professionnels membres cotisants du syndicat des mathématiciens. Mais la mathématicienne qui n'a pas peur des preuves d'existence non constructives, et qui a une petite quantité de formation en théorie moderne des probabilités, peut naviguer à travers cette question. Tout ce qu'elle doit faire est de considérer le processus de choix d'un nombre au hasard, pour par exemple lancer une flèche au hasard sur le segment de la droite numérique qui se trouve entre 0 et 1, calculer la probabilité que le nombre que la flèche frappe soit normal, et observer que la réponse n'est pas 0. Le calcul n'est pas trivial, c'est là que la technique mathématique est vraiment nécessaire. La probabilité de rendement n'est pas seulement différente de 0, mais elle en est aussi différente qu'elle pourrait l'être : elle est égale à 1. Dans d'autres mots : il est presque certain qu'un nombre choisi au hasard sera normal, ce qui garantit certainement que les nombres normaux existent.

Le nombre de ce que j'ai appelé les "principes mathématiques de base" est étonnamment petit. Personne ne les a jamais répertoriés, et ce serait une chose risquée et controversée que de le faire, mais la plupart des mathématiciens conviennent que les mathématiques sont une unité - tout est lié, avec tous les sujets entrelacés, et tous les concepts applicables partout - le nombre de briques nécessaires pour construire un édifice si merveilleusement compact ne peut pas être très grand.

C'est un commentaire général ; je voudrais en faire un de plus. J'ai parlé des frissons de l'abstraction et, en particulier, des frissons des mathématiques, que les gens considèrent en effet comme très abstraites. Serait-ce une contradiction si je disais maintenant que les mathématiques sont une science expérimentale ? Je pense que les mathématiques sont abstraites, et je pense que les mathématiques sont une science expérimentale, et je ne pense pas que ces deux croyances se contredisent.

Résoudre un problème mathématique n'est pas un acte déductif, c'est l'acte de deviner, de faires des essais et des erreurs, des expériences. Pour résoudre le problème des poignées de main, par exemple, pour cinq couples, nous pourrions faire bien pire que tout simplement, devine. Devinez, par exemple, que la réponse est 7, puis essayez et voyez ce qui, le cas échéant, est faux dans cette supposition. Une autre procédure, plus digne qui mérite plus d'être appelée une expérience, c'est de faire varier les conditions et d'essayer de résoudre certains cas qui, nous l'espérons, rendent le problème plus facile. Qu'arrive-t-il, par exemple, aux poignées de mains si on pose la question pour seulement quatre couples ? ou trois ? ou deux ? ou même un seul ?

Les abstractions sont des faits

Voilà le genre de chemin qu'un mathématicien au travail parcourt typiquement - son attitude n'est pas celle de la création mais celle de la découverte. La réponse est là quelque part, et nous n'avons aucun contrôle sur ce qu'elle est - tout ce que nous essayons de faire, c'est de la trouver. Les concepts, les techniques et les théorèmes sont abstraits, mais notre apprentissage à leur sujet procède de la même manière que notre apprentissage sur le point d'ébullition d'un produit chimique et l'accélération d'un corps qui tombe. Les abstractions sont des *faits*, des faits extérieurs à nous, des faits que nous n'inventons pas mais qui sont là pour nous si nous pouvons les trouver.

Certains lecteurs reconnaîtront, bien sûr, que la position que j'ai ainsi "prouvée" est celle d'un platonisme inflexible, mais ils ne retiendront pas, je l'espère, cela contre moi. Mes convictions (veuillez ne pas les appeler des préjugés) ont mis longtemps à grandir et je détesterais devoir les abandonner. Je suis convaincu que les mathématiques sont infinies dans leur étendue et leurs applications, mais présentent une unité dans leur manière conceptuelle de regarder les choses et les décrire ; les faits des mathématiques sont là qui attendent que nous les devinions, expérimentions et finalement tombions dessus ; les concepts, les techniques, et les faits sont abstraits, et, dans leur grande abstraction, ils sont l'un des plus passionnants phénomènes de l'univers.

PS : La réponse au problème des poignées de mains est 4.

Paul R. Halmos est professeur émérite de mathématiques de l'Université de l'Indiana, et Rédacteur en chef du "American Mathematical Monthly". Il a obtenu son doctorat à l'Université de l'Illinois et a occupé des postes dans l'Illinois, à Syracuse, à Chicago, au Michigan, à Hawaï et Santa Barbara. Il a publié de nombreux livres et près de 100 articles et a été l'éditeur de nombreuses revues et de plusieurs séries de livres. L'*Association mathématique américaine* lui a décerné le prix Chauvenet et (deux fois) le prix Lester Ford pour ses exposés mathématiques. Ses principaux intérêts mathématiques sont la théorie de la mesure et la théorie ergodique, la logique algébrique et la théorie des opérateurs sur l'espace de Hilbert.