Séminaire DELANGE-PISOT
(Théorie des nombres)
2e année, 1960/61, n° 11 — 10 avril 1961

SUITES DE FAREY

par Charles PISOT

DÉFINITION. On appelle **suite de Farey** de rang n, la suite des fractions irréductibles $\frac{a}{b}$ rangées par ordre croissant, pour lesquelles on a $1 \leqslant b \leqslant n$.

Il suffit d'ailleurs de supposer $0 \leqslant \frac{a}{b} < 1$ car la partie de la suite de Farey comprise entre les entiers m et $m+1$ se déduit de celle comprise entre 0 et 1 en ajoutant m à cette dernière.

EXEMPLE. Pour $n = 5$, on a, entre 0 et 1, les fractions : $\frac{0}{1}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}$.

Leur nombre est $\sum_{k=1}^{n} \varphi(k)$, où φ est la fonction d'Euler.

PROPRIÉTÉS. - Soient $\frac{a}{b}$ et $\frac{a'}{b'}$ deux fractions consécutives de la suite de Farey de rang n.

Les vecteurs (a, b) et (a', b') constituent alors une base du réseau des points à coordonnées entières. En effet le triangle, ayant pour sommets les points $(0, 0)$, (a, b), (a', b'), ne peut contenir aucun point du réseau autre que ses sommets, car sinon il existerait une fraction de la suite de Farey de rang n comprise entre $\frac{a}{b}$ et $\frac{a'}{b'}$.

Par suite, on a $ab' - ba' = \pm 1$. La fraction $\frac{a+a'}{b+b'}$, qui s'appelle la **médiane** entre $\frac{a}{b}$ et $\frac{a'}{b'}$, est alors aussi irréductible et elle est comprise entre $\frac{a}{b}$ et $\frac{a'}{b'}$; la médiane ne peut donc appartenir à la suite de rang n, c'est-à-dire qu'on a $b + b' > n$.

Résumons :

THÉORÈME. - Soient $\frac{a}{b}$ et $\frac{a'}{b'}$ deux fractions consécutives de la suite de Farey de rang n, alors on a $b + b' \geqslant n + 1$ et $ab' - ba' = \pm 1$.

APPLICATION. Soit ξ un nombre réel arbitraire. Quel que soit l'entier $n > 0$, il existe alors une fraction irréductible $\frac{a}{b}$ telle que

$$\left|\xi - \frac{a}{b}\right| \leqslant \frac{1}{b(n+1)}$$

et que

$$1 \leqslant b \leqslant n.$$

En effet, considérons la suite de Farey de rang n ; le nombre ξ tombe dans l'un des intervalles

$\frac{a}{b}, \frac{a+a'}{b+b'}$ ou $\frac{a+a'}{b+b'}, \frac{a'}{b'}$; supposons que ce soit dans le premier, alors on a

$$\left|\xi - \frac{a}{b}\right| \leqslant \left|\frac{a+a'}{b+b'} - \frac{a}{b}\right| = \frac{1}{b(b+b')} \leqslant \frac{1}{b(n+1)}.$$

Il en résulte aussi que, quel que soit le nombre réel $\rho \geqslant 1$, il existe toujours une fraction irréductible $\frac{a}{b}$ avec $1 \leqslant b \leqslant \rho$, telle que $\left|\xi - \frac{a}{b}\right| < \frac{1}{\rho b}$.

En effet, il suffit d'appliquer le résultat précédent avec $n = [\rho]$.

Méthode de Hardy et Littlewood. Soit $u_1, ..., u_k, \ldots$ une suite strictement croissante d'entiers positifs ; le problème de la théorie additive consiste à trouver le nombre de manières d'écrire un entier n comme somme de s entiers de la suite. Pour cela, posons

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} z^{u_k},$$

alors on a immédiatement

$$[f(z)]^s = \sum_{n=0}^{\infty} r(n) z^n$$

où $r(n)$ est le nombre de manières cherché. Or on a

$$r(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{[f(z)]^s}{z^{n+1}} dz$$

où C est un cercle $|z| = \theta$ avec $0 < \theta < 1$.

Considérons alors la suite de Farey de rang n^α où $0 < \alpha < 1$; les nombres $\rho = \exp 2i\pi(a/b)$, où $\frac{a}{b}$ est une fraction avec $0 \leqslant \frac{a}{b} \leqslant 1$ de cette suite de Farey, sont des racines primitives de l'unité.

Si $\frac{a'}{b'} < \frac{a}{b} < \frac{a''}{b''}$ sont des fractions consécutives de cette suite de Farey, nous désignons par C_ρ l'arc de C défini par $z = \theta \exp i\omega$ avec $2\pi \frac{a+a'}{b+b'} \leqslant \omega \leqslant 2\pi \frac{a+a''}{b+b''}$. Supposons que

$$\lim_{\theta \to 1} (1-\theta)^\lambda f(\theta\rho) = A_\rho$$

existe pour un certain $\lambda > 0$ alors on remplace $f(z)$ par $\psi_\rho(z) = \dfrac{A_\rho}{\left(1 - \dfrac{z}{\rho}\right)^\lambda}$ sur C_ρ.

Suites de Farey et hypothèse de Riemann. Soit μ la fonction de Möbius, et

$$\mathfrak{M}(x) = \sum_{k \leqslant x} \mu(k).$$

Si l'on suppose que

$$\mathfrak{M}(x) = O(x^{(1/2)+\varepsilon}) \qquad \text{pour tout } \varepsilon > 0,$$

alors l'hypothèse de Riemann est vraie ; en effet, dans ces conditions, on a, pour $s > 0$,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{\mu(k)}{k^s} &= \sum_{k=1}^{n-1} \mathfrak{M}(k) \left(\frac{1}{k^s} - \frac{1}{(k+1)^s} \right) + \frac{\mathfrak{M}(n)}{n^s} \\ &= s \int_1^n \frac{\mathfrak{M}(x)}{x^{s+1}} dx + \frac{\mathfrak{M}(n)}{n^s}\end{aligned}$$

Par suite, pour $s = \frac{1}{2} + \varepsilon$ on voit que la série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(k)}{k^{(1/2)+\varepsilon}}$ converge, et sa valeur est $s \int_1^n \frac{\mathfrak{M}(x)}{x^{s+1}} dx$; cette intégrale est donc holomorphe pour $\Re(s) > \frac{1}{2}$. Or pour $\Re(s) > 1$, elle vaut $\frac{1}{\zeta(s)} = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)$ donc elle vaut $\frac{1}{\zeta(s)}$ aussi pour $\Re(s) > \frac{1}{2}$ et $\zeta(s)$ ne peut s'annuler.

Hardy et Littlewood ont montré que, réciproquement, l'hypothèse de Riemann entraîne $\mathfrak{M}(x) = O(x^{(1/2)+\varepsilon})$.

Considérons alors la somme des racines primitives b-ièmes de l'unité, donc $\sum_{1 \leqslant a \leqslant b} \exp 2i\pi(a/b)$, où a est premier à b ; désignons par $S(b)$ cette somme. Si $T(b)$ est la somme de toutes les racines b-ièmes de l'unité, on a

$$T(b) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad b = 1 \\ 0 & \text{si} \quad b \geqslant 2 \end{cases}.$$

Or

$$T(b) = \sum_{d|b} S(d),$$

d'où, par inversion de Möbius,

$$S(b) = \sum_{d|b} \mu\left(\frac{b}{d}\right) T(d) = \mu(b).$$

Par suite

$$\mathfrak{M}(n) = \sum_{b=1}^{n} \mu(b) = \sum_{m=1}^{A} \exp 2\pi i r_m$$

où r_m parcourt les A fractions de la suite de Farey de rang n.

Or on peut écrire :

$$\mathfrak{M}(n) = \sum_{m=1}^{A} \exp 2\pi i(m/A) \,.\, \exp 2\pi i \delta_m \qquad \text{avec } \delta_m = r_m - \frac{m}{A}$$

d'où

$$\begin{aligned}
\mathfrak{M}(n) &= \sum_{m=1}^{A} \exp 2\pi i(m/A) + \sum_{m=1}^{A} \exp 2\pi i(m/A)((\exp 2\pi i\delta_m) - 1) \\
|\mathfrak{M}(n)| &\leqslant \sum_{m=1}^{A} |\sin \pi\delta_m| \leqslant 2\pi \sum_{m=1}^{A} |\delta_m|.
\end{aligned}$$

Par conséquent, si on suppose que

$$\sum_{m=1}^{A} |\delta_m| = O(x^{(1/2)+\varepsilon}) \qquad \text{pour tout } \varepsilon > 0,$$

l'hypothèse de Riemann est vraie.

Pour établir la réciproque, soit $0 \leqslant x \leqslant 1$ et $g(x)$ le nombre des r_m vérifiant $r_m \leqslant x$. On a alors :

$$g(x) = \sum_{h=1}^{n} [hx] \mathfrak{M}\left(\frac{n}{h}\right).$$

En effet, l'égalité est vraie pour $x = 0$. Lorsque $g(x)$ augmente d'une unité, en passant de r_m à $r_{m+1} = \dfrac{a}{b}$ le membre de droite augmente de

$$\sum_{b|h} \mathfrak{M}\left(\frac{n}{h}\right) = \sum_{k \leqslant x/b} \mathfrak{M}\left(\frac{n/b}{k}\right).$$

Or

$$\sum_{k \leqslant c} \mathfrak{M}\left(\frac{c}{k}\right) = \sum_{k \leqslant c} \sum_{d \leqslant c/k} \mu(d) = \sum_{dk \leqslant x} \mu(d) = \sum_{g \leqslant c} \sum_{d|g} \mu(d) = 1$$

Donc le résultat est vrai pour tout x.

En particulier pour $x = 1$, on a

$$A = \sum_{h=1}^{n} h\, \mathfrak{M}\left(\frac{n}{h}\right).$$

Posons maintenant

$$I = \int_0^1 G^2(x)dx \qquad \text{avec } G(x) = g(x) - Ax + \frac{1}{2}.$$

On a

$$\begin{aligned}
g(x) &= \sum_{h=1}^{n} [hx]\, \mathfrak{M}\left(\frac{n}{h}\right) \\
-Ax &= \sum_{h=1}^{n} hx\, \mathfrak{M}\left(\frac{n}{h}\right) \\
\frac{1}{2} &= \sum_{h=1}^{n} \frac{1}{2}\, \mathfrak{M}\left(\frac{n}{h}\right)
\end{aligned}$$

d'où :

$$G(x) = -\sum_{h=1}^{n} \omega(hx) \mathfrak{M}\left(\frac{n}{h}\right) \qquad \text{avec } \omega(x) = x - [x] - \frac{1}{2}.$$

On a

$$\omega(x) = -\frac{1}{\pi} \sum_{h=1}^{n} \frac{\sin\ 2n\ \pi\ x}{n}.$$

On a alors

$$\int_0^1 \omega(hx)\ \omega(kx)\ dx = \frac{1}{12\ uv} \qquad \text{où} \left\{ \begin{array}{l} h = ud \\ k = vd \end{array} \right., \qquad (u, v) = 1.$$

En effet cette intégrale vaut

$$\frac{1}{2\pi^2} \sum_{\substack{h=1 \\ k=1}}^{\infty} \int_0^1 \frac{\cos\ 2(nh - mk)\pi x - \cos\ 2(nh + mk)\ \pi x}{nm} dx.$$

Les différentes intégrales partielles sont toutes nulles, sauf si $nh - mk = 0$, donc $n = wv, m = wu$, d'où

$$\int_0^1 \omega(hx)\ \omega(kx)\ dx = \frac{1}{2\pi^2} \sum_{w=1}^{\infty} \frac{1}{w^2 uv} = \frac{1}{2\pi^2} \frac{\pi^2}{6} \cdot \frac{1}{uv} = \frac{1}{12\ uv}.$$

On en déduit

$$I = \int_0^1 \sum_{h=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \omega(hx)\ \omega(kx)\ \mathfrak{M}\left(\frac{n}{h}\right)\ \mathfrak{M}\left(\frac{n}{k}\right) dx = \frac{1}{12\ uv} \sum_{h=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \mathfrak{M}\left(\frac{n}{h}\right) \mathfrak{M}\left(\frac{n}{k}\right).$$

D'autre part

$$I = \sum_{m=0}^{A-1} \int_{r_m}^{r_{m+1}} \left[g(x) - Ax + \frac{1}{2}\right]^2 dx = \sum_{m=0}^{A-1} \int_{r_m}^{r_{m+1}} \left(m + \frac{1}{2} - Ax\right)^2 dx = \frac{1}{12} + A \sum_{m=1}^{A} \delta_m^2.$$

et

$$\sum_{m=1}^{A} \delta_m^2 = \frac{1}{A}\left(I - \frac{1}{12}\right).$$

Enfin, on a $A = A(n)$ et $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{A(n)}{n^2} > 0$.

En effet :

$$\begin{aligned}
A(n) &= \sum_{m=1}^{n} \mu(m) = \sum_{m=1}^{n} m \sum_{h|m} \frac{\mu(h)}{h} = \sum_{m=1}^{n} \frac{\mu(h)}{h} \sum_{\substack{h\leqslant n\\ h|m}} m \\
&= \sum_{h=1}^{n} \frac{\mu(h)}{h} \sum_{k\leqslant n/h} hk = \sum_{h=1}^{n} \mu(h) \sum_{k\leqslant n/h} k = \frac{1}{2}\sum_{h=1}^{n} \mu(h) \left(\left[\frac{n}{h}\right]^2 + \left[\frac{n}{h}\right]\right) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{h=1}^{n} \mu(h) \left[\frac{n}{h}\right]^2 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\sum_{h=1}^{n} \mu(h) \frac{n^2}{h^2} + O\sum_{h=1}^{n}\left(\frac{n}{h}\right) + O(1) \\
&= \alpha n^2 + O(n\log n), \quad \text{où } \alpha = \sum_{h=1}^{\infty} \frac{\mu(h)}{h^2} = \frac{1}{\zeta(2)} = \frac{6}{\pi^2}.
\end{aligned}$$

Si alors $|\mathfrak{M}(x)| < C(\varepsilon) x^{(1/2)+(\varepsilon/2)}$, on a

$$\begin{aligned}
|I| &< C^2(\varepsilon) \sum_{h=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{n^{(1/2)+(\varepsilon/2)} n^{(1/2)+(\varepsilon/2)}}{h^{(1/2)+(\varepsilon/2)} k^{(1/2)+(\varepsilon/2)}} \cdot \frac{1}{uv} \\
&= C^2(\varepsilon) n^{1+\varepsilon} \sum_{h=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(uv)^{(3/2)+(\varepsilon/2)} d^{1+\varepsilon}}
\end{aligned}$$

qui converge. Par suite

$$\sum_{m=1}^{A} \delta_m^2 = O(n^{-1+\varepsilon}).$$

Or, d'après l'inégalité de Schwarz, on a

$$\sum_{m=1}^{A} |\delta_m| \leqslant \sqrt{A \sum_{m=1}^{A} \delta_m^2}$$

et

$$A = \sum_{m=1}^{n} \mu(m) \leqslant \sum_{m=1}^{n} m < n^2,$$

donc

$$\boxed{\sum_{m=1}^{A} |\delta_m| = O\left(n^{(1/2)+\varepsilon}\right), \qquad \text{pour tout } \varepsilon > 0.}$$

Cette dernière relation est donc équivalente à l'hypothèse de Riemann.