Problème de géométrie résolu par l'analyse de Diophante

par
M. L. Euler

Présenté à la Conférence le 4 Mars 1782

§. 1.

Le sujet du problème dont il s'agit dans ce mémoire, est tiré de la Trigonométrie rationnelle. On demande les trois côtés x, y, z, d'un triangle dont les lignes tirées des angles par le centre de gravité du triangle soyent toutes trois exprimées en nombres rationnels ; c'est-à-dire : on demande trois nombres x, y, z, tels que

$$\begin{array}{rcl} 2xx + 2yy - zz = \square \\ 2yy + 2zz - xx = \square \\ 2zz + 2xx - yy = \square. \end{array}$$

J'ai déjà donné, à différentes reprises, des solutions de ce problème, sans qu'aucune m'ait entièrement satisfait. Celle que je présente ici réunit, à beaucoup d'élégance, la plus grande généralité. Mais avant d'entrer en matière il sera bon de faciliter la solution par le Lemme suivant :

Lemme.

§. 2. Deux nombres de la forme :

$$A^2 + 2PAB + B^2 \quad \text{et} \quad A^2 + 2QAB + B^2,$$

seront toujours quarrés, lorsque

$$A = 4(P + Q) \quad \text{et} \quad B = (P - Q)^2 - 4.$$

Démonstration.

Multiplions l'une de ces formes par l'autre, et nous aurons le produit suivant :

$$A^4 + 2(P + QA^3B + 2(2PQ + 1)A^2B^2 + 2(P + Q)AB^3 + B^4.$$

Soit la racine de cette quantité quarrée

$$A^2 + (P + Q)AB - B^2,$$

et puisque le quarré est

$$A^4 + 2(P + Q)A^3B + [(P + Q)^2 - 2]A^2B^2 - 2(P + Q)AB^3 + B^4,$$

Transcription en LaTex d'un article trouvable à l'adresse
https://scholarlycommons.pacific.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1753context=euler-works
référence E754 dans la page
https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/index.8.html,
Denise Vella-Chemla, février 2021.

en comparant cette forme avec la précédente on voit que, pour que l'une soit égale à l'autre, il faut que

$$((P-Q)^2-4)A = 4(P+Q)B,$$

donc $A = 4(P+Q)$ et $B = (P-Q)^2 - 4$.

Substituant ces valeurs dans l'une ou l'autre des deux formes du lemme, elle devient un quarré. Par exemple la première, en y faisant ces substitutions, deviendra :

$$16(P+Q)^2 + 2P[4(P+Q)(P-Q)^2 - 16(P+Q)] + (P-Q)^4 - 8(P-Q)^2 + 16,$$

où il faut remarquer que

$$(P-Q)^4 + 8P(P+Q)(P-Q)^2 = (P-Q)^2 - 3P + Q)^2,$$
$$16(P+Q)^2 + 32P(P+Q) - 8(P-Q) = -8(P-Q)(3P+Q).$$

De cette façon la forme se réduit à

$$((P-Q)(3P+Q)-4)^2.$$

Or le produit des deux formes du lemme étant un quarré et la première l'étant aussi, il est clair que l'autre forme doit être nécessairement de même un quarré. Aussi la racine se trouvera-t-elle, par des procédés semblables, être $(Q-P)(3Q+P)-4$.

Corollaire.

§. 3. À l'égard des valeurs de A et B il faut remarquer :
1°) qu'à cause de la permutabilité évidente de ces deux quantités, on pourra aussi faire :

$$A = (P-Q)^2 - 4 \quad \text{et} \quad B = 4(P+Q);$$

2°) que ces valeurs peuvent être simplifiées dans certains cas. Car puisque $(P-Q)^2 = (P+Q)^2 - 4PQ$, en mettant cette valeur dans l'expression de B, on aura $B = (P+Q)^2 - 4(PQ+1)$, de sorte que, toutes les fois que $PQ+1 = n(P+Q)$, on pourra diviser A et B par le même nombre $P+Q$, et on aura $A = 4$ et $B = P+Q-4n$. Quant au racines des deux formes proposées, savoir

$$(P-Q)(3P+Q)-4 \quad \text{et} \quad (Q-P)(3Q+P)-4,$$

comme la première peut être représentée par

$$(P+Q)(P-Q) + 2P(P-Q) - 4,$$

et que $2P(P-Q) - 4 = 2P(P+Q) - 4(PQ+1)$ à cause de $PQ+1 = n(P+Q)$, on pourra diviser par $P+Q$, de sorte que la racine de la première forme $= 3P-Q-4n$, et, à cause de la permutabilité de P et Q la racine de l'autre forme sera $3Q-P-4n$.

Solution du Problème proposé.

§. 4. Soit

$$\begin{gathered}2xx + 2yy - zz = pp\\2xx + 2zz - yy = qq\\2yy + 2zz - xx = rr\end{gathered}$$

et en mettant $xx + yy + zz = s$, on aura

$$pp + 3zz = qq + 3yy = rr + 3xx = 2s.$$

Ensuite on trouve aussi que

$$\begin{gathered}2pp + 2qq - rr = 9xx\\2pp + 2rr - qq = 9yy\\2qq + 2rr - pp = 9zz.\end{gathered}$$

Quoique ces propriétés ne contribuent en aucune manière à la solution du problème, elles méritoient bien d'être remarquées ici en passant. Quant à la solution même, elle se déduit des opérations suivantes :

§. 5. Prenons la différence de la première et seconde de nos trois équations fondamentales, qui sera

$$pp - qq = 3(yy - zz),$$

ou bien, en facteurs on aura

$$(p + q)(p - q) = 3(y + z)(y - z).$$

Soit

$$p + q = \frac{3a}{b}(y - z)$$

$$p - q = \frac{b}{a}(y + z)$$

et la somme des quarrés sera ;

$$(p + q)^2 + (p - q)^2 = 2pp + 2qq = \frac{9aa}{bb}(y - z)^2 + \frac{bb}{aa}(y + z)^2.$$

Or les équations fondamentales donnent

$$\begin{gathered}2pp + 2qq = 8xx + 2yy + 2zz, \text{ ou bien}\\2pp + 2qq = 8xx + (y + z)^2 + (y - z)^2,\end{gathered}$$

d'où l'on tire cette équation entre x, y, z :

$$\frac{9aa}{bb}(y - z)^2 + \frac{bb}{aa}(y + z)^2 = 8xx + (y + z)^2 + (y - z)^2,$$

qui peut aussi être représentée ainsi :

$$8xx = \frac{9aa - bb}{bb}(y - z)^2 + \frac{bb - aa}{aa}(y + z)^2.$$

§. 6. La troisième équation fondamentale $2yy - 2zz - xx = rr$ se transforme aisément en celle-ci :

$$(y + z)^2 + (y - z)^2 - xx = rr,$$

qui multipliée par 8 devient :

$$8rr = 8(y+z)^2 + 8(y-z)^2 - 8xx$$

équation qui, si l'on met à la place de $8xx$ la valeur trouvée au précédent §, sera

$$8rr = \frac{9(bb-aa)}{bb}(y-z)^2 + \frac{9aa-bb}{aa}(y+z)^2.$$

§. 7. Mettons maintenant

$$y+z = a(c+d)\ ;$$
$$y-z = b(c-d)\ ;$$

et les deux expressions trouvées pour $8xx$ et $8rr$ prendront les formes suivantes :

$$2xx = 2aa(cc+dd) + cd(bb-5aa)\ ;$$
$$2rr = 2bb(cc+dd) + cd(9aa-5bb)\ ;$$

qui, divisées l'une par $2aa$ et l'autre par $2bb$, donneront :

$$\frac{xx}{aa} = cc + dd + \frac{bb-5aa}{2aa}\ .\ cd\ ;$$

$$\frac{rr}{bb} = cc + dd + \frac{9aa-5bb}{2bb}\ .\ cd.$$

§. 8. En comparant ces deux expressions avec les formes du lemme, nous verrons que $A = c, B = d$,

$$P = \frac{bb-5aa}{4aa} \qquad \text{et} \qquad Q = \frac{9aa-5bb}{4bb}.$$

De ces valeurs on déduit aisément :

$$n(P+Q) = \frac{n(b^4 - 10aabb + 9a^4)}{4aabb}\ ;$$

$$PQ + 1 = -\frac{5}{4}\frac{(b^4 - 10aabb + 9a^4)}{4aabb}\ ;$$

donc

$$n = -\frac{5}{4}.$$

§. 9. Or en vertu du corollaire §. 3., il y a $A = 4$ et $B = P + Q - 4n$, donc $c = 4$ et $d = \dfrac{(9aa+bb)(aa+bb)}{4aabb}$, portant

$$y+z = \frac{a(16aabb + (9aa+bb)(aa+bb))}{4aabb}\ ;$$

$$y-z = \frac{b(16aabb - (9aa+bb)(aa+bb))}{4aabb}\ ;$$

Et puisque, en vertu du même corollaire,

$$\frac{x}{a} = 3P - Q - 4n \qquad \text{et} \qquad \frac{r}{b} = 3Q - P - 4n,$$

nous aurons aussi

$$x = \frac{a((9aa+bb)(aa+bb) - 2(9a^4 - b^4))}{4aabb}\ ;$$

$$r = \frac{b((9aa+bb)(aa+bb) - 2(9a^4 - b^4))}{4aabb}\ ;$$

Enfin on aura

$$p + q = \frac{3a}{b}(y - z)\ ;$$

$$p - q = \frac{b}{a}(y + z)\ .$$

§. 10. Mettons pour abréger

$$\begin{aligned} &C = 16aabb\ ; \\ &D = (9aa+bb)(aa+bb)\ ; \\ &F = 2(9a^4 - b^4)\ ; \end{aligned}$$

et en supprimant le diviseur. commun $4aabb$, nous aurons

$$\begin{array}{r||r} x = a(D-F) & r = b(D+F) \\ y+z = a(C+D) & p+q = 3a(C-D) \\ y-z = b(C-D) & p-q = b(C+D) \end{array}$$

Exemple 1.

§. 11. Soit $a = 1$ et $b = 2$, et on aura $C = 64$, $D = 65$, $F = -14$, donc

$$\begin{array}{r||r} x = 79 & r = 102 \\ y+z = 129 & p+q = -3 \\ y-z = -2 & p-q = 258 \end{array}$$

par conséquent on aura

$$\begin{array}{r||r} x = 79 & p = \dfrac{255}{2} \\ y = \dfrac{127}{2} & q = \dfrac{-261}{2} \\ z = \dfrac{131}{2} & r = 102 \end{array}$$

Exemple 2.

§. 12. Soit $a = 2$ et $b = 1$, de sorte que $C = 64$, $D = 185$ et $F = 286$, donc

$$\begin{array}{r||r} x = -202 & r = +471 \\ y+z = +498 & p+q = -726 \\ y-z = -121 & p-q = +249 \end{array}$$

On aura donc

$$\begin{array}{r||l} x = 202 & p = \dfrac{477}{2} \\[2ex] y = \dfrac{377}{2} & q = \dfrac{975}{2} \\[2ex] z = \dfrac{619}{2} & r = 471 \end{array}$$

§. 13. Si l'on veut avoir des solutions en nombres entiers, il est évident qu'on n'a qu'à multiplier par 2 tous les six nombres de chacun des deux exemples précédents. En voilà encore quelques solutions :

$$\begin{array}{rrr} 68 & 87 & 85 \\ 158 & 127 & 131 \\ \hline 159 & 325 & 314 \\ 619 & 377 & 404 \\ \hline 477 & 277 & 446 \\ 569 & 881 & 640 \end{array}$$