Présentation topologique
du calcul propositionnel intuitionniste

Jean Drabbe

I. Introduction

La présentation élémentaire usuelle du calcul propositionnel classique par l'intermédiaire des tables de vérité a fait très tôt l'objet de généralisations permettant un nombre de valeurs de vérité supérieur à 2 (voir, par exemple, E. Post "Introduction to a General Theory of Elementary Propositions", Amer. Journal of Math. 43 (1921), p. 163-185).

Notons qu'il résulte immédiatement du théorème de représentation de M. Stone (1934) pour les algèbres de Boole que si l'on utilise les éléments d'une algèbre de Boole (de cardinal ≥ 2) B, $\vee$, $\wedge$, ', $\rightarrow$ (où $a \rightarrow b$ est défini par $a' \vee b$) comme valeurs de vérité, en interprétant :

- le "vrai" par le maximun de B, $\vee$, $\wedge$, $'$, $\rightarrow$,
- la disjonction par $\vee$,
- la conjonction par $\wedge$,
- la négation par ' (complément booléen),
- l'implication par $\rightarrow$,

on retrouve exactement les tautologies classiques.

Cette remarque sera utilisée plus 1oin.

Nous allons montrer que la présentation et l'étude élémentaires du calcul propositionnel intuitionniste peuvent être réalisées de manière très simple en utilisant les ouverts de la droite réelle (avec la topologie usuelle) comme valeurs de vérité en admettant l'ouvert impropre $\mathbb{R}$ comme *valeur désignée* (valeur "vraie").

Cette présentation résulte essentiellement de travaux de A. Tarski, "*Der Aussagenkalkül und die Topologie*", Fund. Math. 31 (1938), p. 103-134 et de J. McKinsey - A. Tarski "*On closed Elements in closure Algebras*", Annals of Math, 47 (1946), p. 122-162.

Une introduction (très détaillée) à la logique intuitionniste peut être trouvée dans le récent ouvrage de M. Dummett "*Elements of intuitionisn*" Oxford Univ. Press (1977).

II. Notations - Terminologie

Désignons par $\mathcal{T}$ l'ensemble des ouverts de la droite réelle.

Pour $A \subset \mathbb{R}$, posons :

$-A = \mathbb{R}\backslash A$,

int(A) = intérieur de A,
$A^{\perp}$=int$(-A)$.

Nous dirons que A ($\in \mathcal{T}$) est un *ouvert régulier* ssi $A^{\perp\perp} = A$.

L'ensemble Rég des ouverts réguliers peut être érigé en algèbre de Boole (complète) Rég, $\vee$, $\wedge$, ', $\rightarrow$ en posant :
$A \vee B = (A \cup B)^{\perp\perp}$
$A \wedge B = A \cap B$
$A' = A^{\perp\perp}$
$A \rightarrow B = (A^{\perp} \cup B)^{\perp\perp}$.

Ce résultat est essentiellement une conséquence des propriétés :
Si $A, B \in \mathcal{T}$, alors :
(i) $A \subset A^{\perp\perp}$
(ii) $A^{\perp} = A^{\perp\perp\perp}$
(iii) $A \subset B \implies A^{\perp\perp} \subset B^{\perp\perp}$
(iv) $(A \cap B)^{\perp\perp} = A^{\perp\perp} \cap B^{\perp\perp}$.

(voir, par exemple, P. Halmos "*Lectures on Boolean Algebras*", Van Nostrand, 1963).

III. Tables de vérité topologiques pour la logique intuitionniste

Ensemble des valeurs de vérité : $\mathcal{T}$

Valeur désignée : $\mathbb{R}$

p	$\vee$	q	p	$\wedge$	q
A	$A \cup B$	B	A	$A \cap B$	B
	$\sim$	p	p	$\implies$	q
	$int(-A)$	A	A	$int(-A \cup B)$	B

Notons que les tables de vérité de $\vee$ et $\wedge$ sont naturelles car la réunion et l'intersection de deux ouverts sont encore des ouverts. Comme il n'est pas nécessairement vrai que si A et B sont des ouverts, $-A$ et $-A \cup B$ sont encore des ouverts, la "correction" "int" a été apportée à la situation classique pour définir les tables de vérité de $\sim$ et $\implies$.

Nous appellerons "*tautologie intuitionniste*" toute formule dont la valeur de vérité est $\mathbb{R}$, quelles que soient les valeurs de vérité attribuées à ses variables propositionnelles.

Exemples

i) $(p \wedge q) \implies p$ est une tautologie intuitionniste car pour $A, B \in \mathcal{T}$, int$(-(A \cap B) \cup A) = \mathbb{R}$;

ii) $\sim\sim p \implies p$ n'est pas une tautologie intuitionniste car $\sim\sim p \implies p$ a la valeur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ lorsque p reçoit la valeur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$;

iii) On vérifie très facilement que
$p \vee \sim p$
$(\sim p \implies \sim q) \implies (q \implies p)$
ne sont pas des tautologies intuitionnistes ;

iv) *toute tautologie intuitionniste est une tautologie classique* (à une traduction triviale près, les tables de vérité intuitionnistes restreintes aux cas où les variables prennent leurs valeurs dans $\{\varnothing, \mathbb{R}\}$ sont les tables de vérité classiques.

IV. La structure $\mathcal{T}, \vee, \wedge, ', \rightarrow$

Les tables de vérité intuitionnistes fournissent une motivation naturelle nous permettant d'ériger $\mathcal{T}$ en structure $\mathcal{T}, \vee, \wedge, ', \rightarrow$ en posant :

$A \vee B = A \cup B$,
$A \wedge B = A \cap B$,
$A' = A^{\perp}$,
$A \rightarrow B = \operatorname{int}(-A \cup B)$.

Ceci va nous permettre de donner une démonstration simple du théorème de Glivenko.

Théorème de Glivenko

Si φ est une tautologie classique, alors $\sim\sim \varphi$ est une tautologie intuitionniste.

Notons que la réciproque est vraie mais triviale en vertu de la propriété (iv) ci-dessus.

V. Démonstratton du théorème de Glivenko

(a) En vertu des propriétés (i) à (iv) ci-dessus, pour tout ouvert A, $A^{\perp\perp}$ est un ouvert régulier.

Soit $\perp\perp$ l'application de $\mathcal{T}$ dans Rég définie par

$$A \longmapsto A^{\perp\perp}$$

Il est aisé de vérifier (en utilisant les propriétés (i) à (iv) précédentes que $\perp\perp$ est un morphisme de $\mathcal{T}, \vee, \wedge, ', \rightarrow$ dans Rég, $\vee, \wedge, ', \rightarrow$.

(b) soit $\varphi(p_1, \ldots, p_n)$ une formule du calcul propositionnel intuitionniste. Si $A_1, \ldots, A_n$ sont dans $\mathcal{T}$, nous notons $\varphi_{\mathcal{T}}(A_1, \ldots, A_n)$ la valeur topologique de φ pour la valuation topologique qui donne à p_i la valeur A_i, $\varphi_{\text{Rég}}(A_1^{\perp\perp}, \ldots, A_n^{\perp\perp})$ l'ouvert régulier, valeur booléenne de φ pour la valuation booléenne qui donne à p_i la valeur $A_i^{\perp\perp}$.

En vertu de (a), on a :

$$(\varphi_{\mathcal{T}}(A_1, \ldots, A_n))^{\perp\perp} = \varphi_{\text{Rég}}(A_1^{\perp\perp}, \ldots, A_n^{\perp\perp})$$

Il en résulte que si φ est une tautologie classique, alors

$$(\sim\sim \varphi)_{\mathcal{T}}(A_1, \ldots, A_n) = \mathbb{R} \quad \text{pour tout } A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{T}$$

et, par conséquent, $\sim\sim\varphi$ est une tautologie intuitionniste.
c.q.f.d.

On montre aisément en utilisent le théorème de Glivenko et des considérations topologiques élémentaires que si $\varphi \iff \psi$ est une tautologte classique, alors

$$\sim\sim\varphi \iff \sim\sim\psi$$

est une tautologie intuitionniste.

VI. Indépendance des connecteurs $\vee, \wedge, \sim, \implies$ en logique propositionnelle intuitionniste

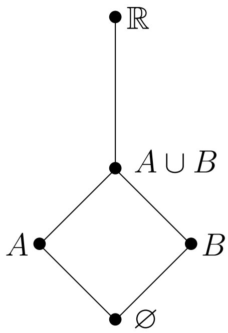
Il est bien connu que chacun des connecteurs $\vee, \wedge, \sim, \implies$ de la logique intuitionniste est indépendant des trois autres.

Nous allons établir, à titre d'illustration, l'indépendance de $\vee$ par rapport à $\wedge, \sim, \implies$ en utilisant une méthode topologique.

Posons $\quad A = \bigcup_{z\in\mathbb{Z}} (2z, 2z+1)$

$$B = \bigcup_{z\in\mathbb{Z}} (2z+1, 2z+2).$$

Trivialement, $\{\varnothing, A, B, \mathbb{R}\}$ est stable pour l'intersection. Cette partie est stable pour ' (=int-.) car $\varnothing' = \mathbb{R}, A' = B, B' = A$ et $\mathbb{R}' = \varnothing$.



La table suivante donne les valeurs de $\to$ pour les arguments dans $\{\varnothing, A, B, A\cup B, \mathbb{R}\}$.

$\{\varnothing, A, B, \mathbb{R}\}$ est donc stable pour $\to$.

$\to$	$\varnothing$	A	B	$A\cup B$	$\mathbb{R}$
$\varnothing$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
A	B	$\mathbb{R}$	B	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
B	A	A	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$A\cup B$	$\varnothing$	A	B	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$\mathbb{R}$	$\varnothing$	A	B	$A\cup B$	$\mathbb{R}$

Notons que l'on a toujours :

$$X \to Y = \mathbb{R} \quad \text{ssi} \quad X \subset Y.$$

$p \vee q$ ne peut donc être équivalente à une formule ne faisant intervenir que $\wedge, \sim, \to$ (donner à p la valeur A et à q la valeur B).

VII. Remarque

Les définitions données dans le paragraphe 3 peuvent être adaptées naturellement à tout espace topologique E, ce qui permet d'introduire la notion de E-tautologie.

Si $\mathcal{E}$ est 1a classe de tous les espaces topologiques, on a :

$$\bigcap_{E \in \mathcal{E}} \{\varphi \mid \varphi \text{ est une E}-\textit{tautologie}\} = \text{ l'ensemble des tautologies intuitionnistes.}$$

Ce résultat est établi dans l'article de McKinsey, Tarski mentionné plus haut. Cette "propriété universelle" de la topologie réelle se retrouve notamment pour les rationnels munis de la topologie induite (par celle des réels) et donc pour tous les espaces dénombrables métrisables sans points isolés (théorème de Sierpinski).

VIII. Variante d'un résultat de K. Gödel

Il est trivial que si E est un espace topologique à 1 élément, alors l'ensemble des E-tautologies est l'ensemble des tautologies classiques.

Nous allons nantrer qu'on ne peut espérer une situation aussi simple pour le calcul propositionnel intuitionniste ; de manière précise :

Si E est un espace topologique ne contenant qu'un nombre fini d'ouverts, alors l'ensemble des E-tautologies est distinct de l'ensemble des tautologies intuitionnistes.

Démonstration :

Supposons que E contienne exactement n ouverts.

(a) Il est aisé de vérifier que

$$\bigvee_{1 \leq i < j \leq n+1} p_i \iff p_j$$

est une E-tautologie.

(b) Nous montrons que la formule considérée en (a) n'est pas une tautologie intuitionniste. Afin d'éviter des notations trop compliquées, supposons $n = 5$; la généralisation sera immédiate et triviale.

Définissons les ouverts (réels) A_1 à A_4 par :

$$A_1 = \bigcup_{n\in\omega} \left(-\frac{1}{4n}, -\frac{1}{4n+1}\right) \cup \bigcup_{n\in\omega} \left(\frac{1}{4n+1}, \frac{1}{4n}\right)$$

$$\text{(en posant } -\frac{1}{0} = -\infty, \frac{1}{0} = \infty\text{)},$$

$$A_2 = \bigcup_{n\in\omega} \left(-\frac{1}{4n+1}, -\frac{1}{4n+2}\right) \cup \bigcup_{n\in\omega} \left(\frac{1}{4n+2}, \frac{1}{4n+1}\right)$$

$$A_3 = \bigcup_{n\in\omega} \left(-\frac{1}{4n+2}, -\frac{1}{4n+3}\right) \cup \bigcup_{n\in\omega} \left(\frac{1}{4n+3}, \frac{1}{4n+2}\right)$$

$$A_4 = \bigcup_{n\in\omega} \left(-\frac{1}{4n+3}, -\frac{1}{4n+4}\right) \cup \bigcup_{n\in\omega} \left(\frac{1}{4n+4}, \frac{1}{4n+3}\right)$$

Posons
$$\begin{aligned} B_1 &= \mathbb{R}, \\ B_2 &= A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4, \\ B_3 &= A_1 \cup A_2 \cup A_3, \\ B_4 &= A_1 \cup A_2, \\ B_5 &= A_1, \\ B_6 &= \varnothing, \end{aligned}$$

Si l'on attribue à p_i la valeur B_i, la formule considérée en (a) reçoit une valeur distincte de $\mathbb{R}$ car pour $i < j$, $0 \notin \mathrm{int}(-B_i \cup B_j)$ (aucun ouvert comprenant 0 n'est contenu dans $-B_i \cup B_j$).

Noter cependant que le calcul propositiomnel intuitionniste est décidable (voir, par exemple l'ouvrage de Dummett mentionné plus haut).