ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur les zéros de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann.* Note de M. R.-J. BACKLUND, présentée par M. Émile Picard.

Soit $N(T)$ le nombre des zéros non réels de la fonction $\zeta(s) = \zeta(\sigma + it)$, dont les ordonnées vérifient la condition $0 < t \leq T$. On sait que ces zéros font tous partie du domaine $0 \leq \sigma \leq 1$.

Les zéros de la fonction entière

$$\xi(s) = \frac{1}{2}s(s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\,\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)$$

sont précisément les zéros non réels de $\zeta(s)$. Donc, si le nombre T n'est pas égal à l'ordonnée d'un de ces zéros, la fonction $\xi(s)$ admet exactement $2N(T)$ zéros à l'intérieur du rectangle R ayant pour sommets les points $2-iT, 2+iT, -1+iT, -1-iT$, tandis qu'elle ne s'annule pas sur son contour.

D'après le principe connu de Cauchy, on aura donc

$$2N(T) = \frac{1}{2\pi}\,\Delta_R \arg.\xi(s),$$

$\Delta_R \arg.\xi(s)$ désignant l'accroissement que prendra l'argument de la fonction $\xi(s)$ lorsque le point s décrit le contour du rectangle R dans le sens direct.

Mais, puisque la fonction $\xi(s)$ est réelle tant sur l'axe réel que sur la droite $\sigma = \frac{1}{2}$, elle prendra des valeurs conjuguées en deux points quelconques symétriques par rapport à l'une de ces droites, et $\Delta_R \arg.\xi(s)$ est donc égal à quatre fois l'accroissement $\Delta_{ABC} \arg.\xi(s)$ que prendra $\arg.\xi(s)$ lorsque s décrit la portion ABC du contour de R, où $A = 2, B = 2+iT, C = \frac{1}{2}+iT$. Par suite, l'égalité précédente peut s'écrire

$$N(T) = \frac{1}{\pi}\Delta_{ABC} \arg.\xi(s).$$

En évaluant l'accroissement de $\arg.\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)$ à l'aide de la formule de Stirling, on en tire pour $N(T)$ cette expression[1]

(1) $$N(T) = \frac{T}{2\pi}\log\frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + \frac{7}{8} + P(T) + O\left(\frac{1}{T}\right),$$

Référence : Comptes-rendus de l'Académie des Sciences, 1914, 1er Semestre. (T. 158, N° 26, p. 1979-1981, Séance du 29 juin 1914.).
Retranscription Denise Vella-Chemla, août 2022.

[1]Suivant l'exemple de M. Landau, nous désignerons par $O(x)$ toute fonction de x dont le quotient par x reste fini lorsque x tend vers ∞.

où

$$(2) \qquad P(T) = \frac{1}{\pi}\Delta_{ABC} \arg . \zeta(s).$$

Pour trouver une limite supérieure de $|P(T)|$, nous faisons d'abord observer que, si la partie réelle de la fonction $\zeta(s)$

$$\Re\,\zeta(s) = \frac{1}{2}[\zeta(\sigma + it) + \zeta(\sigma - it)]$$

s'annule n fois sur ABC, on a $|\Delta_{ABC} \arg . \zeta(s)| < (n+1)\pi$, d'où

$$|P(T)| < n + 1.$$

Sur le segment AB, on a constamment $\Re\,\zeta(s) > 0$. Pour évaluer une limite du nombre des zéros de $\Re\,\zeta(s)$ situés sur le segment BC, nous allons considérer la fonction

$$f(s) = \frac{1}{2}[\zeta(s + iT) + \zeta(s - iT)],$$

qui, pour $s = \sigma$, se confond avec $\Re\,\zeta(\sigma + iT)$. Si l désigne le nombre des zéros de $f(s)$ compris dans le cercle $|s - 2| \leq \frac{3}{2}$, on aura évidemment

$$n \leq l.$$

Il s'agit donc de trouver une limite supérieure du nombre l.

À cet effet, nous appliquerons à la fonction $f(s)$ le théorème de M. Jensen ; $f(s)$ étant holomorphe dans le cercle $|s - 2| \leq 2$ dès que $T > 2$, ce théorème nous donne

$$l < \frac{\log \frac{M}{m}}{\log \frac{4}{3}},$$

où $m = |f(2)| = |\Re\,\zeta(2 + iT)|$, et

$$M = \max|f(2 + 2e^{i\varphi})|, \qquad \text{pour } 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

Or la quantité m reste, pour toute valeur de T, supérieure à une certaine limite positive, et, d'autre part, le module de $\zeta(s)$ vérifie pour $0 \leq \sigma \leq 4$ l'inégalité

$$|\zeta(s)| < |t|^c,$$

où c désigne une constante. On en conclut successivement

$$\log M = O(\log T), \quad l = O(\log T), \quad n = O(\log T),$$

et enfin

$$P(T) = O(\log T),$$

et l'égalité (1) peut donc s'écrire

$$(1') \qquad N(T) = \frac{T}{2\pi}\log\frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + \frac{7}{8} + O(\log T).$$

Nous sommes ainsi arrivé directement à cette importante formule, sans invoquer d'autres résultats relatifs aux zéros non réels de $\zeta(s)$ que ceux qui résultent de l'expression de $\zeta(s)$ sous forme de produit infini, donnée par Euler, et de la relation $\xi(s) = \xi(1-s)$, démontrée par Riemann.

La formule (1') une fois établie, on en conclut immédiatement, non seulement que $\zeta(s)$ admet en réalité une infinité de zéros complexes, ρ_ν, mais encore que la série $\sum\left|\frac{1}{\rho_\nu}\right|^{1+\varepsilon}$ converge quelque petit que soit le nombre positif ε, tandis que la série $\sum\left|\frac{1}{\rho_\nu}\right|$ est divergente.

Notre méthode apporte encore d'autres simplifications dans la théorie de $\zeta(s)$ et des fonctions analogues $L(s)$ de Dirichlet.

En précisant certains détails dans la démonstration ci-dessus, nous en avons tiré pour $P(T)$ l'inégalité

$$|P(T)| < 0,275 \log T + 0,979 \log\log T + 7,446 \qquad (T > 200),$$

qui est un peu plus précise que celle qu'a obtenue dernièrement M. Grossmann[2] à l'aide de la méthode de M. v. Mangoldt.

Dans une Note antérieure[3] nous avions trouvé par un calcul direct

$$N(100) = 29; \qquad N(200) = 79.$$

et d'autre part nous avions démontré, en nous servant de la méthode donnée par M. Lindelöf[4], que les 29 premiers zéros non réels de $\zeta(s)$ sont tous situés sur la droite $\sigma = \frac{1}{2}$. En continuant les calculs par la même méthode, à laquelle nous avons d'ailleurs apporté diverses simplifications, nous avons vérifié que les 50 zéros suivants

[2] *Ueber die Nullstellen der Riemannschen ζ-Funktion und der Dirichletschen L-Funktionen; Dissertation* (Göttingen, 1913).

[3] *Einige numerische Rechnungen die Nullpunkte der Riemannschen ζ-Funktion betreffend* (*Ofversigt af Finska Vetenskaps-Societetens Förhandlingar*, LIV, A,1912).

[4] *Quelques applications d'une formule sommatoire générale* (*Acta. Soc. Scient. Fenn.*, t. XXXI, 1902).

sont également situés sur la droite $\sigma = \frac{1}{2}$ qui contient ainsi au moins tous ceux parmi les zéros non réels de la fonction $\zeta(s)$ dont les ordonnées sont comprises entre les limites - 200 et 200.