

**Alain Connes**

*Géométrie non-commutative*

*Médaille Fields*

*Professeur de Mathématique, Collège de France, Institut des Hautes Études Scientifiques, et Université de l'État de l'Ohio*

Je crois que les mathématiques sont un moyen pour l'esprit humain de créer des concepts. De multiples façons, les mathématiques jouent un rôle que la philosophie aurait pu jouer dans la création de concepts qui peuvent être utilisés dans le monde réel. Cela prend du temps pour que les concepts évoluent et soient utilisés dans le monde réel, mais la réelle fabrique, ce sont les mathématiques. Ces concepts ont à voir avec la forme et les choses abstraites entre autres, et ils sont plus subtils et divers que peuvent l'être les nombres. C'est vraisemblablement quelque chose que le grand public ne réalise pas. Les mathématiciens utilisent des nombres seulement lorsqu'ils en ont besoin. On pourrait dire que l'idée d'énergie provient de la physique, mais en fait, elle trouve son origine dans les mathématiques. Les mathématiques sont le langage ultime dans lequel les idées abstraites sont distillées et deviennent très précises, et elles peuvent alors être utilisées dans différents domaines. En même temps, les mathématiques peuvent être très dures parce qu'elles résistent. La réalité est coriace ; vous ne pouvez pas faire ce que vous voulez. C'est effrayant. On ne devrait pas être effrayé. Il y a une jolie citation de Alexander Grothendieck qui dit, "Être effrayé par le fait de commettre une erreur, c'est la même chose qu'être effrayé par la vérité."

J'ai une anecdote au sujet de l'enfant d'un de mes amis qui montre l'essence des mathématiques très clairement. A l'âge de 5 ans, il était sur la plage avec son père. Il avait été assez malade vers 3 ans et son père était toujours inquiet pour sa santé. Pendant une heure, l'enfant était resté tranquillement assis sur la plage en ayant l'air pâle. Le père était angoissé. Alors l'enfant est venu voir son père et lui a dit, "Papa, il n'y a pas de plus grand nombre." Le père était étonné. Il n'était pas mathématicien, il a demandé à l'enfant, "Comment le sais-tu?". L'enfant a donné une preuve. On entend beaucoup d'inepties à propos d'enfants apprenant à compter sur leurs doigts. Ici vous avez un petit enfant de cinq ans qui a trouvé, de lui-même, un fait mathématique véritable et il l'a trouvé dans son cerveau, non pas dans un livre. Il a découvert cela par pure réflexion et il a trouvé une preuve. C'est ça l'essence des mathématiques. Bien sûr, il y a une tradition. Il y a plein de livres, et les choses que nous apprenons ne s'évaporent pas parce qu'elles ont une démonstration. D'un autre côté, les mathématiques, c'est quelque chose avec quoi vous pouvez être directement en contact sans outil intermédiaire. C'est la caractéristique la plus remarquable des mathématiques. Vous pouvez être complètement livré à vous-même et vous pouvez toujours penser aux mathématiques. Vous ne ferez pas forcément des mathématiques qui seront importantes parce que pour faire ça, vous devez avoir lui les dernières avancées. Je ne suis pas en train de dire que vous devriez travailler tout seul dans votre coin. Vous n'iriez nulle part si vous faisiez cela. Mais ce que je suis en train de dire, c'est que quand vous débutez, pour vraiment devenir un mathématicien, la clef est de réaliser qu'à un certain moment, vous devez arrêter de lire des livres. Vous devez penser par vous-même. Vous devez devenir votre propre autorité. Il n'y a pas d'autorité à laquelle vous deviez vous référer. À un

---

Extrait de *Mathematicians : an outer view of an inner world*, Mariana Cook, 2009, Princeton University Press.

moment donné, vous devez réaliser que le fait qu'une chose soit ou pas écrite dans un livre n'a pas d'importance. Ce qui a de l'importance, c'est la question de savoir si vous avez une preuve et si vous êtes sûr de cette preuve. Le reste n'a pas d'importance. Cela peut arriver pour le petit enfant très tôt.

En ce qui concerne mon propre travail, ma thèse, vous avez le point de vue cartésien, qui est celui de la géométrie ordinaire. Là vous avez des coordonnées, etc. Mais il y a des espaces qui sont plus compliqués parce que ce sont des espaces dans lesquels vous ne faites pas que regarder les points d'ensembles, mais vous regardez aussi les relations entre les points. Ces nouveaux ensembles, ces ensembles avec des relations, peuvent être décrits par des algèbres, mais ces algèbres sont non-commutatives. Cela a été d'abord trouvé par des physiciens et cela peut s'expliquer extrêmement simplement. Quand vous écrivez un mot sur un bout de papier, vous devez faire attention à l'ordre des lettres. Un ami à moi m'a envoyé un email un jour et pendant quelques instants, je n'ai pas pu en comprendre le sens. Cela m'a pris un peu de temps de réaliser que c'étaient mes nom et prénom qui étaient écrits, mais leurs lettres n'étaient pas dans l'ordre habituel. Quand on fait du calcul ordinaire sur les nombres ou bien de l'algèbre ordinaire, comme on l'appelle, on peut permuter les lettres. L'ordre des lettres n'a pas d'importance. si vous écrivez  $3 \times 5$ , c'est la même chose que  $5 \times 3$ . En physique, on a découvert que ce n'est pas le cas quand on observe des systèmes microscopiques. Vous devez faire attention. Ce que j'ai trouvé dans ma thèse, c'est que lorsque vous faites attention à l'ordre, le temps émerge. Le temps émerge de cette non-commutativité, du fait que vous fassiez attention à l'ordre des lettres. Cela m'a amené à mon travail sur la classification des facteurs. Après avoir travaillé là-dessus pendant dix ans, j'ai développé complètement une nouvelle géométrie appelée "géométrie non-commutative", dans laquelle on affine toutes les idées géométriques habituelles et on les applique aux nouveaux espaces. Ces espaces ont des propriétés surprenantes qui engendrent leur propre temps. Non seulement, elles engendrent leur propre temps, mais elles ont des caractéristiques qui vous permettent de les refroidir ou de les réchauffer. Vous pouvez faire de la thermodynamique avec elles. Il y a une partie complètement nouvelle de la géométrie et de l'algèbre qui est reliée à ces nouveaux espaces, appelée géométrie non-commutative, et sur laquelle j'ai travaillé quasiment toute ma vie.