Mathématiques, musique et inconscient

Alain Connes

Transcription de la conférence mamuphi
du 3 octobre 2026 à l'Ircam

Introduction et présentation

François Nicolas : Écoutez, merci, merci Alain d'être venu à Mamuphi. Je rappelle enfin, j'indique quand même à tout le monde un peu finalement la circonstance initiale, même si vous allez traiter ça tout à fait librement. Alain Connes avait fait une intervention à l'IHÉS - non pas à l'IHÉS, à l'Institut Henri Poincaré - qui exposait un rapport entre le site musical et les zéros de zêta, très succinct d'ailleurs, mais il se trouve qu'il y avait un petit papier qui nous avait vivement intéressés, en particulier parce que dans la manière dont Alain Connes présentait la problématique, essayant de rapprocher mathématique et musique, il introduisait aussi la philosophie sous l'aspect de la phénoménologie. Et donc on s'est dit : "Tiens, une problématique un peu du type Mamuphi, donc un peu la nôtre". Voilà, et donc on s'était dit : "Tiens, voilà une interlocution intéressante.". Alors, suite à quoi, on a rédigé une série de questions à Alain pour éclairer finalement sa problématique un peu sous notre manière propre de l'aborder - non pas comme étant la seule, l'unique, mais enfin pour un peu indiquer. Et donc il a gentiment accepté de venir nous parler aujourd'hui de quoi exactement ? On va voir. Oui, je vous laisse tout de suite la parole ; avant cela, alors le format, je vous redis : théoriquement on a trois heures devant nous, donc vous avez largement le temps de parler. L'idée quand même assez classiquement dans Mamuphi, c'est que s'il y a des questions de compréhension en cours de route, les gens peuvent intervenir très très librement, et puis on renvoie à la fin ; on a une heure de discussion, donc vous avez deux heures, une heure de discussion, mais s'il y a moins, enfin bon, tout ça est très très souple. Merci encore.



Alain Connes : Et donc j'y vais.

François Nicolas : Vous y allez.

Alain Connes : J'y vais. Voilà.

Référence : https://www.youtube.com/watch?v=JQ7O-X5AvKs.
Révision de la transcription par downsub et l'ia deepseek : Denise Vella-Chemla, 22 octobre 2026.

Genèse de la conférence : le lien profond entre mathématiques et musique

Voilà. Alors donc je vais commencer et je vais expliquer un peu la genèse de ce laïus d'aujourd'hui, parce que c'est assez ancien en fait, et je pense être sûr - c'est notre histoire - mais je pense avoir trouvé un lien vraiment très profond entre mathématiques et musique. Et quand je dis mathématiques, si vous voulez, ce qui compte maintenant, c'est surtout mis en évidence par l'intelligence artificielle, ce qui compte dans les mathématiques, ce sont les concepts. Donc je m'efforcerai dans mon laïus d'expliquer le rôle absolument fondamental d'un concept qui est dû à Alexandre Grothendieck et qui va jouer un rôle central dans ce lien qui est nouveau à mes yeux entre la musique - mais la musique en tant que, comme on le verra, moyen de communiquer d'inconscient à inconscient - et les mathématiques. Et quand je dis moyen de communiquer d'inconscient à inconscient, je pense en fait à la distinction qu'il y a entre musique et langage. Et pour moi, cette distinction est essentielle, au sens où quand on essaie de réduire la musique à un langage, ou quand on essaie d'expliquer certaines pièces musicales, on se heurte à une impossibilité. Et le lien que je vais expliquer est un lien qui donne une idée de la manière dont la musique peut communiquer directement à l'inconscient. Donc bon, ça ne va pas être très très facile à expliquer bien entendu, mais je vais prendre le temps et surtout je vais essayer d'expliquer l'itinéraire que j'ai pris, qui a duré longtemps et qui m'a amené à cette idée.

Et dans cet itinéraire, il y a eu un moment important qui a été un peu pour me sortir des maths, si vous voulez, une invitation que j'ai eue en 2013 de la part d'Antoine Compagnon, qui faisait un cours sur Proust et qui m'a demandé d'intervenir dans un séminaire. Alors évidemment, pour un mathématicien, intervenir sur Proust, c'est un peu délicat. Heureusement, j'ai été aidé par Danye qui m'a donné une astuce pour commencer mon laïus et pour un peu dégeler l'atmosphère au début de mon laïus sur Proust. Et donc en fait, j'ai commencé mon laïus chez Compagnon en montrant un télégramme comme ça se faisait dans le temps, et j'expliquais que j'avais hésité à envoyer la veille de mon laïus à Antoine Compagnon un télégramme dont il est question dans Proust, et dont le texte est très simple, il dit : "Impossible venir, mensonge suit." Alors évidemment l'assemblée de proustiens qui était là a reconnu un épisode fameux d'À la recherche du temps perdu, et donc ça a dégelé l'atmosphère.

Bon, mais en fait dans mon laïus sur Proust, je voulais donner une espèce de, comment dire, de condensé mathématique de l'idée proustienne du temps, qui consiste à distinguer le temps de la physique du temps propre à un individu, dans lequel il y a finalement quelque chose qui joue un rôle essentiel - la sensation du temps qui passe joue avec, entre autres, les habitudes et les proximités inattendues. Donc les proximités entre un temps très ancien et un temps retrouvé, un temps du moment, etc. Et pour illustrer cela, j'avais fait une petite vidéo ; mais depuis que j'ai montré cette petite vidéo chez Antoine Compagnon, j'ai fait une petite improvisation de musique. Donc là on peut montrer l'enroulement. J'ai fait une petite improvisation de musique qui fait que bon, on ne s'ennuie pas trop quand on la voit, quoi. D'accord. Alors, c'est laquelle ? C'est ça. C'est l'enroulement. L'enroulement, d'accord. Deux secondes. C'est Proust. Ah non, c'est Proust. Si, oui, c'est ça. D'accord. Voilà, c'est ça. C'est bon. Donc on va écouter ça tranquillement. [1]

L'image de l'enroulement et le temps proustien

1. https://www.youtube.com/watch?v=Zh9mVUq0ZQM.

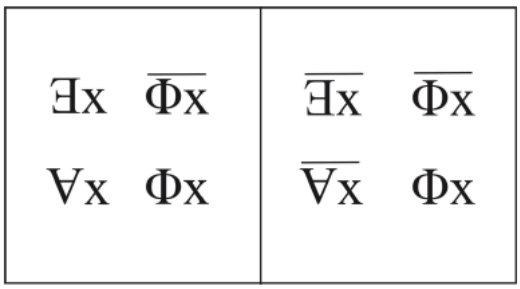
On va repartir au début parce que là, c'est le fil de l'existence qui s'enroule, d'accord ? En fait, il se déroule dans un espace de dimension plus grande. Pour le moment, il n'y a pas de coïncidence. Et là, vous voyez qu'à certains endroits, le fil s'enroule et revient très proche de là où il était avant. Donc la distance entre les points correspondants est beaucoup plus courte que leur distance si on suit le temps de la physique. Et ce que j'expliquais donc dans mon laïus, c'est qu'en fait on voit très lentement se former une forme qui est de dimension plus grande que le temps de la physique et qui est beaucoup plus intéressante que la linéarité du temps de la physique. Alors ça, donc c'était relié à Proust bien sûr, et ça a donné un peu l'idée qu'en fait il devait y avoir une image mentale pour, si vous voulez, quelque chose qui ressemble à notre expérience, etc., et qui ne soit plus dans la linéarité du temps. C'est-à-dire qui ne soit plus du tout quelque chose où on dit : "à telle date, j'ai fait ceci, à telle date, j'ai fait cela". Non, ce sont des choses qui ont un sens global, et il y a une image globale qui se détache et qui est celle-là.

Alors, à cette époque-là, je n'avais que cette image-là comme image globale. Elle montrait simplement qu'on pouvait avoir quelque chose de dimension plus grande comme une pelote de laine qui s'enroule, si vous voulez, et qui est constituée en fait des instants de conscience - des instants de conscience qui eux sont indexés par le temps de la physique, mais avec une proximité nouvelle qui est donnée justement par cette image.

La rencontre avec Patrick Gauthier-Lafaye et le rectangle de la sexuation

Alors entre-temps, ce qui s'est produit, c'est que je suis allé à une rencontre à Cerisy il y a quelques années - ça devait être en 2021. Et dans ces rencontres, si vous voulez, ce qui est intéressant, ce sont les gens qu'on rencontre, bien sûr. Alors, c'était un séminaire sur le temps, et j'ai fait la rencontre d'un psychanalyste qui s'appelle Patrick Gauthier-Lafaye, et on a commencé à discuter entre nous, bien sûr, à Cerisy. Et puis ensuite, on faisait des FaceTime où donc on discutait entre nous, et au fur et à mesure de nos discussions avec Patrick Gauthier-Lafaye, on a écrit un livre. Mais il faut que je vous explique comment ce livre est arrivé.

Donc la manière dont ce livre est arrivé : d'abord il faut que je vous prévienne que pendant je ne sais pas combien de laïus que j'avais faits avant, je me moquais de Lacan. C'est-à-dire qu'en général, quand je parlais de Lacan, je disais : c'est un vaste escroc, et puis etc., etc. Je faisais rigoler les gens. Alors, un jour, ce qui s'est produit, c'est que Patrick Gauthier-Lafaye m'a envoyé par mail un rectangle, et il me dit - alors il m'a envoyé un rectangle avec, dans ce rectangle, quelques formules - et il me dit par mail : "Est-ce que ce rectangle te dit quelque chose ?" Alors moi, j'ai regardé le rectangle pendant deux jours, et au bout de deux jours, j'ai répondu : "Écoute Patrick, ton rectangle, il ne me dit rien du tout." Bon, donc voilà la situation.



Et pendant la nuit qui a suivi mon message de réponse, comme il m'arrive très souvent de me réveiller à 4 h du matin, je me suis réveillé à 4 h du matin et je me suis dit : "Mais quand même, je suis quand même assez borné. Parce que si on utilise non pas la logique du tiers exclu, mais ce qu'on appelle la logique intuitionniste pour essayer de comprendre ce rectangle, ce rectangle a un sens. Ce rectangle a un sens". Il faut dire que ce rectangle avait été violemment critiqué dans le livre de Bricmont et Sokal, dans lequel ils prenaient à partie un peu tous les intellos français, et Lacan était en tête de liste. Et alors donc là, si vous voulez, le lendemain j'ai réécrit à Patrick Gauthier-Lafaye et je lui ai dit : mais écoute, oui, effectivement, j'ai été un peu vite, et ton rectangle, si on utilise la logique intuitionniste, il n'est pas contradictoire, il a un sens, il a un sens, mais il faudrait que tu me dises à qui il est dû, ce rectangle. Et alors là-dessus, Patrick m'a répondu : "Mais c'est ce qu'on appelle le rectangle de la sexuation, le diagramme de la sexuation, et il est dû à Lacan." Oh ! Là, je suis un peu tombé de mon siège, et s'est enclenché une discussion entre moi et Patrick Gauthier-Lafaye dans laquelle j'ai essayé de lui expliquer ce que c'était que la logique intuitionniste [2]

Topos de Grothendieck et logique intuitionniste

Alors, pour lui expliquer ce que c'est que la logique intuitionniste, je me suis attelé à la tâche de lui expliquer ce que c'est que la notion de topos de Grothendieck. Parce que quand on a un topos de Grothendieck, quand on navigue dans un topos de Grothendieck, on ne travaille plus en

2. *Interrogation de l'ia gemini* : Chez Jacques Lacan (notamment développé dans son Séminaire XX, Encore, 1972-1973), le tableau ou rectangle de la sexuation vise à formaliser la manière dont les sujets s'inscrivent dans la fonction phallique (Φ), définissant ainsi les positions subjectivement "homme" et "femme" indépendamment de la biologie. Le tableau s'organise en quatre formules réparties sur deux côtés : Côté Homme (partie gauche) :$\exists x\, \overline{\Phi x}$: Il existe un x qui n'est pas soumis à la fonction phallique (l'exception du Père primordial). $\forall x\, \Phi x$: Tout x est soumis à la fonction phallique (la règle générale de l'ensemble des hommes). Côté Femme (partie droite) :$\overline{\exists x}\, \overline{\Phi x}$: Il n'y a pas de x qui ne soit pas soumis à la fonction phallique (pas d'exception).$\overline{\forall x}\, \Phi x$: Pas-tout x est soumis à la fonction phallique (le sujet féminin n'est pas entièrement saisi par le phallus, ouvrant sur la notion de "jouissance autre"). Pour Lacan, ces formules démontrent sa formule célèbres : "Il n'y a pas de rapport sexuel", signifiant qu'il n'y a pas de complémentarité logique ou symétrique entre les sexes. *La critique de Alan Sokal et Jean Bricmont dans Impostures intellectuelles* : dans le chapitre consacré à Jacques Lacan, Sokal et Bricmont abordent le maniement par Lacan de la logique des prédicats, des quantificateurs (∀, ∃) et de la négation (représentée par la barre supérieure). Bricmont et Sokal critique le fait que les propositions de Lacan ne respectent pas les règles de la logique formelle (les notations utilisent véhiculent un sens opposée à celui que la logique formelle leur donnerait, etc, etc. En logique formelle, la négation du quantificateur universel $\neg(\forall x P(x))$ est strictement équivalente à l'existence d'une exception $\exists x \neg P(x)$.Or, Lacan disjoint ces éléments ou redéfinit la négation (comme la barre sur le quantificateur) d'une manière ad hoc pour soutenir ses concepts psychanalytiques (comme le "pas-tout"), sans fournir de cadre axiomatique rigoureux qui justifierait cette réécriture.
Commentaire de la transcriptrice : no comment. Penser simplement à acheter davantage de livres d'auteures pour faire contrepoids.

logique du tiers exclu, mais on travaille en logique intuitionniste. Alors pour ça, je lui ai donné des exemples de topos, mais je veux dire, Patrick Gauthier-Lafaye est un psychanalyste, ce n'est pas un mathématicien. Donc je me suis bien gardé de lui donner la définition mathématique d'un topos. Au lieu de ça, j'ai essayé d'abord de lui donner des exemples. Et alors, le premier exemple que je lui ai donné, c'est un exemple dans lequel la logique correspondante est une logique dans laquelle il n'y a pas que le vrai et le faux comme dans la logique du tiers exclu, mais entre le vrai et le faux il y a un pas de la vérité, deux pas de la vérité, trois pas de la vérité, dix pas de la vérité, etc., etc. Bon, donc j'ai donné cet exemple-là, qui correspond à un topos très simple qu'on appelle le topos des évolutions. Et puis de fil en aiguille, j'ai essayé de lui expliquer quel était au niveau conceptuel le changement de paradigme qui avait été opéré par Grothendieck dans sa découverte de la notion de topos.

Mais quel est le changement de paradigme opéré par Grothendieck pour appréhender un espace : alors voilà en gros l'explication que j'ai donnée à Patrick, je lui ai donnée par FaceTime bien sûr. Je lui ai expliqué que normalement, les mathématiciens, quand ils sont confrontés à un espace qu'ils veulent comprendre, les mathématiciens le regardent - regardent cet espace, ils le regardent, ils essayent de le voir sous toutes les coutures pour le comprendre. Ça, c'est la méthode usuelle des mathématiciens, et c'est comme ça qu'on a défini les espaces topologiques, etc., etc. Bon. Alors quel est le changement conceptuel majeur qui a été introduit par Grothendieck ? Le changement majeur, c'est qu'on ne va plus regarder l'espace en question. L'espace en question va être mis de côté, dans les coulisses. On ne va pas le regarder, surtout pas. Et ce que l'on va faire, c'est qu'on va faire les choses usuelles que l'on fait d'habitude, mais avec un paramètre dans cet espace. C'est-à-dire que, si vous voulez, on va faire ce qu'on appelle de la théorie des ensembles - mais on pourrait penser à n'importe quoi d'autre - mais de la théorie des ensembles dépendant d'un point, d'un paramètre qui appartient à cet espace qu'on a mis de côté. Voilà.

Et alors, quand on fait ça, quand on fait ça, ce qui advient, c'est que d'abord ça change les règles de la logique. C'est-à-dire qu'au lieu que l'on soit dans la logique du tiers exclu, du fait qu'il y a un paramètre, ce paramètre peut prendre plusieurs valeurs ; il peut y avoir quelque chose qui est vrai pour une valeur du paramètre, qui est faux pour une autre valeur du paramètre. Donc on n'a plus la logique du tiers exclu, bien sûr. Alors ça, c'est la première chose. Et la deuxième chose qui est très importante, c'est qu'on va s'apercevoir que beaucoup de choses qui normalement sont vraies restent vraies, mais qu'il va y avoir de toutes petites nuances, de toutes petites choses bizarres qui se produisent. Et ces petites choses bizarres qui se produisent, si on en prend note, elles vont nous donner une information sur l'espace qui est dans les coulisses, bien plus précieuse et importante que si on avait regardé l'espace qui est dans les coulisses.

L'écoute de l'espace : le parallèle avec la psychanalyse

Alors, quand j'ai expliqué ça à Patrick Gauthier-Lafaye, il m'a dit : "Mais tu rigoles ? C'est exactement comme ça que nous, psychanalystes, procédons. Quand nous avons un patient, nous ne le regardons pas. Nous ne lui demandons pas de se mettre en face de nous, surtout pas. Il s'allonge sur un divan, loin de notre vue, et nous ne le regardons pas, nous l'écoutons." Et ce que fait Grothendieck, c'est écouter l'espace en question. Il l'écoute à travers des choses ordinaires qui se passent, et il écoute les toutes petites différences, les toutes petites nuances qui vont se produire. Donc

quand Patrick m'a dit ça, on a dit : mais alors, écoute, ce que tu dis, c'est formidable, parce que qu'est-ce que ça veut dire ? Ben ça veut dire qu'une manière possible - bien sûr ce ne sera pas la seule - d'appréhender ce qui fait une personne, c'est-à-dire son inconscient, une manière possible d'appréhender l'inconscient d'une personne, c'est de le comprendre en tant qu'un topos, et que c'est ce topos que l'on écoute au cours d'une psychanalyse, ou dans ce qui se passe.

Alors là, si vous voulez, on a énormément discuté avec Patrick, et par exemple on s'est aperçu d'une chose : c'est que si on dit "c'est ça l'inconscient", etc., la première question qui se pose, c'est : mais qu'est-ce que c'est que la conscience ? Qu'est-ce que c'est que la conscience ? Et alors on s'est aperçu qu'il y avait des écrits de Lacan, ou des choses comme ça, qui donnent la réponse. Il y a un écrit de Lacan qui s'appelle "*Yad'l'un*". Et qu'est-ce que c'est qu'un instant de conscience ? Un instant de conscience, c'est un point du topos de l'inconscient. Et quelle est la signification d'un point d'un topos ? Eh bien la signification d'un point d'un topos, c'est que ça fait passer de la logique intuitionniste du topos à la logique ordinaire du tiers exclu. Donc la conscience - une des propriétés fondamentales de la conscience, c'est qu'elle choisit entre différentes idées. Quand on est conscient - je veux dire un instant de conscience, c'est un instant qui permet justement de faire des choix. Et c'est exactement ce que fait un point de topos. Donc un point de topos, il va transformer la logique très élaborée, intuitionniste, du topos de l'inconscient, en la logique ordinaire.

Enroulement, rêve et logique intuitionniste

Et en s'appuyant là-dessus, qu'est-ce que signifie l'enroulement que je vous ai montré tout à l'heure dans le cas de Proust ? Eh bien, il signifie que les instants de conscience vont s'enrouler dans le topos de l'inconscient en suivant cette image, qui était une image simple parce que j'avais représenté le topos de l'inconscient comme un tore. Mais évidemment le topos de l'inconscient était infiniment plus complexe que ça, d'accord ? Et alors ce qui est formidable, c'est qu'il y a un tas de questions qui se posent, et à ces questions, les topos donnent une réponse possible. Alors, par exemple, si vous voulez, une des questions qu'on a explorées avec Patrick - et qu'on a explorée, maintenant il va y avoir la suite du premier bouquin - une des questions qu'on a explorées, c'est : qu'est-ce qui se passe, si vous voulez, dans les rêves ? Parce que tout le monde sait bien, je pense, que dans les rêves, la logique ne s'applique pas ; et en fait, moi j'ai observé, en ce qui me concerne, que dès que j'essaie de réfléchir logiquement quand je rêve, je me réveille. Bon, c'est-à-dire dès que je m'aperçois qu'il y a une contradiction apparente, etc., je me réveille. Donc l'idée, c'est que le rêve nous permet d'explorer la logique intuitionniste de notre topos. Elle nous permet de plonger là-dedans et d'explorer cette logique intuitionniste justement sans être forcé d'atteindre un point de conscience, c'est-à-dire de revenir à la logique ordinaire.

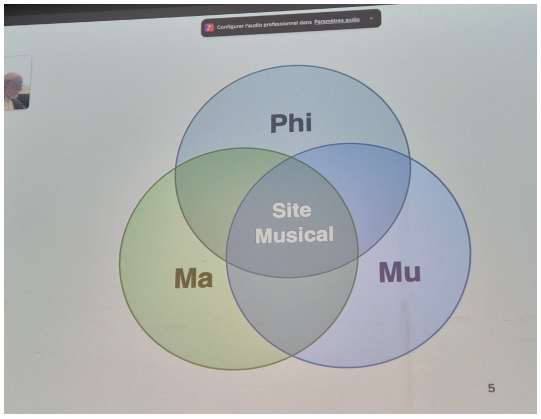
Alors donc tout ça, ça s'est développé, et ça c'est le niveau philosophique de ma conférence, parce que j'avais vu dans les critiques qu'il fallait bien sûr se situer au niveau philosophique. Donc le niveau philosophique de ma conférence, c'est que le point de vue que je prends sur l'inconscient quand je parle de musique, c'est que la musique est ce qui permet une communication directe d'inconscient à inconscient - le point de vue que je prends sur l'inconscient, c'est le point de vue que nous avons avec Patrick Gauthier-Lafaye, c'est-à-dire c'est le point de vue du topos de l'inconscient. C'est le point de vue, si vous voulez, où il y a - après il y a trente-six développements qui sont attachés à cela. Mais bien sûr maintenant la question va se poser, et la question qui se pose, c'est :

mais qu'en est-il de la musique ? Qu'en est-il de la musique ?

Le triptyque mathématiques-musique-philosophie et le site musical

Déjà, si vous voulez, ce qui est posé au départ, c'est que les topos vont jouer un rôle, et ils vont jouer un rôle au niveau philosophique. Alors là, je ne sais pas qu'est-ce que j'ai comme image. Voilà. Donc si vous voulez, il y a ces trois - il y a dans Mamuphi, mais on va voir quelque chose de plus précis tout à l'heure - il y a math, il y a musique et il y a philo. D'accord. Alors, il faut quand même que je dise une petite parenthèse, une toute petite parenthèse. Donc c'est au niveau philosophique : les topos jouent leur rôle parce qu'on essaye de comprendre le topos de l'inconscient. D'accord ? Ça, c'est au niveau philosophique. Au niveau math, les topos jouent un rôle fondamental, si vous voulez, en tant que concept. Au niveau musique, j'avoue que moi, il y avait un livre qui m'était resté en travers au début des années 2000 et qui s'appelle *The Topos of Music*, de Mazzola. Voilà, de Mazzola, que vous connaissez tous. Et j'avais essayé de regarder ce livre en 2010, mais on m'avait donné la version française, et j'avais regardé ce livre et j'avais trouvé une erreur dans le livre. C'est-à-dire que, si vous voulez, il y avait à un moment donné soit-disant une caractérisation des sept notes parmi les douze notes qui donnent la gamme ordinaire. D'accord ? Et puis j'avais mis ça sur mon ordinateur, et mon ordinateur avait trouvé que les conditions qui étaient données pour caractériser cela permettaient d'autres gammes que la gamme ordinaire. Et puis alors j'avais écrit à Moreno Andreatta ; Moreno Andreatta avait écrit à Mazzola, et en fait la traduction française était mauvaise. Donc la traduction française avait oublié une des conditions. Mais ce que ça m'avait montré, c'est que c'étaient des conditions comme on dit en math "ad hoc", c'est-à-dire qui n'étaient pas naturelles, et que donc il n'y avait pas là un sujet de compréhension qui m'avait convaincu. Ce qui m'avait embêté, c'était que les mots "topos" et "musique" étaient déjà pris. D'accord ?

Alors, c'est pour ça que dans ce que je vais vous exposer, ce n'est pas le mot "topos" qui est utilisé, d'accord ? C'est le mot de "site". Donc on va parler du site musical. Quand on parle de site en mathématiques, c'est un peu plus précis que quand on parle de topos. C'est-à-dire que, si vous voulez, plusieurs sites au sens mathématique peuvent donner lieu au même topos, à des topos isomorphes. Donc ça, c'est une subtilité mathématique qui est très utilisée par Olivia Caramello dans sa théorie des ponts. Et le diagramme fondamental de Mamuphi, c'est le diagramme qui est là. D'accord ? Donc vous avez - et les couleurs sont bonnes. Je me suis arrangé pour que les couleurs Mamuphi soient les mêmes que dans le site



François Nicolas : Oh merci, merci.

Alain Connes : J'étais pas enthousiaste pour mettre du vert pour les maths.

François Nicolas : Merci du compromis.

Alain Connes : Voilà. Voilà. Donc ce qu'on va voir, ce qu'on va voir, c'est qu'il y a un objet mathématique miraculeux - miraculeux, je dirais qu'il est vraiment miraculeux - qui s'appelle le site musical, et qui vraiment est à l'intersection des trois, et qui bien sûr donne un passage entre mathématiques et musique, mais pas n'importe quelle mathématique : pas les mathématiques de $2 + 2 = 4$, les mathématiques de l'hypothèse de Riemann, c'est-à-dire les mathématiques où on va voir apparaître les zéros de la fonction zêta de Riemann. Donc c'est sans doute la partie la plus profonde des mathématiques qui existe. Et euh, je veux dire, je ne résiste pas à la tentation. Bon, j'ai sans doute tort de raconter que le 17 septembre de cette année, j'ai eu l'immense honneur de donner à Göttingen, en Allemagne, la conférence d'une heure qui marquait le 200^{e} anniversaire de la naissance de Riemann. Donc je veux dire, dans cette conférence bien sûr j'ai parlé des zéros de la fonction zêta de Riemann, j'ai parlé de choses, mais c'était très émouvant parce que c'était dans une très grande salle. Et bon, on peut dire bien sûr Riemann n'était pas présent, mais j'avais trouvé une très bonne photo pour le laisser, si vous voulez, de Riemann, bien sûr pour le laisser présent pendant l'exposé. Pas la photo où on voit Riemann vieux - non, enfin, il n'est pas mort vieux, il est mort à 39 ans de la tuberculose en Italie - mais une photo où il était jeune et fringant. Et donc c'était un moment très très émouvant.

L'hypothèse de Riemann et la "musique des nombres premiers"

Donc si vous voulez, en fait, dans les mathématiques, il y a évidemment différents niveaux de profondeur, et ce qu'a trouvé Riemann, c'est sans doute le niveau le plus profond. Alors, si vous voulez, il y a une histoire qu'on a racontée d'ailleurs dans notre livre - dans notre livre avec Danye et Jacques Dixmier *Le spectre d'Atacama*, publié chez Odile Jacob ; c'est un autre livre publié chez Odile Jacob. Et dans ce livre, on raconte l'histoire d'un mathématicien qui a travaillé pendant presque toute sa vie sur ce qu'on appelle l'hypothèse de Riemann. Bon. Alors l'hypothèse de Riemann, il faut que je vous montre la figure. C'est une hypothèse qui consiste à dire que ce que vous voyez là, les rouges, ils sont tous sur la même droite verticale. Les rouges, c'est ce qu'on appelle les zéros de la fonction zêta de Riemann. Bon. Alors donc ce mathématicien a travaillé pendant des années, des années, trente ans et plus, pour essayer de démontrer ça. Ça résiste, ça résiste. Et alors finalement un jour il se dit qu'il n'y arrivera pas, et il décide - il veut quand même savoir la réponse : est-ce que l'hypothèse de Riemann est vraie ou pas ? Donc il décide de vendre son âme au Diable. D'accord. Ah, c'est pas facile hein, je veux dire. Bon, faut le trouver déjà. Oui. Bon, il faut déjà trouver où est le Diable. D'accord. Avoir un rendez-vous et compagnie. Bon, et alors il se fait qu'il y arrive à peu près, parce qu'il va à un exposé - il va à un exposé au Collège de France sur ce qu'on appelle, vous savez, le *machine learning*. Il y va parce qu'il se dit : là, j'ai des chances de trouver le Diable. Alors il y va, il y va. Bon ben il assiste à l'exposé. D'accord. Puis en regardant la conférence, en regardant les références et tout ça, il arrive à se dire à peu près comment il doit faire pour arriver à contacter le Diable. Bon, alors ça lui prend du temps, tout ça, et puis il finit par avoir un rendez-vous avec le Diable.

C'est un rendez-vous à Naples, près de Naples, dans un endroit qui est assez pourri parce qu'il y a plein de - vous savez, il y a une grève des éboueurs, c'est un peu dans la banlieue. Bon, alors il arrive, il a un rendez-vous avec le Diable. Et donc à minuit, minuit, il attend, et puis alors finalement il y a le Diable qui arrive, et le Diable il a des papiers à la main. Alors le gars et le Diable, il lui dit : "Ben d'accord, vous voulez vendre votre âme, pas de problème, vous allez signer ici et là, etc." Donc il passe un bon moment à signer, d'accord ? À signer, signer, signer. Bon, et une fois qu'il a signé, il y a le Diable qui lui dit : "Bon, alors c'est quoi que vous voulez savoir ?" Alors le mathématicien lui dit : "Est-ce que l'hypothèse de Riemann est vraie ?" Le Diable regarde, il lui dit : "C'est quoi, l'hypothèse de Riemann ?" Bon, alors le pauvre mathématicien - et là il lui dit, il lui explique, il lui dit : "Vous prenez la somme des $1/n^s$. Ça, ça vous donne une fonction. n, c'est les entiers positifs de 1 à l'infini. Ça vous donne une fonction, vous faites le prolongement analytique de…" Alors le Diable : "Oh là là, oh là là, euh, ça va me prendre du temps de réfléchir à tout ça. Écoutez, disons un mois. Donc on se retrouve au même endroit dans un mois." Bon, alors d'accord. Bon, le mathématicien, il est quand même un peu embêté parce qu'il a vendu son âme au Diable, hein. Bon, donc euh il passe un mois qui n'est pas très tranquille, pas très tranquille du tout. Et puis donc au bout d'un mois, il revient à Naples, au même endroit. C'est en haut d'une colline, hein. C'est - mais c'est plein de - c'est vraiment un endroit très dangereux, tout ça. Donc il est en haut de cette colline et il attend. À minuit, pas de Diable. Donc je ne sais pas si vous connaissez Virginia Woolf. Il entend les douze coups de minuit. Bon, personne. Minuit et demi, personne. Personne. Une heure du matin, il est obligé de rester parce que bon, personne. Une heure et demie du matin, il voit quelqu'un qui arrive, il voit quelqu'un qui arrive qui est tout échevelé, tout transpirant, tout ça. C'est le Diable qui arrive. Le Diable arrive, et le Diable lui dit : "J'ai pas réussi, mais j'ai démontré un bon petit lemme." Alors, si vous voulez lire la suite, c'est dans notre livre avec Danye et Dixmier. Mais bon, enfin pour résumer, si vous voulez la suite...

François Nicolas : On dirait que vous l'avez vécue, cette histoire-là.

Alain Connes : Absolument. Oui, le Diable est beau joueur parce qu'il lui rend son âme, mais entre-temps...

Frnçois Nicolas : Ah, il la lui rend quand même ?

Alain Connes : Oui, il lui rend son âme. Mais entre-temps, comme le mathématicien avait perdu son âme, il dit au Diable : je souhaite que l'hypothèse de Riemann soit fausse. Donc c'est pour vous dire tout le folklore qu'il y a, hein, d'accord, autour de ce problème, qui est un problème central, hein, absolument fondamental.

Et l'intérêt de ce problème, c'est que ce qu'a découvert Riemann, si vous voulez, c'est qu'en fait il y a une espèce de musique des nombres premiers. C'est-à-dire que ce qu'on appelle les zéros, qui sont là, de la fonction zêta de Riemann, ce sont les fréquences qui symbolisent ce qui se passe entre les nombres premiers. Donc vous avez la suite des nombres premiers. C'est une suite qu'on peut calculer bien sûr. Et en fait, au xixe siècle, il y avait un mathématicien - je ne me souviens plus de son nom, je crois qu'il s'appelait Burckhardt [3], qui avait écrit un livre dans lequel il calculait,

3. Voir https://denisevellachemla.eu/Burckhardt-facto.pdf.

pour les trois premiers millions de nombres entiers, leurs diviseurs, et quand il y avait un nombre premier, il mettait un trait. Alors, c'est un gros livre. Et Gauss, le grand, très grand, très grand mathématicien de la même époque que Riemann, avait eu ce livre, et ça lui avait permis, si vous voulez, de compter la fréquence des nombres premiers, parce qu'il regardait chaque page : si sur une page il y avait trois traits, il en mettait trois, etc. Donc c'était très facile pour lui. Il n'a pas eu à refaire tous les calculs ; les calculs existaient déjà. Et Gauss avait prédit que, si vous voulez, en gros, la probabilité pour qu'un nombre soit premier, c'est $1/\log n$. C'est-à-dire en gros, si vous voulez, un sur - disons presque - le nombre de décimales. Donc ça, c'était une prédiction. Et ce qu'a fait Riemann, c'est d'aller beaucoup plus loin. C'est-à-dire qu'il a trouvé un lien entre les nombres premiers et des fréquences. Donc une espèce de gamme musicale qui est donnée par les zéros de sa fonction. Et le grand mystère, c'est qu'on ne sait même pas si parmi ces fréquences, il n'y a pas ce qu'on appelle des résonances en physique, c'est-à-dire des fréquences qui ne sont pas précises mais qui sont diffuses et qui correspondent à un zéro qui n'est pas là où il faut. Bon, donc ça, si vous voulez, c'est pour vous situer le côté mathématique dans le triptyque que j'avais mis en évidence tout à l'heure. Donc nous savons maintenant ce qu'il en est du côté mathématique. Nous savons ce qu'il en est du côté philosophique, puisqu'il s'agissait du topos de l'inconscient, d'accord, et de ce que les topos jouent comme rôle fondamental.

L'instrument de musique idéal : la demi-droite des fréquences et le site musical

Et maintenant, je vais vous parler du côté de la musique. Du côté de la musique. Alors, du côté de la musique, ce que je vais vous décrire, je ne sais pas où on en est au niveau des problèmes. Alors, donc du côté de la musique, là on va essayer de vraiment réfléchir. On va essayer de réfléchir parce que ce dont je vais vous parler d'abord, le site musical, c'est quelque chose qui pourra vous paraître abstrait et très, comment dire, optimiste. Mais après, on verra que la musique telle qu'on la connaît est une approximation de cette chose-là. Donc ce dont je vais vous parler, c'est dans l'absolu. Ce qui est l'instrument de musique le plus absolu qui existe. Et ensuite, on verra ce qu'un piano, ce qu'un instrument de musique tel qu'on les utilise fait. Mais cet instrument de musique ne fait qu'une approximation de cet instrument idéalisé. D'accord ?

Alors l'instrument idéalisé, je vais d'abord vous le décrire en termes ordinaires, et ensuite je vais vous expliquer pourquoi presque par construction c'est un site, ou un topos si vous voulez, par sa propre nature. Donc d'abord, qu'en est-il en langage ordinaire de l'instrument de musique idéal ? Je ne parle pas d'un morceau de musique. Un morceau de musique, ça va être une trajectoire, ou plusieurs trajectoires quand il y a plusieurs voix, dans cet instrument de musique. D'accord ? Donc je ne vous parle pas d'un morceau de musique, je vous parle de l'instrument lui-même. D'accord ? Attends, zéro. Voilà. Alors donc pour moi, qu'est-ce que c'est que l'instrument abstrait, universel, idéal, tout ce que vous voulez comme adjectif ? C'est la chose suivante : c'est la demi-droite des fréquences. C'est-à-dire qu'on regarde toutes les fréquences possibles de zéro à l'infini. On ne spécifie pas une unité de fréquence parce qu'on verra que tout est invariant par multiplication des fréquences par une fréquence donnée. Donc si vous voulez, ce qui va compter, c'est cet intervalle des fréquences, cette demi-droite des fréquences. Ce qui est très très important dans cette demi-droite des fréquences, ça va être le fait qu'il y a des fréquences qui ont des relations entre elles. La relation la plus connue et la plus simple, c'est la multiplication d'une fréquence par deux. Quand vous prenez une fréquence et que vous la multipliez par 2, l'oreille entend la même note une octave plus haut.

D'accord ? Donc cette relation, elle est absolument fondamentale, puisque, si vous voulez, c'est une relation de résonance. C'est une relation qui dit que l'oreille entend une harmonie. Et évidemment qu'elle entend une harmonie, parce que quand on regarde les harmoniques d'une fréquence donnée, on obtient tous les multiples entiers de cette fréquence. Donc en fait, ce qui compte, ça ne va pas être seulement la multiplication par 2, ça va être la multiplication par 2, par 3, par 4, par 5, etc., etc. Donc en fait la structure qui apparaît extrêmement naturellement, c'est l'action des entiers par multiplication sur les fréquences. D'accord ? Ce qui est faramineux de simplicité, mais en même temps qui n'aurait de sens si l'on n'avait pas la notion de topos, c'est la chose suivante : c'est que quand vous considérez cette demi-droite, c'est un espace topologique, disons. D'accord ? Mais quand vous considérez l'action sur cette demi-droite des entiers par multiplication, ça n'est plus un espace topologique. C'est une espèce d'objet un peu biscornu, puisque ça mélange la topologie avec l'action de ce qu'on appelle un semi-groupe, qui est le semi-groupe des entiers multiplicatifs.

Alors la merveille des topos, c'est que ça, c'est encore un topos. C'est-à-dire que la merveille des topos, c'est que, alors que la demi-droite est un topos - parce que c'est un espace topologique qui va de zéro à l'infini, d'accord - ça reste un topos quand vous faites ce qu'on appelle le produit semi-direct par l'action des entiers. Ça, c'est faramineux. Oui. Les entiers positifs. Positifs bien sûr. Les entiers positifs. 2, 3, 4 - non, non, non. Ah non, pas 1. 2, 3, 5, etc. 2, 3, 4, 5 et tout ça. D'accord. Bon alors donc c'est le site musical ; le site musical n'est rien d'autre que le topos - d'accord - qui est formé par cette demi-droite produit semi-direct par les entiers. OK. Alors qu'est-ce que ça veut dire si je remonte à ce que je vous avais expliqué sur les topos tout à l'heure ? Je vous avais expliqué qu'un topos, il ne faut pas le regarder, il faut le mettre dans les coulisses. D'accord ? Et il faut faire la théorie des ensembles comme on fait d'habitude, à paramètres. Qu'est-ce que ça veut dire ? Ben ça veut dire qu'on va faire des choses habituelles, mais on va avoir un petit paramètre qui est une fréquence, mais ces paramètres ont des relations entre eux. C'est-à-dire cette fréquence peut être multipliée par 2, elle peut être multipliée par 3, etc. D'accord ? Donc on a ce petit secret qui est qu'il y a une fréquence et elle est multipliée par ça. C'est ça notre topos. C'est ça le site des fréquences. D'accord ? C'est ça le site des fréquences. Bon.

Le site musical et les zéros de zêta comme spectre d'absorption

Alors maintenant, il y a un résultat qu'on a trouvé en collaboration avec ma collaboratrice Katia Consani, qu'on a trouvé en 2014 à notre grande surprise : on a trouvé que quand on regarde les points de ce topos - alors évidemment on n'avait pas comme motivation la musique, hein - donc quand on regarde les points du topos qu'on appelait en anglais *scaling site*, parce que *scaling* c'est la multiplication, on a retrouvé un espace que moi j'avais trouvé en 1996 dans mes recherches sur l'hypothèse de Riemann. Donc en 1996, j'avais trouvé un espace qui était un espace non commutatif - c'est-à-dire que c'est un espace qui requérait, si vous voulez, énormément de soins pour le comprendre - que j'avais trouvé en 1996 et que j'avais considéré comme un espace non commutatif. Et ce que j'avais démontré sur cet espace, qui était quand même très très fort comme phénomène, c'est qu'il suffisait de connaître cet espace pour que les zéros de la fonction zêta en sortent, sans même avoir à définir la fonction zêta. C'est-à-dire que le pauvre mathématicien qui devait expliquer au Diable ce qu'était la fonction zêta n'aurait pas eu à faire ça ; ça lui aurait donné les zéros tout de suite. D'accord ? Et alors comment ces zéros apparaissaient à partir de cet espace ? Ben, si vous voulez, sur cet espace agit le groupe des dilatations, c'est-à-dire le changement d'échelle, le

changement d'unité dans les fréquences ; ça agit par multiplication sur cet espace. Donc on a un groupe qui agit sur cet espace. Et quand on utilise l'action de ce groupe sur cet espace et qu'on regarde son spectre, on obtient ce qu'on appelle un spectre d'absorption.

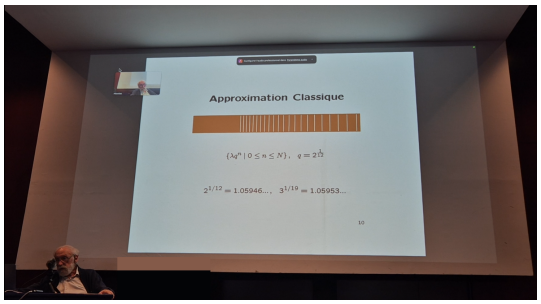
Alors il faut que je vous raconte ce que c'est qu'un spectre d'absorption, pour que vous puissiez absorber le mot. D'accord ? Ça me fera une petite parenthèse, parce que c'est une très très belle histoire, qui remonte au départ presque à Newton. C'est-à-dire que c'est au moment de Newton qu'on a eu l'idée, si vous voulez, qu'en faisant passer la lumière à travers un prisme, on décomposait la lumière en éléments plus simples. Ce n'était pas évident du tout, hein, puisque bon, il y avait la lumière blanche, et puis c'est une idée formidable de penser que quand vous faites passer cette lumière blanche à travers un prisme, elle va se décomposer en fréquences plus simples. D'accord ? Et ce qui s'est produit, c'est que - bon eh bien, ce sont les fréquences de l'arc-en-ciel bien sûr - donc c'est la partie visible, bien sûr. Là. Et ce qui s'est produit, c'est qu'au XIXe siècle, il y avait un opticien qui s'appelle Fraunhofer, et cet opticien, qui était très très fort au niveau matériel, a refait bien sûr l'expérience du prisme qui décompose la lumière, et il est tombé sur un truc bizarre. Il est tombé sur le fait que quand il décomposait la lumière comme ça, il voyait des raies noires qui apparaissaient. Donc il prenait la lumière du soleil, il la décomposait avec son prisme. D'accord ? Et alors au début, il a pensé que son prisme était sale, forcément. D'accord. Et puis de fil en aiguille, il a refait l'expérience avec des prismes différents et tout ça. Et de fil en aiguille, écoutez bien, il a repéré 500 raies noires fixes, d'accord, qui apparaissaient. Et ces raies noires, c'est ce qu'on appelle le spectre d'absorption. Alors, quand je vous dis que les zéros de zêta apparaissent comme spectre d'absorption, ils apparaissent comme ça. C'est-à-dire qu'ils apparaissent comme des raies noires sur un fond lumineux.

Alors pour terminer l'histoire des spectres d'absorption, il y a eu - c'est une histoire merveilleuse - parce que ce qui s'est produit, c'est que les chimistes, en particulier les chimistes allemands, Kirchhoff et cie, ont réussi à reproduire les raies comme des spectres d'émission. Alors le plus connu, c'est le sodium. C'est-à-dire ils ont pris du sodium, ils l'ont rendu incandescent et ils ont fait passer la lumière du sodium à travers un prisme. Et là, ils ont trouvé qu'il y avait un fond noir et qu'il y avait des raies brillantes qui correspondaient exactement à des raies du spectre d'absorption. Donc c'est ça qui nous a permis de comprendre qu'en fait dans l'atmosphère du soleil, enfin dans la partie extérieure, si vous voulez la couronne, il y avait du sodium, puisque justement il y avait des raies d'absorption qui correspondaient à ça. Mais alors une des merveilles absolues - ça, moi je trouve qu'il y a des merveilles dans les sciences, et ça c'est une des plus grandes merveilles des sciences - une des plus grandes merveilles des sciences, c'est qu'ils n'ont pas réussi à reconstituer toutes les raies d'absorption. Il y en avait qui manquaient, qu'ils n'arrivaient pas à reconstituer avec des corps sur la Terre. Et donc ça formait une espèce de spectre, ça formait une espèce de signature de quelque chose qui manquait sur la Terre. Alors comment est-ce qu'ils l'ont appelé, ce corps qui manquait sur la Terre ? Bah ils ne sont pas très futés, ils l'ont appelé hélium, puisqu'il venait du soleil. D'accord. Ils l'ont appelé hélium. Et alors après, il y a eu un miracle - ça c'est à la fin du XIXe siècle - c'est qu'il y a eu une éruption du Vésuve, et il y a des gens très malins qui se sont amusés à faire l'analyse spectrale de la lave qui sortait du Vésuve. Et là, ils ont trouvé un spectre d'émission qui correspondait exactement à ce corps qui manquait. Et c'est comme ça qu'on a trouvé l'hélium sur Terre. Et maintenant, l'hélium joue un rôle essentiel, comme vous le savez très bien. C'est ce qui permet de refroidir à très très basse température, etc., etc. Donc tout ça pour vous dire que ce

que j'avais trouvé en 1996, c'était que justement cet espace, cet espace, le site musical maintenant, grâce à ce qu'on a trouvé avec Katia, qui est que c'est le même espace, nous redonne les zéros de zêta comme spectre d'absorption. Donc cet espace établit le lien avec la partie la plus profonde des mathématiques, qui est les zéros de zêta, simplement en le regardant et en regardant le groupe des changements d'échelle sur cet espace, d'accord, on obtient ce spectre comme spectre d'absorption.

L'approximation pratique : gammes, frettes et nombres premiers 2 et 3

Bon, alors là, si vous voulez, on arrive quand même à une relation entre l'instrument musical idéal, idéalisé, dont j'ai parlé, et les mathématiques. Maintenant, la question se pose : quand je vous parlais du spectre, je vous parlais de l'arc-en-ciel. L'arc-en-ciel, c'est seulement une partie visible de la lumière, du spectre de la lumière. Alors pour la musique, on est exactement dans le même domaine, puisque dans la musique, si vous voulez, on n'est pas capable bien sûr d'écouter des fréquences qui sont très aigues, hyper au-delà de ce qu'on peut entendre, et pareil pour les fréquences qui sont trop basses. Donc on ne va arriver en musique qu'à une approximation de cet objet idéal, de cet instrument de musique idéal dont j'ai parlé. Alors, c'est ça dont je voudrais vous parler maintenant : en quoi consiste cette approximation ? D'accord. Voilà. Donc, et ça, c'était une des questions qui m'était posée, hein. C'est une des questions qui m'était posée, bien sûr, si vous voulez. La question maintenant, c'est : d'accord, on a cette relation au niveau idéal entre mathématiques et musique, puisque, si vous voulez, on a donc cet instrument de musique idéal, ou idéalisé si vous voulez, qui est intimement relié à la partie la plus profonde des mathématiques. Évidemment, pour moi, ça me satisfait, ça, mais bien entendu c'est parfaitement normal de maintenant se poser la question de savoir en quel sens on va pouvoir approximer ce qui se passe avec cet instrument idéal dans la pratique. Bien sûr, ça, c'est fondamental. D'accord ?



Alors, ce qui se passe dans la pratique, vous le connaissez sûrement, mais je vais quand même vous rappeler des petites choses, d'accord ? Parce que ce qui se passe dans la pratique - donc voilà le site musical, hein, ça je vous en ai parlé. Alors, et les zéros de zêta, alors ça, j'y reviendrai après. Alors, qu'est-ce qu'on fait classiquement pour approximer le site musical, hein ? Qu'est-ce qu'on fait classiquement ? Eh bien, on fait classiquement ce qui se fait sur une guitare. Vous voyez ? Si je prends le manche d'une guitare, sur le manche d'une guitare, il y a ce qu'on appelle les frettes. Alors, si vous regardez les frettes d'une guitare, ce n'est pas très difficile de comprendre que les frettes ne sont pas disposées régulièrement. Elles ne forment pas ce qu'on appelle une progression arithmétique. La distance entre deux frettes n'est pas la même que la distance entre les deux frettes suivantes. D'accord ? Alors, est-ce que vous avez réfléchi à ça ? Est-ce que les gens qui jouent de la guitare ont réfléchi à ça ? Je ne suis pas sûr. D'accord. Je ne suis pas sûr, parce que quelle est la

raison pour laquelle les frettes ne sont pas disposées de manière arithmétique ? Eh bien la raison, c'est que l'approximation que l'on va faire du site musical, c'est une approximation qui ne va utiliser que les nombres premiers 2 et 3. C'est-à-dire que, au lieu de - alors ça serait trop compliqué bien sûr - d'utiliser tous les nombres premiers, donc on va se contenter des nombres premiers 2 et 3, et on va réfléchir sur les nombres premiers 2 et 3. Et ça, ça date des Grecs, hein, je veux dire. Et cette réflexion, si vous voulez, sur les nombres premiers 2 et 3 - alors, ce n'est pas très difficile de comprendre qu'il n'y a aucune puissance de 2 qui soit égale à une puissance de 3. Pourquoi ? Parce que si vous prenez une puissance de 2, elle est paire, et une puissance de 3, elle est impaire. Donc ce n'est pas possible que ce soit les mêmes. D'accord ? Alors, si vous vous ennuyez, vous pouvez faire le calcul de ce que vaut 2^{19}, hein. Je vous conseille de le faire. D'accord ? 2^{19}, ce n'est pas très difficile si vous savez encore faire une multiplication - ce qui n'est pas clair de nos jours - par deux, ça va encore. Oui, par deux. Mais d'accord. Mais bon, alors on va dire : d'accord, vous savez bien que vous avez 512, c'est une puissance de 2. Après il y a 1024, qui est aussi une puissance de 2. Alors vous pouvez continuer, d'accord ? Bon. Et puis les puissances de 3, c'est pareil. Alors les puissances de 3, bah il y a 27 bien sûr. Puis il y a 27×27. Je vous laisse deviner ce que c'est. C'est 700 et des poussières. Puis après, il y a encore le carré de ça, etc. Donc il se fait que quand vous prenez 2^{19}, ce n'est pas trop loin de 3^{12}. D'accord. OK. Mais ce n'est pas comme ça qu'il faut y penser. La manière d'y penser, c'est que la racine 19^{e} de 2 est pratiquement égale à la racine 12^{e} de 3. D'accord.

François Nicolas : Non non, c'est la racine 12^{e} de 2 qui est la même chose que la racine 19^{e} de 3, puisque 3 est plus grand. [4]

Alain Connes : Non, non, c'est correct. C'est correct. Alors, prenons ce nombre et appelons-le q. q. D'accord ? On va dire - disons, on va dire c'est la racine 12^{e} de 2, ça fait 1,05 et cetera. Eh bien les frettes sur une guitare sont telles que la longueur entre deux frettes est multipliée par ce nombre q chaque fois que vous allez à une frette suivante. D'accord ? Donc quand vous allez à la frette suivante, en fait la distance entre les deux est multipliée par $2^{1/12}$. Combien de frettes sur la guitare ? Ah ben alors après, il faut réfléchir, et il faut savoir que si par exemple - si, il y en avait 12 - si quand vous en avez 12, ça vous permet de passer à l'octave. D'accord ? OK. Donc c'est très important ça. Ça, c'est très important. D'accord. Comment 3 ? Alors, pour 3, il faudrait aller à 19. D'accord. Mais en fait, comme on peut aller à l'octave plus basse, au lieu d'aller à 19, on peut aller à 7. Et 7, ça joue un rôle fondamental en musique, on le sait bien. D'accord ? C'est-à-dire que quand vous allez à 7 en musique, vous passez de do à sol. D'accord ? Et passer de do à sol, c'est la transposition. D'accord ? C'était passer à la gamme suivante. OK ? Et alors effectivement la bonne caractérisation de l'ensemble à 7 éléments, elle utilise le rôle du nombre 7 dans les entiers modulo 12, bien entendu. D'accord ? Alors ce qui se passe... Comment, excusez-moi ?

François Nicolas : Qu'est-ce que vous voulez dire exactement, que lorsqu'on passe de do à sol plutôt ?

Alain Connes : Oui. Oui. Eh bien ce que je dis, c'est que quand on passe de do à sol, on multiplie la fréquence par 3/2. D'accord ? On multiplie la fréquence par 3/2. C'est exactement ça qu'on fait.

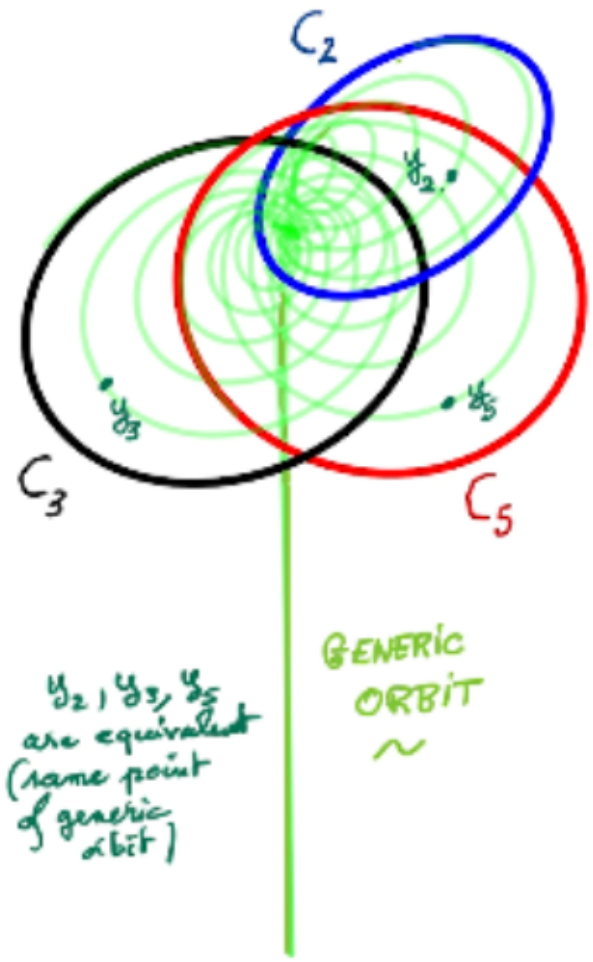
4. On se reportera à cette image https://denisevellachemla.eu/rac2rac3.png et à ce texte https://denisevellachemla.eu/correspondance-2-3-claude-dvc-20261004.pdf, bas de la page 4, haut de la page 5, écrit par une ia pour la transcriptrice pour comprendre cette remarque.

D'accord ? Alors donc l'approximation classique, si vous voulez, qu'est-ce qu'elle veut dire ? Eh bien, l'approximation classique, elle dit qu'on remplace le site des fréquences - dans le site des fréquences, on va remplacer l'intervalle $]0, \infty[$ qui est infini, mais bon, toutes ces choses... - on va la remplacer par l'ensemble des puissances de q multiplié par un nombre λ qui est arbitraire, puisque ça ne joue aucun rôle - où q c'est la puissance 1/12 de 2. Donc ça vous donne évidemment la disposition qui est la même que les frettes d'une guitare. D'accord ? Et dans l'approximation classique, on triche, c'est fondamental, c'est-à-dire on fait comme si la puissance 1/12 de 2 était égale à la puissance 1/19 de 3. C'est-à-dire on fait croire que si l'on effectue ce passage en prenant 7 dans les puissances de q - ou 19 si vous voulez dans les puissances de q - donc on fait semblant que, en prenant la 19^{e} puissance de q, on obtient la multiplication de la fréquence par 3. Ça n'est pas vrai. Ça n'est pas vrai. Et la supériorité du violon sur le piano, c'est qu'avec le violon, on peut faire ça exactement. Il faut avoir une oreille bien développée. Et dans le piano, les grands compositeurs font la distinction bien entendu entre ces deux choses-là, hein. Dans les œuvres de Chopin, vous avez des exemples très frappants de ça. Donc si vous voulez, cette distinction existe, elle est petite, elle est très très petite, mais elle vous dit que quand vous travaillez avec un piano, vous avez une approximation. C'est une excellente approximation, mais ça reste une approximation. D'accord ? Ça reste une approximation.

Et si vous voulez, la partie - l'instrument de musique qui sacralise le plus le site musical, c'est le violon. C'est le violon, parce que dans le violon, on peut atteindre n'importe quel point de l'intervalle zéro–infini a priori - bien sûr la partie visible, la partie audible de cet intervalle - mais en tous les cas, on a cette possibilité. Et c'est ce qui fait, si vous voulez, qu'en entendant une note d'un violoniste, on sait si c'est ou non un bon violoniste. D'accord. Bon, il faut avoir un peu d'oreille, mais bon. Et ça, c'est un fait, d'accord, c'est un fait qui peut-être tragique, hein, je veux dire, mais euh. Donc si vous voulez, là, je vous décris l'approximation. Alors, le violon est bien sûr une approximation, mais cette approximation, comme toute approximation, a ses dangers. Et le danger, c'est précisément ce que je viens de dire : c'est-à-dire qu'il faut être un extraordinaire violoniste pour atteindre la note précise qui correspond à l'idée qu'on se fait du site musical. D'accord ?

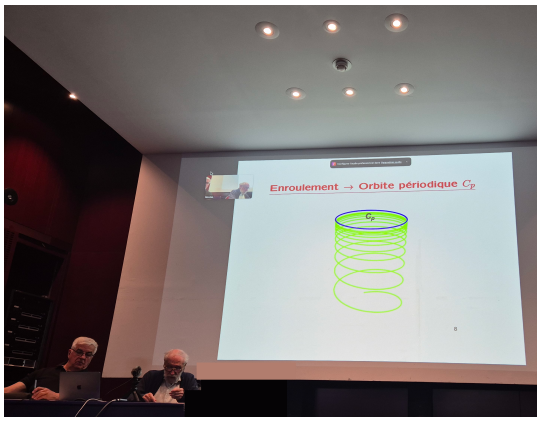
La géométrie complexe du site musical et l'approximation par les entiers modulo 12

Alors maintenant, ce qui se produit, c'est que le site musical, lui, quand on le calcule, il a une géométrie d'une complexité extraordinaire, et on va essayer de voir comment approximer cette géométrie d'une complexité extraordinaire. Quand on regarde le vrai site musical, hein, le vrai site musical, lui, la complexité qu'il a, elle est la suivante. La complexité qu'il a, c'est qu'à chaque nombre premier correspond dans le site - dans le vrai site musical - correspond une orbite périodique, correspond quelque chose qui est périodique, et qui a pour longueur le logarithme du nombre premier, et qui a, si vous voulez, la propriété que les fréquences ordinaires vont venir s'enrouler comme dans l'image qui est là autour de chacune de ces orbites périodiques pour chaque nombre premier. Donc il y a une complexité géométrique de ce site musical qui est absolument incroyable, et qui fait que cette complexité nous permet d'envisager une complexité semblable dans le topos de l'inconscient. C'est-à-dire que quand on a développé avec Patrick Gauthier-Lafaye le topos de l'inconscient, on n'avait pas d'exemple d'un topos qui soit d'une complexité suffisante pour pouvoir envisager la complexité de l'inconscient. Or là, si vous voulez, le site musical a une complexité telle qu'il nous donne, comment dire, un aperçu de ce que pourrait être la complexité du topos de l'inconscient.



Et ce qui est faramineux, si vous voulez, dans cette discussion que je suis en train de faire, c'est que j'ai toujours été persuadé que la vraie musique - bon alors ça peut avoir toutes sortes de sens - mais c'est une musique qui parle directement à l'inconscient, et qui parle directement d'inconscient à inconscient. Et j'en veux pour preuve que j'ai assisté plusieurs fois à des séances dans lesquelles on se posait la question de savoir comment improviser, de savoir, si vous voulez, donc je dis comment improviser, surtout de savoir en quel sens il y avait des techniques d'improvisation qui permettaient de pallier à l'inspiration. Et j'ai même vu des exemples où des neurologues demandaient à des personnes qui étaient dans un tube d'IRM d'improviser. Donc j'avoue avoir eu les plus grands doutes sur les productions qui pouvaient se produire dans ce genre de circonstances. Et donc si vous voulez, pour illustrer ce fait, il faut qu'il y ait dans le site musical justement une complexité telle qu'on puisse envisager qu'elle existe aussi dans le topos de l'inconscient. Et alors donc typiquement maintenant, ce qui se produit, et c'est ça qui est très étonnant, c'est que cet enroulement dont je vous ai parlé, et qui se produisait pour un nombre premier, en fait il se produit pour tous les nombres premiers. C'est-à-dire qu'on va s'enrouler autour de quelque chose qui correspond à 2, autour de quelque chose qui correspond à 3, etc., etc. Et donc le questionnement, si vous voulez, qui

est là finalement, c'est en quel sens on peut approximer cette géométrie incroyablement complexe dans la musique ordinaire.



Et dans la musique ordinaire, finalement, le modèle qu'on a donné de la musique ordinaire - que j'avais lu par exemple dans le *Topos of Music*, etc. - c'était de regarder les nombres modulo 12, les entiers modulo 12, et ça correspond à l'orbite périodique qui correspond au nombre 2. Pourquoi ? Parce que q^{12}, ça vaut 2. Donc dans la musique ordinaire, si vous voulez, ce qu'on fait, c'est la chose suivante : on regarde les nombres modulo 12, d'accord ? Et en gros, si vous voulez, on est en train de regarder ce qui se passe dans le schéma qui est ici. C'est-à-dire qu'on approxime - on approxime, si vous voulez, les nombres modulo 12 par une espèce de limite du passage à l'octave, en passage à l'octave inférieur. C'est-à-dire qu'en fait, si vous voulez, ça correspond à une espèce d'escalier, une espèce d'escalier en fait, d'escalier infini, dans lequel en bas vous auriez les entiers modulo 12. Et cet escalier, il se rapproche de la base, mais il y a une infinité de marches en fait avant d'atteindre la base, et il se rapproche de la base en ce qu'à chaque marche, on va diviser par le nombre q. D'accord ? Donc c'est comme ça qu'il faut l'imaginer. Je n'ai pas réussi à le représenter picturalement, mais donc picturalement ce qu'il y a, si vous voulez, c'est qu'on a cette espèce d'escalier infini qui est au-dessus des entiers modulo 12, mais il n'approxime qu'une seule orbite du site musical. Et le site musical - l'orbite suivante - ne demande qu'une chose, c'est d'être approximée. Et l'orbite suivante, ce sont les entiers modulo 19. D'accord ? Et il y a un autre escalier là sur les entiers modulo 19. D'accord ? Et donc en fait, si on veut ne serait-ce que commencer à s'approcher du site musical, il faudrait déjà qu'en musique on arrête de penser systématiquement au dodécaphonisme, c'est-à-dire au nombre modulo 12, mais qu'on pense en même temps au nombre modulo 19, et à comment ces choses-là vont se déployer ensemble, de la même manière qu'elles se déploient ensemble dans la figure qui est ici, où vous voyez, si vous voulez, dans cette figure, vous voyez des orbites périodiques de longueurs très très différentes qui sont déployées ensemble.



Donc ce que je suis en train d'essayer de dire, c'est que l'approximation que l'on a - que l'on essaie d'avoir, d'accord - du site musical, on doit faire des progrès énormes pour s'en approcher beaucoup plus. Et qu'avec ces progrès énormes, en fait, je pense qu'on se rapprochera de l'idée que la musique est bien différente, incroyablement différente du langage parlé, au sens où elle communique directement à l'inconscient. Elle communique directement à l'inconscient du fait que maintenant la musique, c'est une trajectoire dans le site musical, et ça peut être une trajectoire non pas seulement d'une seule voix, mais de plusieurs voix ensemble. Donc c'est plusieurs trajectoires comme celle que je vous montrais à propos de Proust, qui se déploient dans cet objet géométrique qui est d'une complexité absolument incroyable, d'accord, et qui ne demande qu'une chose, c'est d'être compris. Mais ça, ce sont des maths vraiment profondes, je veux dire, et il y a, si vous voulez, comment dire, tout un domaine à explorer. Il y a tout un domaine à explorer, d'accord, dont on peut avoir une intuition, je pense. Et cette intuition, c'est l'intuition qui est orthogonale à l'idée que les mathématiques jouent un rôle en musique pour aider à improviser, ou pour donner une recette pour faire une pièce musicale, ou une chose comme ça. C'est exactement orthogonal à ça.

Deux exemples musicaux : musique calculée et musique de l'inconscient

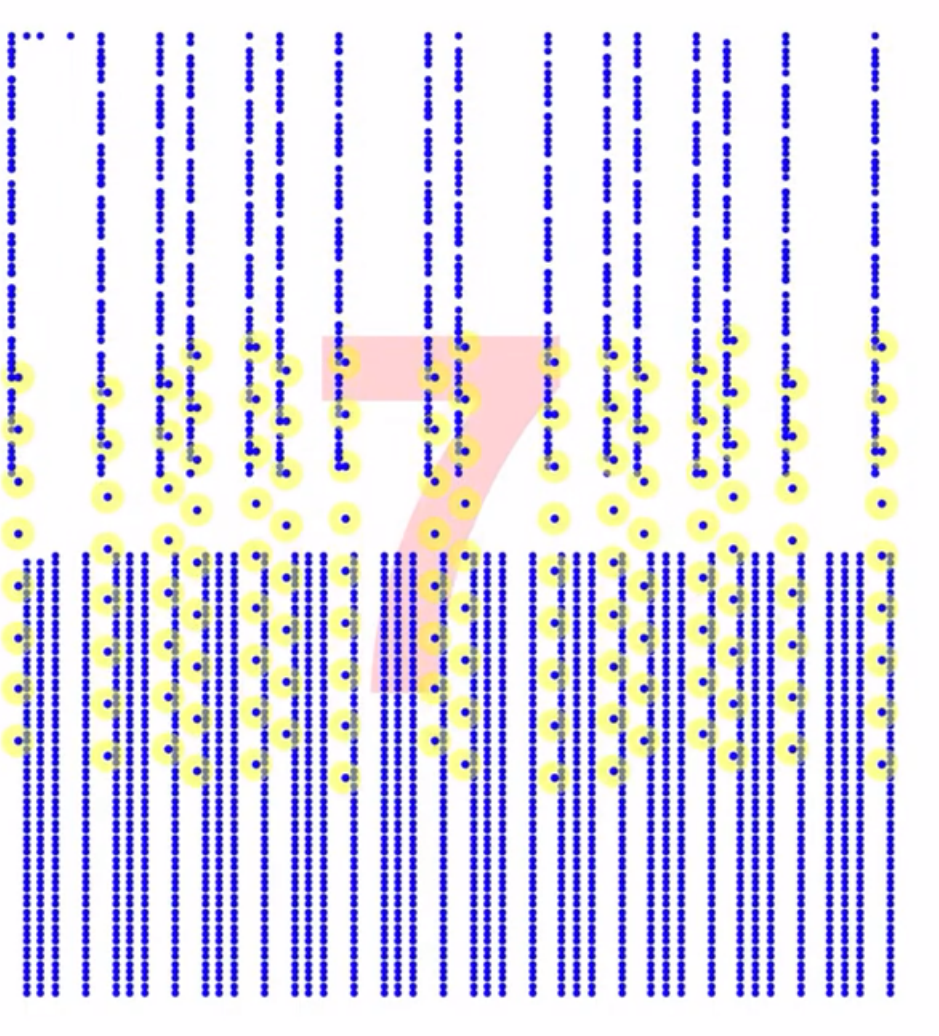
Dans le temps, j'avais effectivement produit une pièce musicale qui était inspirée par les mathématiques, parce qu'il fallait trouver comment écrire un nombre premier. Et alors j'avais fait toute une théorie pour l'écrire, et puis j'avais composé cette pièce musicale qui était inspirée purement par les mathématiques. Donc maintenant, je vais vous faire écouter le contraste entre deux pièces musicales. Une pièce musicale qui est inspirée par les mathématiques. On va l'écouter. On va l'écouter. Bon.[5] Et puis après je vous ferai écouter une autre pièce musicale. Et cette autre pièce musicale, elle sera composée non pas avec les mathématiques, mais avec l'inconscient. D'accord ? Et je vous les donne à écouter pour - pas vous faire réfléchir ; non, ce n'est pas l'idée - pour vous faire sentir, faire sentir la différence. Donc on va faire écouter deux pièces. La première, c'est le truc des nombres premiers, là. D'accord. C'est *Music of prime* le fichier. *interactions techniques pour lancer la vidéo : Comme ça que je - D'accord. Euh, c'est une vidéo, hein. C'est - c'est ça, c'est - non, ça, c'est -*

5. https://www.youtube.com/watch?v=oBArTv71Edk.

non, non, c'est là, c'est celle-là. Oui, dans of - voilà. Donc alors là, on va... Ça va être illustré par des mathématiques. C'est une musique inspirée par les mathématiques. D'accord ? Bon, donc vous allez voir. J'y vais. Ouais, on y va. Attends, on va arrêter une seconde. Voilà.

Alors ce que vous voyez là, d'accord, ce que vous voyez là, c'est la chose suivante. C'est que, dans le rectangle du haut - alors, dans le rectangle du haut, au départ, il y avait tous les nombres sauf les multiples de 2, de 3 et de 5. On a gardé 2, 3 et 5, mais on a éliminé tous les multiples de 2, de 3 et de 5. D'ailleurs, quand je parlais du livre que Gauss avait lu, là, du gars [6] qui avait répertorié tous les diviseurs de tous les nombres, il avait quand même éliminé tous les multiples de 2, de 3 et de 5, parce qu'il savait que ce n'étaient pas des nombres premiers. D'accord ? Donc dans le rectangle du bas, d'accord, il va n'y avoir que des nombres qui ne sont pas premiers. Alors, c'est pour ça qu'il y a toutes ces barres, parce que toutes ces barres, elles correspondent aux multiples de 2, de 3 et de 5. D'accord ? Alors maintenant, ce qu'on voit dans la vidéo, c'est qu'on voit les multiples de 11 là qui sont en train de descendre - sauf 11 ; 11, on le garde en haut. Après, on va voir les multiples de 13 qui descendent. OK ? Et la musique qui est derrière, c'est une musique qui est calculée mathématiquement pour correspondre à chacun des nombres premiers que l'on voit. C'est calculé mathématiquement. Ce n'est pas une musique qui est inspirée, ou quoi que ce soit. C'est une musique qui est calculée mathématiquement à partir d'une formule qui provient du nombre premier. D'accord ? Donc on continue là. Voilà. Donc là, vous voyez les multiples de 41, sauf 41, qui descendaient. D'accord ? Alors maintenant, ce que vous allez voir, c'est que quand on se rapproche de 60, il va y en avoir de moins en moins qui descendent, parce qu'il y a de moins en moins de nombres qui sont multiples de choses comme ça. D'accord ? Et à la fin, vous n'en verrez que deux qui descendent. On y va. On arrête là. C'est bon, on arrête.

6. Burckhardt



Alors là maintenant, si vous regardez cette figure, vous avez en haut, d'accord, tous les nombres premiers entre 1 et 3600. D'accord ? Donc il ne reste en haut exactement que tous les nombres premiers entre 1 et 3600. Pourquoi ? Parce que ceux qui ne sont pas premiers sont descendus. Alors, je dois dire que à un moment donné, j'avais proposé à quelqu'un qui fait du spectacle de danse de faire un ballet avec des danseuses qui descendent. D'accord. Alors, on m'avait demandé : "Mais combien il vous faudrait de danseuses ?" J'avais dit : "4000". Donc évidemment, c'est difficile à réaliser, mais là ce que vous voyez, c'est ce qu'on appelle le crible d'Ératosthène. C'est-à-dire que ça illustre ce petit épisode, si vous voulez, ça illustre un phénomène mathématique, qui est comment mathématiquement on calcule les nombres premiers entre 1 et un carré. Là, c'est 3600, c'est 60 au carré. En utilisant seulement justement le fait qu'il suffit de regarder les nombres entre 1 et 60 et d'enlever les multiples des nombres qui sont là-dedans. D'accord ? C'est ça que vous faites. Vous ne faites rien d'autre que ça. Vous enlevez les multiples de cela, et puis c'est tout. D'accord ? [7].

7. Note de la transcriptrice : Je dis : "Il faudrait enlever le 1 en haut".
Alain Connes : Comment tu dis ?
Denise : "Il faudrait enlever le 1 en haut".
Alain : Ah oui, c'est où qu'il y a le 1
Denise : En haut à gauche du tableau du haut. Il y a un.
Alain : Non, ça démarre à 2, 3, 5, 11, non, non, ce n'est pas un. Ah non, non, c'est deux. Ce n'est pas un, c'est deux.

Donc ça, qu'est-ce que c'est ? Ce sont des maths illustrées par une musique. La musique, elle est calculée, elle n'est pas pensée, elle est calculée. Et euh bon, elle est un peu brutale. Je ne pense pas qu'elle parle à l'inconscient. Elle parle au conscient. Elle parle à la raison, si vous voulez. C'est une musique qui peut être comprise et qui parle à la raison. Ce n'est pas ça que j'appelle la musique, d'accord ? Ce n'est pas de ce genre de musique dont j'ai envie de parler. D'accord ? Donc maintenant, on va faire entendre une autre chose, mais je vous prépare un petit peu avant qu'on écoute. *interactions techniques pour lancer la vidéo : C'est - c'est août ? Oui. Non, non, attends, c'est 25 août. Attends une seconde. Ouais. On ne le met pas tout de suite. D'accord. D'accord.*

François Nicolas : Une petite observation, ça m'a quand même beaucoup évoqué les préludes de...

Alain Connes : Oui, mais alors ça veut dire que ça parle plus - c'est ça - dit plus sur Debussy. D'accord. Bon alors d'accord. Donc alors maintenant, j'essaie d'illustrer, mais bon avec de faibles moyens, qui sont mes propres moyens, ce que j'essaie de dire. Je ne suis pas musicien - en parlant, si vous voulez, de musique qui doit justement parler à l'inconscient. Alors euh, moi je ne suis pas musicien, je n'ai pas le temps. J'aimerais bien, mais je n'ai pas le temps. Il m'arrive d'être, comment dire, suffisamment interpellé sur le plan émotionnel - si vous voulez, inconscient - pour que ça m'oblige à me mettre au piano pour exprimer quelque chose qui ne peut pas se dire par des mots, parce que si j'employais un mot, ce serait un mot qui ne serait pas approprié. Et avec Danye, nous avons perdu un ami très très cher l'an dernier. Et euh à un moment donné, nous l'avons visité à l'hôpital, et c'était un moment tournant auquel, si vous voulez, bon, la rationalité obligeait de penser qu'il était perdu. Et en rentrant de cette visite, je me suis mis au piano, et euh, je ne dirais pas que j'ai écrit, puisque j'ai joué simplement, je veux dire, je n'ai surtout pas réfléchi. Voilà. Donc on va faire écouter ce fragment.

Bon, je crois que c'est un bon moment pour m'arrêter.

Denise : Non, c'est un, je crois.
Alain : Non, tu crois ? Oui, peut-être. Tu as raison. Oui, tu as raison. Oui, tu as raison. Oui, c'est sûr. Tu as parfaitement raison. Non, c'est vrai puisque tu as raison, puisqu'il y a 2, 3, 5. Voilà, donc c'est bien ça. C'est bien 1. Oui, il faut enlever le 1 effectivement. D'accord. Voilà.

Échanges avec le public : le site musical, la logique intuitionniste et la complexité de l'inconscient

François Nicolas : On va peut-être - petite question euh immédiate là, mais le site musical dans ce qu'on vient d'entendre là par exemple, oui. Qu'est-ce que - qu'est-ce qu'il fait, là ?

Alain Connes : Eh bien le site musical, ce qu'il fait là, c'est qu'il donne une idée de comment on communique avec l'inconscient. C'est-à-dire que sans le site musical... euh, on... enfin... moi je m'étais toujours posé la question : comment se fait-il que la musique arrive à communiquer avec nous directement, indépendamment du langage ? Et le site musical donne une idée de comment ça peut se produire.

François Nicolas : Mais je veux dire, comment il opère, le site, dans cet exemple-là, parce que...

Alain Connes : Ah, eh bien...

François Nicolas : Il n'opère pas rationnellement.

Alain Connes : Non, bien sûr.

François Nicolas : Non, mais je veux dire, il y a assez peu de notes. Oui, bien sûr. On est dans un espace tonalement très restreint. Donc en quoi les propriétés dont il est question dans le site musical, qui quand même suppose un espace beaucoup plus large.

Alain Connes : Pas forcément. Non, non, non, non, non. Ah ben je vais expliquer ça, parce que ça c'est très important. Bien sûr, l'idée est la suivante. L'idée est que dans le topos de l'inconscient, un déroulement d'une forme ou d'une autre, c'est une trajectoire d'un instant de conscience, d'accord, à l'intérieur. Donc l'idée ici, c'est la suivante. L'idée, c'est qu'un morceau de musique, voilà, par son enroulement dans le site musical, d'accord, qui est défini mathématiquement, va en fait suggérer à notre inconscient un enroulement dans notre inconscient. D'accord ?

François Nicolas : D'accord.

Alain Connes : Donc l'idée, c'est la suivante. C'est une idée qui est purement philosophique, c'est-à-dire qu'elle ne va pas se traduire par du langage, elle ne va pas se traduire par des mots, elle va se traduire par une espèce d'imitation à l'intérieur de l'inconscient de ce qui s'est transmis. Donc je veux dire, peu importe ce qui est donné au départ ; ce qui est très très important, c'est d'avoir la manière dont ça peut se traduire dans le topos de l'inconscient directement. Voilà, c'est ça l'idée. D'accord ?

François Nicolas : Mais l'enroulement, par exemple, si on en prend une forme complètement abstraite - oui - A, B, C, A', D, E, A", F, G, A, etc., on a l'effet d'enroulement parce qu'on a la linéarité et puis régulièrement il y a un élément qui revient, et donc si on a cet enroulement comme ça, bon, sur l'inconscient, bonjour les dégâts.

Alain Connes : Non, mais bien sûr, parce que ça, c'est trop rationnel. Non, non, bien sûr que non. Non, non, l'idée, c'est la suivante : c'est que justement le topos de l'inconscient, aussi bien que le site musical, est suffisamment élaboré, suffisamment élaboré pour que quelque chose de trop simple comme ça, par exemple, n'ait aucun sens. Il faut que ce soit quelque chose dans le - comment dire - peut-être que c'est dans la manière de jouer, ou un truc comme ça, mais il faut que ce soit quelque chose qui a un contenu, un contenu justement tel que ça réagit en soi-même.

François Nicolas : D'accord. Mais parce que voyez la musique - vous preniez l'exemple d'un son de violon ; on reconnaît tout de suite quelqu'un. À quoi ? Ce n'est pas à la hauteur juste, puisqu'en plus il n'y a qu'une hauteur, on ne sait même pas laquelle il doit jouer. Ça va tenir à quoi ? Ça va tenir à ce qu'on appelle les transitoires, c'est-à-dire à la manière dont il va l'attaquer, son archet. Donc d'un point de vue algébrique, on n'aura rien du tout. On aura un point - peu importe que ce soit un la ou un la à côté, on s'en fiche. Mais la musique va jouer directement là-dessus, c'est-à-dire pas sur l'algèbre des hauteurs, mais sur précisément toute la nourriture.

Alain Connes : Oui. Mais cette nourriture, elle est aussi exprimée par des hauteurs. C'est-à-dire que Oui, mais je veux dire, ça peut se faire avec trois notes, ça, de toute façon. Oui, bien sûr. Oui, bien sûr. Oui, oui.

François Nicolas : Donc la qualité - enfin, je veux dire, ce qui va faire musique n'est pas simplement combinaison acoustique, etc. - ça va être le fait que chacune des hauteurs va être finalement imprégnée.

Alain Connes : Non, mais ça, tout ça, c'est technique. Ce que je suis en train...

François Nicolas : C'est charnel, c'est le plus...

Alain Connes : Non, non, non, non. Ce n'est pas ça que je suis en train d'essayer d'expliquer. Non, ce que je suis en train d'essayer d'expliquer, c'est la chose suivante : c'est que justement, je veux dire, on peut - tant qu'on n'a pas le point de vue philosophique, c'est-à-dire le topos de l'inconscient, d'accord, le topos de l'inconscient - tant qu'on n'a pas ce point de vue-là, on va rester à un niveau d'explication rationnelle des sons ou de choses comme ça. D'accord ? Ce que j'essaie de dire, c'est qu'on n'atteindra une communication avec l'inconscient qu'à partir du moment justement où on va s'approcher de ce site musical.

Donc bon, ce que je trouve extrêmement difficile à expliquer - moi c'est une chose que j'ai énormément de mal à expliquer - c'est la chose suivante : c'est que quand on regarde certains compositeurs classiques, je ne parle pas de tous les compositeurs classiques, eh bien il y a une constante dans leur composition - qui est, sauf les compositions posthumes - qui est qu'elles ont un accès direct à l'inconscient. C'est-à-dire que même si la composition n'est pas forcément bien jouée, etc., elle a un tel contenu, comment dire, je ne sais pas comment l'exprimer par des mots, mais elle a un tel contenu, comment dire - ce n'est pas émotionnel du tout. Ce n'est pas ça. C'est quelque chose qui est beaucoup plus difficile à définir, et qui est par exemple caractéristique de Chopin, hein, je veux dire, et qui fait que justement quand Chopin - il y a des œuvres posthumes, etc. - ce truc-là a disparu complètement, parce qu'il mettait un temps infini à essayer de le mettre au point, de

le définir, de telle sorte que ça soit transmis. Alors ce que j'essaie de dire justement, c'est que cette particularité, elle existe, elle existe dans pas mal d'œuvres qu'on pourrait analyser, etc., et pour moi, je ne la comprends que comme je l'ai dit, je ne la comprends pas autrement. Je ne la comprends pas par un instrument, je ne la comprends pas par des mots, je ne la comprends pas par une rationalité. Et justement je ne sais pas - c'est pour ça que j'ai beaucoup plus de difficultés à comprendre des œuvres très modernes, parce que justement j'ai l'impression que par leur technicité, par leur caractère presque trop rationnel, elles n'arrivent pas à atteindre ce niveau. (*s'adressant à une personne qui souhaite intervenir*) Oui, vas-y.

Lydie Solomon (pianiste concertiste) [8] : Je me permets - entre la musique même des mathématiques et la musique même de l'inconscient - je les connaissais toutes les deux, même si j'ai encore plus étoffé la musique que les mathématiques (les gens m'expliqueront d'ailleurs, la musique qui est cachée derrière la première pièce que nous a fait écouter Alain Connes). Oui, il y en a une qui paraît complexe parce qu'il y a beaucoup plus de notes. Elle est atonale. Oui. Et il y a des polarisations parfois vers la tonalité, mais elle est atonale. Et la deuxième est complètement tonale, comme disait François Nicolas.

Alain Connes : Oui. Ah, tout à fait.

Lydie Solomon : Et je ne sais pas si tu as remarqué que tu utilises les 2^{e} et 3^{e} degrés énormément.

Alain Connes : Oui, bien sûr.

Lydie Solomon : Les nombres 2 et 3.

Alain Connes : Non, tout à fait.

Lydie Solomon : Il y a une sorte d'intimité entre les 1er, 2^{e} et 3^{e} degré, et la complexité qui parle à l'inconscient, non, on ne peut pas la dire par des mots, mais elle réside dans ton expression, qui est ce point de conscience qui a été exalté par l'émotion. Oui. Et ce que tu appelais en anglais - je ne sais pas si c'est ce mot - le temps irrationnel.

Alain Connes : Oui, bien sûr.

Lydie Solomon : Chopin appelait ça Lage [9], finalement.

8. Lydie Solomon avait donné un récital lors de la fête donnée en l'honneur des 60 ans d'Alain Connes, à l'IHÉS. Ici elle a fourni la tonalité du second morceau écouté d'Alain Connes mais la transcription ne semble pas avoir noté cette remarque.

9. *Note de la transcriptrice : Ici, je ne sais pas si c'est effectivement ce mot qu'a utilisé Lydie Solomon. On trouve sur la toile : La "Position Naturelle" de la main selon Chopin : à l'encontre de la tradition pédagogique de son époque (qui faisait commencer tous les élèves par la gamme de Do majeur, composée uniquement de touches blanches), Chopin jugeait la gamme de Do majeur comme la plus difficile et la plus antinaturelle sur le plan anatomique, car elle force la main à s'étaler sur un plan rigide. Pour Chopin, la position la plus intime, confortable et fluide pour la main humaine repose sur la gamme de Si majeur : les trois doigts longs (index, majeur, annulaire, i.e. 2^{e}, 3^{e} et 4^{e} doigts) se posent tout naturellement, en épousant l'intimité et la proximité des touches noires (en particulier Do♯, Ré♯, Fa♯ ou Sol♯, La♯). Le pouce et l'auriculaire (1er et 5^{e} doigts) tombent alors sans aucun effort, tout près, sur les touches blanches aux deux extrémités. Pourquoi cette proximité crée-t-elle cette sensation intimiste ? Dans ses Esquisses pour*

.....

Alain Connes : Oui, oui, bien sûr, bien sûr. Et ça, c'est difficile de le mettre en mots. Frappant comme la musique qui est - qui suscite - plus simple en fait, elle est infiniment plus complexe. Voilà. Par le fait - mais par des choses comme ça. Exactement. Non, mais ça, exactement. Donc ce que j'ai - enfin je ne sais pas, moi - pour moi ça, il y avait un mystère, il y avait quelque chose que je ne comprenais absolument pas, et dans justement la musique, et c'était ça. C'est quelque chose de très très, comment dire, très important d'une certaine manière, parce que j'avais beau lire un tas de livres, etc., de même des choses d'harmonie et tout ça, euh, ça restait extrêmement mystérieux. Et euh je veux dire, euh, donc euh, tant que je n'avais pas réfléchi avec le côté aussi le côté philosophique, c'est-à-dire le côté de la nature de l'inconscient, de ce que c'est que l'inconscient, etc., il me semblait qu'il n'y avait aucun moyen de - justement on peut parler de la texture, on peut parler des instruments, tout ça, je suis bien d'accord que ça existe et tout ça, mais pour moi, ce n'est pas le point central. Le point central, c'est ce qui permet à la musique d'échapper au langage.

On a fait des expériences - c'est Stanislas Dehaene qui a fait des expériences - en regardant le fonctionnement du cerveau, et ils se sont aperçus en fait que justement le - on ne sait pas ce qu'il faut - est-ce que c'est fiable ou pas, mais en tous les cas les gens dont ils ont observé - ils ont observé en écoutant de la musique - ils se sont aperçus que ce n'était pas du tout l'aire du langage qui était utilisée. C'était l'aire de la géométrie. Alors ça pose un tas de questions. Ce que je veux dire, c'est que pour moi le mystère le plus total, c'était toujours en quel sens justement la musique est une manière de communiquer, mais qui est complètement autre, et qu'il est impossible de décrire par des mots. C'est-à-dire que quand on essaie de la décrire par des mots, on la détruit. C'est pour ça que je ne peux pas qualifier. Je veux dire - oui, vas-y, vas-y. En fait ça rejoint - monsieur, vous parliez ce matin en fin de matinée - oui - parce que ce matin, en fin de matinée, on a parlé du fait de faire de la musique par un algorithme, ben oui - et moi il me semble vraiment que ce qui différencie là les deux, c'est le côté affectif en fait. Bien sûr, mais bien sûr, bien sûr. Bon, pour vraiment le maintenir - toi tu dis que par le topos de l'inconscient il semblerait qu'on puisse - ben disons que - oui, oui, oui, bien sûr. Quoi ? Ben - voilà, exactement. Exactement. Si vous voulez, ce qu'il y a, c'est que tant qu'il y avait des modèles de compréhension de cette possibilité qui étaient trop frustes, ça ne me convainquait absolument pas, parce qu'on peut parler de texture, on peut parler d'un tas de choses, mais tant qu'on n'a pas un modèle qui est extrêmement difficile - parce que la géométrie qui est sous-jacente à ce modèle-là, c'est quelque chose d'absolument incroyable - le fait que ça donne les zéros de zêta, c'est une garantie de ça. On sait que c'est quelque chose qui a d'une profondeur absolument incroyable.

Alors, est-ce que - moi mon rêve, hein, mon rêve, c'est un rêve ? Ben c'est pas mon but, hein. Mon rêve, c'est qu'en fait Chopin était quelqu'un qui, sans le savoir - je ne dis pas faisait des maths - mais il avait une telle puissance de, je ne sais pas, de raffinement. Et souvent, moi, ce qui m'est

une méthode de piano, Chopin explique que la proximité naturelle entre ces trois notes surélevées (les touches noires) et la forme courbe de la main offre la souplesse du poignet : la main n'est pas crispée. Le "toucher de velours" : étant naturellement positionnés plus près de l'enfoncement de la touche, ces trois doigts centraux n'attaquent pas le piano avec force, mais le caressent. Chopin disait à ses élèves d'installer leur main sur ces trois notes noires centrales comme pour une "poignée de main" amicale avec le clavier : la proximité des doigts et des touches y est si parfaite qu'elle supprime toute tension et libère la sonorité la plus poétique et chantante.

arrivé, c'est que j'apprenais plus en étudiant une partition de Chopin qu'en lisant un article de maths. C'est-à-dire, ce que je veux dire par là, c'est qu'il y avait un degré de raffinement qui allait au-delà de la première impression, de la deuxième impression, etc., etc., etc. Il y avait une espèce de - je ne sais pas - il y avait une espèce de force sous-jacente absolument incroyable, qui est présente, qui est une force de vie, qui est une force de je ne sais pas quoi, et qui n'est pas de la rationalité. Oui.

Questions sur le diagramme, la logique intuitionniste et le corps

J'ai une question par rapport au diagramme de Venn que vous avez fait, que - oui, oui - en fait ça vous questionne beaucoup, cette manière de voir mathématique, musique et inconscient, philosophie - oui, philosophie, oui, oui, là - je me demande en fait si ce n'est pas - j'essaie - c'est provocatif de dire comme ça - si c'est pas plutôt que dans cette intersection, en fait, on a - oui - euh - pour la trouver, on doit plutôt appauvrir tout ça, c'est-à-dire que je comprends bien le fait que - inductivement, de formation mathématicien, je suis mathématicien, oui, euh, on puisse se dire : OK, je ne peux pas mettre une topologie dans un produit direct, j'ai besoin d'un site, de Grothendieck, de ce site de Grothendieck, je sais que si j'utilise un topos de Grothendieck je vais pouvoir utiliser un certain nombre de résultats - que dans les points, dans le fait d'avoir des points - comme - oui - ensuite il y a le site - euh - là on parle de logique intuitionniste, dans un site, logique, hein. Oui, oui. Donc on voit cette partie-là, par exemple - par exemple elle ne rentre pas dans cette figure-là. Attention, peut-être - non, non, non, justement - peut-être qu'en fait, justement, ce qui se passe, c'est que la logique intuitionniste sous-jacente au site musical, qui est un topos, donne une idée de la logique intuitionniste qui est sous-jacente à l'inconscient. Attention, ce que ça suggère - ce que le site musical suggère - c'est il suggère un exemple d'un topos de l'inconscient. Et comme il est extrêmement riche et qu'il a du coup une logique intuitionniste extrêmement élaborée, qu'est-ce que ça veut dire ? Ben ça veut dire que toutes ces - ces mouvements qu'on fait, toutes ces trajectoires qu'on fait dans le site musical, en fait, elles nous disent quelque chose sur notre topos de l'inconscient, et en particulier sur notre logique intuitionniste. C'est ça que ça veut dire. Ça va très très loin. Ça va vraiment très très loin. C'est-à-dire que tant qu'on n'avait pas - par exemple avec Patrick Gauthier-Lafaye - un exemple de topos très riche qui a une relation avec le topos de l'inconscient, on aurait toujours pu nous critiquer en disant : bon ben tout ça, c'est des mots. On ne sait pas de quel topos vous parlez. Alors, le fait que le topos de la musique nous émeuve, et soit connecté directement, et soit d'une richesse incroyable, moi ça me convainc. Ça, ça me convainc. Attendez, le schéma dont tu parlais, le diagramme de Venn, c'est un diagramme de Venn ou c'est un diagramme eulérien ? Moi - non, c'est un diagramme de Venn. Bon, alors parce que si on l'interprète comme un eulérien - Ah non, mais là ça devient peut-être plus intéressant, parce que ça peut - en suivant - Oui, on ne peut pas faire - on ne peut pas isoler deux sans l'autre. Oui. Et que ça voudrait dire que finalement l'opérateur - enfin, ce qui serait dessiné au centre, ça ne serait pas la partie commune, mais ça serait ce qui permet le passage des trucs - Vrai. C'est vrai, mais oui, mais je voulais quand même qu'il y ait le site musical au milieu. Donc c'est bien, mais à ce moment-là ça lui donne une autre fonction qu'un élément commun. Oui, oui, tout à fait. Qui correspond à l'objet - à l'objet petit a. Ouais, l'objet petit a. Oui, oui, bien sûr. Est-ce qu'il y a un lien entre la contrainte et la complicité ? Parce que je - refus de la contrainte. Oui. Tu as raison, tu as raison, tu as raison, tu as raison, tu as raison. Parfaitement. Non, tu as raison. Ce qu'il y a, si tu veux - alors, par exemple, un exemple d'exploration qui n'est pas faite du tout - mais l'exemple d'exploration qui n'est pas faite du tout, c'est qu'on s'est concentré sur le 12 du 2. Mais il faudrait regarder le 3. Et le 3, c'est le 19. Et le 19,

il est très riche, et il est disjoint du 12. Dans le site musical, l'orbite périodique qui est reliée à 2, elle est disjointe de l'orbite périodique reliée à 3, et les relations entre les deux sont extrêmement subtiles. D'accord ? Donc en fait ça suggère des choses aussi, même au niveau musical. Je suis certain que ça suggère des choses, parce que qu'est-ce que ça veut dire ? Ça veut dire que, alors que quand on fait le glissando d'octave ou des choses comme ça, là on va vers le 2, mais le glissando avec le 19, c'est autre chose. Et donc il faudrait reprendre des pièces musicales connues qui font justement une espèce d'approximation de la limite qui est périodique, et les comprendre en ces termes-là.

Mais est-ce que - il faudrait pas, puisque l'image qui - oui - qui est prise, c'est d'un inconscient qui parle à un inconscient, est-ce qu'il faudrait pas mettre l'accent sur une autre dimension qu'on dit capitale de la musique ? Oui, c'est que la musique communique par des sons. Oui. Et que le propre, quand même, à mon avis, des sons musicaux, c'est d'être la trace d'un corps. J'ai même dit d'un corps à corps, d'ailleurs, parce que à ce moment-là on est dans une autre problématique, parce que ça veut dire qu'il y a la trace d'un corps, mais un corps par définition c'est corporel, alors que le son n'a rien de corporel. Donc n'est-ce pas quand même cet aspect - le fait que des corps, en plus, dans la musique, c'est un corps à corps, musicien - et à ce moment-là c'est le fait qu'il y ait une trace d'un corps à corps qui a un côté - mettre en bande ? - qui va d'ailleurs dans le sens de l'affect - je ne sais plus qui l'a dit. Non, mais bien sûr, non, mais ça, on est bien d'accord avec ça, on est - c'est la dimension fondamentale de la - parce que la - c'est quand même un mouvement, d'accord ? Ce n'est pas - pas du - non, non, non, oui, oui, oui, oui, oui, mais - et à ce moment-là de chercher la capacité de toucher l'autre inconscient par cette dimension de communication par la trace. Oui. D'accord. D'accord. Euh, sauf que, sauf que - bon, je conçois cela, ça peut donner une indication, mais je ne pense pas que ça touche à la chose universelle. Donc pour moi c'est plus un côté un peu épisodique. Ce n'est pas - je ne pense pas que ce soit fondamental. Je ne pense pas que ce soit fondamental. La musique, c'est fondamental parce que - parce que d'ailleurs dans le morceau - Oui, mais il reste la partition, dans le - Ah non, mais là c'est la partition, elle ne touche personne. La partition, elle touche lorsque c'est joué, c'est-à-dire lorsque c'est passé par un corps à corps. Non, mais d'accord. Non, mais c'est ce que je veux dire, ce n'est pas ça. Ce que je veux dire, c'est que - non, non - ce que je veux dire, c'est que bien sûr qu'il y aura un corps à corps, mais que ce corps à corps, une fois qu'on a la partition, c'est grâce à la partition que le corps à corps peut avoir lieu. D'accord. Et moi, c'est ça qui m'intéresse. Non ? Quand tu improvises, tu n'as pas - Oui. Non, non, bien sûr. Mais c'est - oui, ce que je veux dire, c'est que quand j'improvise, bon ben, quand - ce qui va rester de l'improvisation, c'est une partition. Alors, cette partie - oui, c'est ça que je veux dire. On peut la transcrire. Donc ce que j'entends par là, et c'est ça en fait. Donc il y a une charnière. Cette charnière, c'est quoi ? C'est bon, l'improvisation, la notation d'improvisation qui ne marche pas, qui traîne pendant une semaine, etc. Ça, c'est ce que faisait Chopin. Et puis après il revenait au truc de départ. Donc il avait bien compris qu'en fait il était absolument crucial pour lui que la partition arrive à noter exactement ce qui ensuite pouvait être transmissible. C'est ça que je veux dire. Ce que je veux dire, c'est que bon, bien sûr que l'improvisation, la charnière, tout ça, ça va marcher. Par contre, ce qui est infiniment plus difficile, c'est ce qu'il faisait : c'est arriver à décanter, à partir de l'improvisation, à partir de - le squelette, le squelette transmissible, qui lui justement est de l'algèbre et appartient au site musical. Mais ça, c'est l'écriture musicale qui algébrise la musique. Mais ce que je veux dire, c'est que la musique ne touche pas par cet algèbre. Cet algèbre, c'est comme un programme pour un corps à corps, et ce qui est important - et d'ailleurs la preuve, le concours Chopin, c'est que ça se fait de 50 000 façons. Il n'y a pas qu'une

seule façon, sinon ce ne serait même plus un concours, ça serait un truc d'exécution. Il est probable que l'idée musicale de Chopin était largement supérieure à ce qu'il a noté - et qu'il l'a notée sur une partition parce qu'il fallait. Non, non, non, mais attends, attends, attends, attends. Non, mais c'est un point - c'est un point très important. C'est un point très important. Mais ce dont je parle, ce dont je parle quand même quand je parle du site musical et d'une trajectoire dans le site musical, cette trajectoire, elle peut être suffisamment, comment dire, compliquée, etc., de telle sorte qu'elle contient exactement ce dont on parle. Ça sera contenu dans la trajectoire. La trajectoire, du fait qu'elle est continue, etc., elle va exactement ressortir toutes ces nuances et tout ça. C'est ça que je dis. Ce que je dis, c'est que c'est suffisamment riche, de même que le topos de l'inconscient est suffisamment riche pour que, quand il ressent les choses par une trajectoire qui est une trajectoire de conscience, toutes ces nuances-là vont être présentes. Elles vont être présentes sous une forme qui sera - mais elle sera humaine, cette forme-là. Le topos de l'inconscient, il est humain par définition. D'accord ? Il a en lui toutes ses imperfections, etc. Donc euh, moi je veux dire, après on peut dire - on peut rajouter toutes sortes de choses, mais ce que j'essaie de transmettre, c'est justement cette idée : la complexité du topos de l'inconscient, de sa richesse, et attention, du fait que à l'intérieur il y a des trajectoires continues. Alors, le piano ne donne qu'une version - je veux dire, la partition ne donne qu'une version schématique, algébrique - mais la réalité est bien différente, puisque la réalité c'est une trajectoire continue. Attention, à l'intérieur, avec toutes les résonances, avec toutes les résonances des notes précédentes, avec toute l'irrationalité dont tu parlais, des temps, etc., qui n'ont rien de rationnel et qui n'ont rien de purement algébrique. Donc ce qu'il faut voir, c'est qu'au côté un peu algébrique du site musical se rajoute justement le fait que - dedans - parce que dans les critiques, il y avait justement le fait qu'il y a deux dimensions - mais bien sûr, puisqu'il y a la dimension de l'enroulement, c'est-à-dire du temps qui s'enroule dans le site musical, hein, dans les points du site musical. Donc c'est ça, ça joue un rôle essentiel, hein.

Oui, mais enfin moi je reviens sur l'inconscient ; il me semble que ce qui manque quand même dans ce schéma-là, et qui en musique est capital, c'est le corps, le corps humain et le corps instrumental. Ouais. Et le corps - euh - s'il n'y a pas ça, il n'y a plus de musique. Et donc, or si tu veux le corps, pardonne-moi - je - le corps, euh, c'est difficile - d'ailleurs s'il y a un inconscient, parce que le propre de la musique, c'est quand même que c'est une pensée. Je suis entièrement d'accord avec toi, que ce n'est pas du langage, etc., mais parce que c'est une pensée qui passe dans un corps. C'est aussi une pensée - Oui, mais alors là on rentre dans le deuxième livre, avec le corps, avec le topos - là il y a ça coince un peu. Non, non, parce qu'on a écrit un deuxième livre, qui est fini maintenant, avec Patrick Gauthier-Lafaye, et dans ce deuxième livre, exactement, on discute exactement ce point-là. Ah. C'est-à-dire on explique justement qu'il y a le "qui nous sommes" et il y a le "où nous sommes". Alors, le "qui nous sommes", c'est compris par le topos de l'inconscient. Et le "où nous sommes", c'est le monde extérieur, c'est ce que nous sommes en tant qu'être humain, etc. D'accord ? Et on discute en long et en large à travers le lien entre les deux. Et ce qui ressort - ça c'est assez étonnant - c'est qu'en fait ce qui ressort de ce livre, c'est qu'en fait, alors que le "qui nous sommes" correspond au topos de Grothendieck, le "où nous sommes" correspond lui au quantique. D'accord ? Et lequel correspond à la géométrie non commutative ? Et en fait, dans ce que j'avais fait, il y avait un lien justement, et ce lien c'était en particulier le site musical, entre le quantique et les topos. Et alors donc ça, c'est toute une - c'est quelque chose - des conditions ad hoc comme - non, non, non. Donc là c'est quelque chose qui - non, c'est quelque chose qui est beaucoup plus complexe en fait. Le corps est où là-dedans ? Alors, et ben le corps, il est dans le "où nous

sommes" bien entendu. C'est-à-dire que le corps est développé sur le point. Comment - qu'est-ce que vous entendez exactement par là ? Ben le point sur le quantique, c'est que quand on analyse - le "qui nous sommes", enfin bon, ça c'est avec le topos de l'inconscient - mais quand on analyse le corps humain, le "où nous sommes", etc., on s'aperçoit - ça c'était la discussion que j'avais eue avec Jean-Pierre Changeux - que le point de vue matérialiste a ses limites très vite. Et la raison pour laquelle le point de vue matérialiste, c'est-à-dire de dire que le corps humain est formé de cellules, etc., etc., se casse la gueule, c'est précisément le quantique. Et donc on est obligé d'aller jusque-là pour arriver à comprendre les choses, et pour arriver à comprendre justement en quel sens. Alors, c'est toute une réflexion, parce que c'est une réflexion justement autour de - bon, de - alors, et par exemple un exemple typique de discussion qu'on a eue, c'est qu'en ce qui concerne le corps humain - alors le corps humain, on dit oui, c'est un ensemble de cellules, tout ce qu'on voudra, mais en fait c'est une hérésie de penser ça, parce que dans le corps humain, chaque cellule est remplacée au bout d'un certain temps. Donc en fait la seule chose qui est pérenne, ce n'est pas l'ensemble des cellules qui nous forment, c'est le schéma qui nous forme. C'est le schéma qui nous forme. Oui, vas-y. Parce que ta première composition issue des mathématiques - je trouve que c'est un bon exemple de comment une musique, comment les choses de l'esprit peuvent être émouvantes entre guillemets. Oui, il y a quand même - Oui, oui, c'est sûr. C'est sûr. Mais c'est une émotion qui est très très différente. Oui, c'est une émotion qui parle au rationnel. D'accord. C'est pas - là on parle - non, je suis entièrement d'accord, bien sûr, simplement ce que je prenais là, c'est le corps, précisément pas du tout dans sa dimension - frais de cellule, etc. Le corps au sens où on en a parlé ce matin à propos de l'émergence, c'est-à-dire quelque chose qui émerge sur un ensemble de cellules, du quantique, etc., mais justement dans une autonomie relative. Ce qui rejoint, disons, la problématique phénoménologique si on veut, c'est-à-dire comme un espace dans lequel il y a des phénomènes qui ne sont absolument pas intelligibles ou compréhensibles par la décomposition en cellules, en molécules, etc. Or cette dimension-là, qui émerge du corps humain, c'est celle qui m'intéresse, et à mon avis c'est celle qui est actrice en musique centralement. Non, mais alors justement, mais je reviens là-dessus, parce que - on - ce dont on s'aperçoit, quand on s'aperçoit que justement le - on n'est pas juste un ensemble de cellules, etc., mais on est un schéma - ce qui ressort de ça au bout d'un moment, c'est qu'on s'aperçoit que ce qui compte, c'est précisément la structure. C'est-à-dire c'est exactement la comparaison qu'il y a entre quelqu'un qui voudrait comprendre le fonctionnement d'un ordinateur en le démontant, et sans se rendre compte qu'en fait ce qui compte, ce n'est pas ce qui le constitue - ce qui compte, c'est les logiciels qui font en sorte que les programmes marchent. Alors, c'est la même chose en ce qui concerne l'être humain. C'est-à-dire qu'en fait ce qui compte justement, ce n'est pas du tout les cellules ou quoi que ce soit, mais c'est quelque chose de global. Et au fur et à mesure qu'on réfléchit à ces choses globales, ben on s'aperçoit que la meilleure formulation de ces choses globales, c'est les topos, et c'est le "qui nous sommes", et que c'est uniquement avec la notion de topos qu'on arrive à avoir une vision qui ne soit plus géométrique, qui ne soit plus localisée, etc., et qui corresponde à l'humain précisément. Alors, quelle est la logique interne de ce topos ? Alors, la logique interne d'un topos individuel, d'accord, c'est une logique qui fait que quand on est confronté à une discussion, ou on est confronté à une psychanalyse ou quoi que ce soit, on va avoir l'impression qu'il y a des contradictions. On va voir l'impression qu'il y a des choses - on donne dans le deuxième livre un exemple typique. C'est l'exemple où les choses sont localement rationnelles. C'est-à-dire qu'au moment où, après une très longue boucle, va se refermer comme les orbites périodiques dont je parlais, on va s'apercevoir que à la fin de la boucle, il y a un décalage. Et ce décalage, c'est exactement ce décalage qui va être le symbole d'un trou à l'intérieur, qui va

signifier l'existence d'un trou. D'accord ? Et alors tout ça, on le décrit en détail. Mais ce que je veux dire, c'est qu'il faut arriver à avoir une image globale, d'accord, justement de la complexité, de l'intérêt du topos de l'inconscient, de ce que ça signifie au niveau charnel, de ce que ça signifie au niveau humain, etc., dans notre rapport avec le monde extérieur. D'accord ? Et une fois qu'on a envisagé ça, qu'on a envisagé cette complexité, de comprendre que la musique peut-être - bon, à travers peut-être ce site musical, mais peut-être un moyen de - d'accéder à la complexité de cette chose-là, qui est une complexité absolument incroyable, qui n'est pas justement formalisable dans le langage visuel, qui n'est pas formalisable avec les manières de penser qu'on a d'habitude. C'est une manière qui est beaucoup plus élaborée - cette manière qui provient des topos justement - c'est une manière qui est beaucoup plus élaborée que ça, qui est beaucoup plus intéressante, justement, voilà, beaucoup plus mystérieuse. Et qui, à mon avis, a été dévoilée par certains musiciens. Bah, c'est ça que je trouve absolument extraordinaire.

Questions sur le temps, la matérialité du son et le corps

Oui, il y a une question - attends, j'ai un problème d'audition, il faut parler très fort - par plus fort, oui, pardon. La question de la matérialité, donc le son entre guillemets, l'ingénieur du son - d'accord, c'est-à-dire le support - euh, dans votre exposé vous parlez des fréquences, des - en fait la question, ce n'est pas une question, parce que j'ai l'habitude, mais c'est de penser la fréquence que dans le contexte des temporalités, c'est-à-dire événement, ordre, ce qui arrive avant ou - Oui, oui, alors attends - oui, non, non, non, mais c'est simplifié de parler seulement de fréquence. Moi personnellement je - des fréquences dans un domaine, dans un contexte plus général - oui - qui peut être des fréquences spatiales. Ah, d'accord. Rajouter des dimensions. Rajouter des dimensions, d'accord, d'accord. Alors quand on parle de la fonction - on tout de suite au nombre complexe, on voit bien qu'il a un sens de répression, sûr, c'est le i à la puissance. Oui, oui, tout à fait. Oui, il y a - il y a un - Oui. Euh alors, il y a une structure qui me - qui m'interroge depuis longtemps, et c'est ça qui me - pendant longtemps, un objet - la structure, le nœud. Ouais. Alors moi je ne m'associe pas du tout au diagramme de Venn qui a été montré là - le - la partie commune, l'intersection - le nœud, c'est-à-dire trois boucles. Oui, oui, je connais le nœud, ou de trois bouts, d'ailleurs, sont entrelacées pour qu'elles se tiennent les unes aux autres indépendamment les unes des autres. Et alors là je fais tout de suite le lien avec la physique, et d'ailleurs vous mentionnez tout de suite - vous mentionnez euh parler de spectre d'absorption, vous - spectre d'émission, hein, c'est ça, ça vient directement. Oui, bien sûr. Oui. Et donc on a une destruction de la manière. Hm, hm. Donc il y a un lien - donc c'est une région qui est plus - ce n'est pas une région, ce n'est pas un intervalle, c'est une région dans l'espace. Oui. Bon ben évidemment, je veux dire, le type de topos que j'ai décrit à partir du site musical, ce n'est qu'un cas particulier de topos, je veux dire, beaucoup plus généraux, mais euh il n'empêche qu'il est apparu de manière absolument incroyable sous des points de vue différents. Donc je veux dire, il a quand même une - comment dire - une singularité extrêmement frappante. Quand je parle des fréquences, je ne parle pas forcément de fréquences pures, parce que simplement dès qu'on introduit le temps, il y a la transformée de Fourier, et la transformée de Fourier va faire une fonction. C'est-à-dire qu'au lieu d'avoir des fréquences pures, on aura des fonctions. Donc on aura quelque chose qui aura une texture. On aura quelque chose qui sera beaucoup plus riche que simplement une fréquence pure. Mais ça sera formulable dans le site musical. D'accord ? C'est ça qu'il faut comprendre : c'est qu'à partir du moment où on introduit le temps, d'accord, et évidemment puisque dès qu'on fait de la musique, c'est une trajectoire dans le site musical, ou plusieurs

trajectoires s'il y a plusieurs voix. D'accord ? Donc à partir de ce moment-là, la texture, elle a un sens évidemment, hein. Projection sur - Oui, c'est ça. Voilà, c'est bon. Mais il y a de l'ambiguïté, d'ailleurs, parce que je n'aime pas ce temps dont on parle comme d'un axe, comme d'une quantité mathématique. Pour moi, c'est l'ordre ou le désordre. Oui, oui, bien sûr, bien sûr, bien sûr. Pictural, bien sûr. Non, non, il y a le temps de la physique. Oui. Ta composition, ton improvisation - majeur, la - de - pardon - elle est impossible à noter sur une partition. Oui. Oui. Impossible. Oui. Bah c'est-à-dire - non, non, elle est possible. Elle est - non, elle est possible. Non, non, elle est possible. Non, non, elle est - non, elle est possible. Oui, oui. Ah ben non, mais le rubato, on ne l'écrit jamais. Et voilà. Voilà. Non, mais c'est ça qu'elle veut dire. Non, non, mais ça, tu as parfaitement raison. Tu as parfaitement raison, parce que c'est - et justement, moi c'est pour ça, moi j'ai un ordinateur, j'ai un piano électronique. Donc effectivement, avec le piano électronique, je peux avoir la partition. Mais - mais par contre, la partition, effectivement, je veux dire, elle ne décrit pas - elle ne décrit pas ce dont on parlait, c'est-à-dire le côté charnel, le côté humain, etc. Bien sûr, c'est l'algèbre musicale, de toute façon, l'algèbre ne capte que la structure. Voilà, elle ne capte que la structure discrète. Oui, oui, elle ne capte pas la topologie sonore, là-dessus. Mais ça, aucune partition ne le fait. C'est pour ça d'ailleurs que les partitions on peut les jouer très différemment, sinon on n'aurait plus qu'à exécuter. Alors, oui, bien sûr. Non, non, mais ça serait - bon - mais ce qu'il y a, c'est que dans le site musical, il y a exactement la flexibilité qui vient de l'interprétation. Attention, hein, parce que c'est d'une trajectoire continue, qui n'est pas algébrisée. Ah, bah, si ça - il faut le comprendre, ça. Mais alors je ne comprends pas, parce qu'avec les nombres entiers - comment - je veux dire, toute une partie de la musique se joue sur le travail autour d'une note, là. Oui, mais non, mais là, comment - je me balade dans le site musical, je suis au même point, mais tout le travail musical - pas du tout, pas du tout, on n'est pas au même point, puisque - en entendant ce que vous jouez, d'accord, en fait c'est une fonction, et c'est une fonction qui dépend du temps. Et cette fonction qui dépend du temps, elle est indexée par le site musical, mais ce n'est pas une fréquence pure. La même note, là - par - je - ça ne fait rien. Ce n'est pas la même note. Ce n'est pas la même note, parce qu'il y a des vibrations, et qui sont données par la transformée de Fourier de cette fonction, et ça, c'est quelque chose qui est absolument continu, qui n'est absolument pas discret. Justement, l'erreur qu'on fait - c'est ce qu'on a fait avec l'écriture musicale - c'est qu'on a remplacé le site musical, qui est continu et dans lequel on se balade continûment, par quelque chose de discret. On est obligé si on l'écrit. Je sais bien qu'on est obligé, mais moi je parle du site musical, et le site musical il est continu, il n'est pas discret. Ce que j'ai expliqué dans mon laïus, c'est qu'il y a le site musical qui est continu, il y a les trajectoires continues à l'intérieur, et il y a une approximation qu'on en donne. Et cette approximation, elle est en effet discrète. Et en étant discrète, elle ne reflète pas, bien sûr, toutes ces nuances. Ça, c'est clair. Et pareil au niveau du tempo - je veux dire, au niveau du tempo, on donne des tempos, etc., mais on les indexe de manière discrète. Pas parce que les zéros de zêta - les zéros sont discrets. Enfin, pas du tout, pas du tout. Les zéros de zêta, les valeurs des zéros de zêta sont absolument pas discrètes. Elles ont un nombre incalculable de décimales très très complexe. Mais ce n'est pas - d'accord, peu importe, mais c'est des points, ça - c'est la transcription en - Ah non, non, mais ça, le fait que ce soit des - entre un zéro et un autre, il n'y a - non, mais il n'y a pas de rapport direct entre les zéros de zêta et - je veux dire, les - comment dire - les notes de la gamme dans l'approximation discrète. Il n'y a strictement aucun rapport. Les zéros de zêta, ils sont obtenus à partir de la continuité du site musical, uniquement à partir de cette continuité. C'est uniquement la continuité et le fait non discret du site musical qui donne les zéros de zêta. Sinon, on en serait à des années-lumière des zéros de zêta. Bien sûr.

Donc toute cette continuité, toute la délicatesse qu'il y a dans le site musical par la continuité, c'est ça qui engendre des choses. Continuité des fréquences - ou - oui, la continuité, et puis des trajectoires, non seulement des fréquences mais aussi des trajectoires dans les fréquences, et de la topologie incroyablement complexe qu'il y a dans l'ensemble des points du site musical. Ce qu'il faut voir, justement, c'est que dans les points du site musical, il y a ces orbites périodiques pour chaque nombre premier, de longueur le logarithme du nombre premier. Et donc il y a une richesse incroyable, comment dire, de continuité, qui n'est pas du tout algébrisable de la manière dont on le fait dans la notation musicale classique. Non, c'est ça qui est fondamental.

Bien sûr, si j'essaie de comprendre - question. Donc ça, c'est du côté de ce que vous avez appelé un instrument idéal. Oui, c'est ça. Oui, c'est ça. Oui. Et dont on a comme substrat dans la réalité que le côté discret - Non, pas le violon. Le violon a un substrat qui n'est pas discret. Non. Oui, quand même. Oui, quand même. Et que, en quelque sorte, l'opération faite par notre inconscient, c'est de savoir remonter de ce substrat au vrai substrat, qui est continu. Et que ce passage-là, qui dépasse langage, raison, il dépend de l'auditeur. Donc il dépend de celui qui joue, bien entendu, et il dépend aussi de l'auditeur, bien entendu. Bien entendu. Et qu'il y a un passage, il y a une espèce d'indication discrète qui est donnée par la musique, et cette - chacun relève - voilà, chacun la relève comme il peut au niveau de son topos de l'inconscient. C'est ça l'idée. C'est un relèvement qui est extrêmement subjectif, et c'est là que l'humain entre en jeu bien entendu, hein.

Bien sûr. Il y a une sorte de supériorité dans la notation mathématique, et une sorte de supériorité par rapport à la notation musicale. On se dit qu'en mathématiques - je suis nul en maths, mais je sais qu'on peut écrire un ensemble infini. On peut - bien sûr, bien sûr. Non, non, mais je vais plus loin que ce que tu dis. Je vais plus loin que ce que tu dis, si tu veux. En mathématiques, justement, ce qui apparaît dès qu'on étudie ne serait-ce que le site musical, ce qui apparaît, c'est que l'on parle de nombres, on parle de fonctions. Et quand on parle d'une fonction $f(x)$, d'accord, à ce moment-là il y a une notion de texture, il y a une liberté dans la définition de la fonction qui est infinie par rapport à une note pure ou une chose comme ça. C'est là que la texture apparaît. C'est là que justement toute la nuance apparaît par rapport à une notation discrète. Donc ce que je veux dire, c'est que le site musical cache un objet d'une complexité absolument extraordinaire. Non, mais ça - la partition - là aussi moi je distingue, disons, l'écriture discrète des hauteurs, etc., et puis ce que j'appelle les notations - crescendo, ou marqué - adagio, ou avec - Alan - c'est évidemment une fonction, une continue, etc. - crescendo, piano, forte - ça devient une fonction quand on interprète. Mais oui, mais c'est indiqué comme une fonction. C'est-à-dire vous prenez une fonction - comment vous faites ? Vous allez du piano au forte - comment vous y allez ? Bon, en gros, vous y allez continûment. Non, ce n'est pas - non, ça, ce n'est pas vrai, parce que justement - non, non, ce serait trop simple si, à partir de la partition - alors si effectivement la musique était faite uniquement par ordinateur, bon ben d'accord, alors ce serait le cas, d'accord, mais elle ne l'est pas. Et là où elle - là où l'humain entre en jeu, c'est précisément cette transition entre la partition telle qu'elle est donnée, d'accord, et la fonction qui est obtenue. Et la fonction qui est obtenue, elle a cette liberté, mais elle appartient au site musical. Elle a - elle - non, mais ce que je veux dire simplement, c'est que donc dans la partition il est indiqué : vous allez du piano au forte par une ligne continue croissante - laquelle, c'est à vous de voir, plus ou moins, et bon, etc. Et donc la partition est constamment enrichie - pas simplement avec le squelette des notes, mais avec ce que j'appelle des notations. Et comme il y a marqué - ou - oui, mais peu importe, peu importe, ça, de toute façon, ça va se traduire

par une fonction qui, si elle est définie dans le site musical, va nous donner exactement la liberté dont on a besoin. Bien sûr. Dire que la musique prend la partition au sens large - pas simplement le squelette, mais toutes les notations - prend en charge tout ça avec la grande liberté que ça donne au corps, effectivement, de - Oui. Elle donne des indications. Elle donne des indications. C'est-à-dire elle donne, disons, un espèce de sous-ensemble des fonctions possibles. Ouais, oui, c'est ça, ou - mais elle ne choisit pas la fonction en question. D'accord. C'est décidé - mais ce que je veux dire, c'est que la fonction en question, elle est répertoriée par rapport au site musical. C'est ça qui est important. C'est-à-dire que le site musical, il a en lui cette continuité, cette dimension infinie qui est présente et qui permet justement d'envisager qu'il contient toute l'information dont on a besoin.

Singularité du site musical, unicité de l'inconscient et morphismes géométriques

Alors, autre question, pour essayer de comprendre. Ouais. Non, mais mon but, c'est d'essayer de faire comprendre une idée. Bon, je ne prétends pas que cette idée soit la meilleure idée - le site musical, le site singulier - il y a un site musical. Ah oui, oui, oui. L'inconscient - Ah, l'inconscient, on en a un chacun. Le - le topos de l'inconscient, on en a un chacun, et il est différent. Il est différent pour chacun d'entre nous. Bon, alors admettons ça. Bon, déjà - alors comment on passe d'un seul site à une infinité d'inconscients ? Ah ben ça, c'est ce qu'on appelle - ça, c'est facile - c'est ce qu'on appelle un morphisme géométrique. Mais oui, mais ce que je veux dire, c'est que - non, mais c'est ça qu'il faut comprendre. Ce qu'il faut comprendre, c'est que dans le modèle qu'on a avec Patrick Gauthier-Lafaye, donc on s'est aperçu qu'on pouvait penser au "qui nous sommes" en termes de topos. Bon, on s'en est aperçu, comment dire, peut-être presque par accident. C'est-à-dire en discutant entre nous, on s'est aperçu qu'en fait - oui, bon ben, moi avant j'aimais pas les topos, hein. Donc bon, j'ai fini par conversion. C'est une conversion. Je n'aimais pas Lacan. Bon, et pourtant je me suis aperçu que des fois il avait des intuitions qui étaient tout à fait étonnantes. Bon, donc on a cette compréhension que chacun d'entre nous - chacun d'entre nous - a un topos de l'inconscient, et que c'est sans doute ce qui le définit le mieux. Ce qui définit le mieux une personne, ce n'est pas que c'est un être matériel - puisque de toute façon on va tous disparaître un jour - non, c'est quelque chose qui est beaucoup plus intéressant que ça. C'est un schéma, c'est une structure, et ce schéma, chacun d'entre nous va en laisser une trace pendant sa vie. Alors bon, Chopin a réussi à laisser une trace tout à fait que moi je qualifie de fabuleuse. Euh, et Riemann aussi. Riemann a réussi à laisser dans sa vie une trace fabuleuse. Ils sont pratiquement contemporains. Ils sont morts tous les deux avant 40 ans. Bon, de la même maladie d'ailleurs, hein. Et donc en fait, euh, ce que je veux dire, c'est que c'est ça qui nous dit qui nous sommes, d'une certaine manière. D'accord ? Ce topos de l'inconscient, il est sûrement incroyablement complexe, et chacun d'entre nous est différent. C'est-à-dire que chacun d'entre nous a sa logique intuitionniste propre, qui lui est propre. Elle peut être très différente d'une personne à l'autre. Ce serait une hérésie totale de dire que nous avons tous le même. Heureusement que ce n'est pas le cas. Et c'est ça qui caractérise l'humain justement. C'est la complexité et l'originalité de ce qui fait chacun d'entre nous. D'accord ? Alors maintenant, ce qu'il y a, c'est qu'on pourrait nous dire : d'accord, vous, vous parlez de ça, mais donnez-nous au moins un exemple d'un topos qui soit d'une grande richesse et qui puisse communiquer avec chacun d'entre nous. Alors l'exemple, ben l'exemple il est là, c'est le site musical. C'est un topos qui est d'une richesse extraordinaire et qui, dans les limites de ma compréhension, communique avec chacun d'entre nous justement, mais communique d'une manière qui n'est pas langagière. D'accord. Oui, ça on est bien d'accord. Qui n'est pas langagière, et communique d'une manière qui fait que

ça nous atteint directement. Ça passe direct dans le topos de l'inconscient. Ça ne passe pas par le "je réfléchis, machin, tout ça", d'accord. Ça passe direct dans le topos de l'inconscient. Alors comment ça passe ? Pourquoi ça passe, et tout ça ? Je n'ai pas trop envie d'y réfléchir, parce que ce qui m'intéresse, c'est que ça passe. La question - parce que vous avez dit que c'est un morceau de géométrie. Oui. Oui, tout à fait. Ah ben voilà. Ça, c'est une excellente question. C'est une excellente question, mais pour y répondre je vais d'abord prendre un cas plus simple. Le cas plus simple, c'est ce qui se passe entre un psychanalyste et l'analysant. C'est-à-dire que disons qu'il y a un morphisme géométrique, puisqu'il y a une relation d'inconscient à inconscient. Mais justement cette relation, elle n'est pas symétrique. C'est-à-dire qu'un morphisme géométrique, il va dans un sens et dans l'autre, et il y a un sens où il est exact. D'accord ? Et alors donc la difficulté, quand on a ce genre de situation, c'est d'arriver à comprendre dans quel sens ça va, et dans quel sens c'est exact. D'accord. Alors là, dans le cas de la musique et dans le cas du site musical, c'est effectivement très très intéressant d'essayer de comprendre dans quel sens va le morphisme géométrique et ce qui se passe dans l'autre sens. Ce qui se passe dans l'autre sens. Alors moi, à mon avis, par exemple, il n'est pas du tout exclu que quand un pianiste donne un récital, euh, ça va dans les deux sens. C'est-à-dire que la salle lui répond, et il ressent en fait plus ou moins confusément, il reçoit, il ressent la réaction des gens qui l'écoutent. C'est-à-dire qu'il y a le morphisme géométrique qui va dans un sens, c'est-à-dire celui qui joue communique avec les inconscients des gens qui sont là. Mais il y a un retour. Il y a un retour. Et ce retour, c'est sûrement extrêmement intéressant d'analyser ça plus en profondeur, de voir dans quel sens ça va, dans quel sens c'est exact, et tout ça, hein. Je veux dire, parce que bon, je veux dire, il est bien clair qu'un pianiste qui arrive devant une salle, d'abord il sent la salle. Il sent la salle est hostile ou pas. Il le sent. Bon, enfin, je n'en sais rien. Je veux dire, je n'ai pas d'expérience dans ce sens-là, mais je présume que c'est le cas. Et après, mais c'est un peu pareil quand on fait un laïus, je veux dire, c'est pareil. C'est-à-dire que mais ce n'est pas de la musique, donc il n'y a pas de communication directe d'inconscient à inconscient. Il n'empêche qu'effectivement il se produit un phénomène similaire. Sûrement. Sûrement. Sûrement. Et que le formidable des topos, c'est que contrairement aux espaces topologiques, aux espaces géométriques, la relation va dans les deux sens. Ça, c'est formidable. C'est quelque chose de formidable, ça. D'accord.

Dernières questions : Riemann, inconscient collectif, topos classifiants et portée philosophique

Élisabeth - c'est bon. Une question : c'était finalement l'hypothèse de Riemann - est-ce que, par un souci - peut espérer quelque chose ? Non, non, non, non, je ne pense pas. Non, disons que là où elle apparaît, c'est simplement pour expliquer que ce n'est pas une partie des mathématiques qui est triviale, dont le site musical parle ; il parle d'une partie des mathématiques qui est extrêmement non triviale. Alors de là à dire que le site musical est capable de dire quelque chose - il est capable de - non, il est capable de donner les zéros de zêta. Donc on peut l'utiliser pour parler. Maintenant est-ce qu'il en sait suffisamment ? Bon, ça on n'en sait rien. Comment - diabolique, musicale ? Ah oui, peut-être, peut-être. Bon, et puis peut-être comme je le disais, peut-être que certains musiciens ont eu une profondeur telle - moi c'est ça qui me frappe. Ce qui me frappe, c'est que je veux dire, on parle de beauté dans la musique et tout ça, je m'en fiche complètement. Ce qui me passionne, ce n'est pas ça. C'est une espèce de profondeur, une espèce de profondeur qui est presque une couleur, qui est quelque chose dont on ne peut pas parler, mais qu'on ressent - qu'on ressent, et qu'on ressent effectivement même en lisant une partition.

Grégory, excusez-moi, quand vous évoquiez les inconscients, vous avez l'air de mettre de côté la possibilité d'un inconscient collectif, mais on a quand même l'impression - Ah non, non, pas du tout, pas du tout, surtout pas, surtout pas. On a l'impression qu'il fait retour et qu'il ressurgit en zone de transfert dans - Absolument. Absolument. Mais on ne met pas du tout - on ne met pas du tout en - parce que ce qui se produit dans la théorie des topos, il y a une autre notion dont on parle en grand détail avec Patrick Gauthier-Lafaye, qui est la notion de topos classifiant. Et les topos classifiants ont quelque chose d'extraordinaire, c'est que d'abord un topos classifiant peut être défini par une petite écriture logique très très simple. Pour en donner un exemple concret de topos classifiant, c'est ce qu'on appelle les intervalles. Alors, un intervalle en mathématiques, c'est on écrit simplement que quel que soit x et y, on a $x \leq y$ ou $y \leq x$, et puis qu'il existe un élément qui est plus petit que tous et un élément qui est plus grand que tous. C'est tout. C'est tout. On écrit ça en trois lignes. D'accord ? C'est ce qu'on appelle un intervalle. Alors le topos classifiant, c'est qu'il existe un topos muni d'un intervalle à l'intérieur de ce topos qui a la propriété universelle. C'est-à-dire que quel que soit l'autre topos et un intervalle dans cet autre topos, il proviendra par morphisme géométrique du topos classifiant. Donc le topos classifiant a la propriété d'être, comment dire, l'incarnation de la notion par elle-même. Il est unique, il est bien défini, il a cette propriété extraordinaire. D'accord ? Et alors, évidemment, qu'est-ce que ça suggère ? Ça suggère que dans - en psychanalyse - chaque fois qu'il y a une notion universelle clé, elle correspond à un topos classifiant. D'accord ? Et qu'en fait là, comment cette notion va se traduire dans un individu ? Elle va se traduire précisément par un morphisme géométrique avec le topos classifiant. Donc si vous voulez, toutes - y compris la notion d'inconscient collectif, etc. - toutes ces notions-là sont parfaitement compatibles avec l'idée de topos comme étant le topos de l'inconscient. Donc tout ça, en fait, ça donne plus un langage, on pourrait presque dire. Je veux dire, il y a une théorie, la théorie est très intéressante, parce que quand on a un topos, on peut faire des - il y a des invariants qu'on peut calculer comme les points ou des choses comme ça. D'accord ? Mais là où elle est assez étonnante, cette théorie, c'est dans son lien avec la logique précisément. Et alors une des choses dont on rêvait avec Patrick Gauthier-Lafaye, mais bon, c'est qu'en fait à un moment donné, justement, Lacan avait une espèce de manie d'écrire des petites formules logiques sur une feuille de papier - euh, sans doute quand il avait des patients, enfin, etc. Et alors la question qu'on se posait, c'était justement : est-ce que les petites formules logiques qu'il écrivait correspondaient à la définition d'un topos classifiant ? Alors lui-même n'en était sûrement pas conscient. Ça, c'est bien évident, puisqu'il n'avait pas le bon formalisme et tout ça. Mais peut-être qu'il en avait l'intuition. Peut-être qu'il en avait l'intuition. Donc c'est ça l'idée. L'idée, c'est que bon, c'est une théorie très élaborée, très intéressante, et qui donne le moyen, quand on a une réflexion générale, une idée générale comme ça, de donner le moyen d'y penser de manière concrète, et de se poser ensuite toutes sortes de questions, comme quand on parlait des morphismes géométriques : dans quel sens ça va ? Que signifie le morphisme retour ? Etc., etc., etc. Donc euh je veux dire, c'est quand même une notion qui a - c'est très rare - qui a une notion mathématique qui a une portée philosophique. C'est extrêmement rare. La plupart des notions mathématiques n'ont pas de portée philosophique, mais la notion de topos, oui. Et c'est pour ça que quand je donnais l'espèce de diagramme de Venn là, je veux dire, j'avais mis justement les topos au milieu, parce que c'est très rare - c'est très rare qu'une idée ou une notion mathématique en arrive à avoir une portée au niveau de la philosophie. Ça, c'est extraordinaire. C'est extraordinaire, parce que même au niveau philosophique, qu'est-ce que ça signifie ? Ça signifie que c'est une erreur de vouloir discuter des notions avec la logique ordinaire. En fait, en général, quand on doit discuter d'un problème, d'une

question, la vraie logique qui s'applique à ce problème, c'est une logique intuitionniste adaptée au topos en question. C'est-à-dire que quand on voit une discussion politique, par exemple, et on dit : et les gens ont raison, ils ont tort - là on raisonne en logique du tiers exclu. En fait, en général, c'est beaucoup plus complexe que ça. C'est-à-dire qu'il y a un topos associé, il y a une discussion qui est derrière, et la notion de vérité est une notion qui n'est pas limitée au vrai ou au faux. Oui - ou que les gens ont des topos différents, enfin - Non, mais d'accord. Mais là, je parle de discussion en général. Donc c'est - c'est là que j'entends la portée philosophique de la notion de topos. Donc c'est clair, c'est complètement clair que bon, c'est rarissime, et c'est sans doute ce qui fait, moi, à mon avis, la force des mathématiques. C'est-à-dire que pour moi, la force des mathématiques, c'est justement d'inventer des concepts nouveaux ayant éventuellement une portée philosophique. On en est très très convaincu ici. Ben oui, c'est ça. Voilà, exactement. Vous aviez encore - oui, il y avait - voilà, j'ai répondu, c'est bien ce que je pensais. On a - on a communiqué d'inconscient - raconte une question, justement, alors - très très bien - que ça a une portée philosophique. Est-ce que, est-ce que pourtant vous - vous considérez que tout ça, ça reste une théorisation mathématique de la musique ? Ah, bonne question. Bonne question. Non, je n'ai surtout pas envie de faire ça. Je n'ai surtout pas envie que la musique soit dépendante de quelque manière que ce soit des mathématiques. Mon but, ce n'est pas ça. Mon but, c'est d'essayer de dire par une idée ce qu'est l'incroyable sophistication et beauté de la musique par rapport à l'inconscient. Et les mathématiques - bon, alors les mathématiques peuvent aider à ça. Voilà. Donc c'est ça l'idée. L'idée, c'est ça. C'est surtout - je ne veux pas toucher à la musique. Enfin j'aimerais bien y toucher, parce que je trouve qu'elle n'est pas vraiment - dans le XXe siècle ou même le XXIe. Je ne sais pas. Bon, je suis compositeur moi-même. Faut être prudent. Oui, je sais, je sais bien, je sais bien. Non, non. Donc mais alors donc de ce point de vue-là, de ce point de vue-là, je n'ai surtout pas envie, justement, de - comment dire - d'essayer de réduire la musique à quoi que ce soit. Non, justement, il faut qu'elle ait toute sa liberté. Oui, mais c'est pour réagir sur ce que dit Martin - c'est vrai que finalement j'entends ce que vous dites un peu comme ce que la musique fait à la mathématique, en fait. C'est ça, le - Non, ce n'est même pas - même pas. Ouais. La difficulté, c'est que si je le prends du côté de la musique, c'est difficile à entendre. Mais si par contre je me dis : en fait, là, c'est ce que la musique fait à la mathématique ou à l'inconscient, là j'entends quelque chose. Non, non, non, mais ce n'est pas ça non plus. Non, non, ce n'est pas ça non plus. Non, non, non. L'idée - l'idée, il faut que je la redise. L'idée, elle est - elle est - non, non, mais c'est sûr. Mais l'idée, elle est très simple. L'idée, elle est très simple. L'idée, c'est qu'il y a une espèce de, comment dire - ce n'est pas un langage - il y a un objet commun, un objet qui est le site musical, qui est là. Bon, alors c'est un objet qui peut être perçu mathématiquement. Il est extrêmement intéressant mathématiquement. OK. C'est un objet qui peut être perçu au niveau philosophique. S'il est perçu au niveau philosophique, il donne un exemple d'un topos de l'inconscient d'une extraordinaire complexité. Et il peut être conçu aussi au niveau de la musique. Et au niveau de la musique, c'est, comment dire, l'instrument idéalisé, idéalisé dans sa perfection. Voilà. Donc c'est ça l'idée. L'idée, elle est limpide, elle est très très simple. Non - mais voyez bien que l'idée d'un instrument idéalisé, ce n'est pas une idée musicale. J'allais dire. Oui, mais justement, mais ça, je m'en fiche complètement. Oui, c'est bien ce que je dis, justement. Oui. Non, non, mais bien sûr. Mais ce n'est pas du tout ça - ce qu'elle permet, cette idée, par l'instrument idéalisé, justement, elle permet de comprendre en quel sens la musique peut communiquer directement avec l'inconscient. C'est ça que ça veut dire. Ce que ça veut dire, c'est que avant, moi je suis incapable d'expliquer comment Diable la musique pourrait communiquer directement à l'inconscient sans passer par le langage ou un truc comme ça. Ben oui, elle peut,

et elle peut en passant par là. Elle peut en passant par là. Elle ne pourrait pas si elle ne passait pas par là. Elle peut en passant par là. Alors évidemment, ça va être imparfait, parce que - on va passer par l'instrument de musique idéal. On va passer par une approximation assez grossière, etc., etc. Il n'empêche que l'on sait au niveau idéal que c'est possible, et que c'est possible. Ça, c'est faramineux de savoir que c'est possible. Encore une fois, les musiciens, ils le savent, ne serait-ce que par l'explication assez simple que je donne, qu'on va détailler, qui est que ça les touche par le son en tant que la trace. Non, non, mais je sais bien, je sais bien. Oui, mais ça, ça ne me satisfait pas du tout, parce que - ah - oui, mais parce que comme mathématicien je - Non, non, non, non. Comme philosophe - non, pas du tout. Mais oui, bien sûr, oublions les mathématiques. Moi, ce qui m'intéresse, c'est le niveau philosophique. Mais oui, bien sûr. Et au niveau philosophique, la question que je me pose, mais d'abord, c'est qu'est-ce que c'est que l'inconscient - et comment est-ce que la musique peut communiquer avec l'inconscient ? Et ben, j'ai un schéma pour ça, et ça, c'est - oublions les maths. Il faut le corps quand même pour ça. Bien sûr, mais bien sûr, mais bien sûr qu'il faut le corps. Mais je veux dire, ce n'est pas parce qu'il faut le corps que l'explication et la possibilité qui en est donnée - je veux dire, la réponse, elle est dans le corps à corps que la musique permet, la trace. C'est quand même assez simple. C'est-à-dire que - euh - là on n'a plus le langage. Je veux dire, donc il y a d'une façon un contact corps à corps, musique, ou - non, non, non, mais ça, ce n'est pas - non, non, mais ce contact corps à corps, non, mais ce contact corps à corps est complètement ridicule par rapport au niveau philosophique qui explique que à ce niveau-là il y a deux topos qui sont en train de communiquer entre eux. Je veux dire, c'est ça - ça il n'y a aucun rapport. Bien sûr, bien sûr. Si on ne comprend pas ce que c'est qu'un topos, évidemment, on ne peut pas comprendre, ça c'est certain. Mais je veux dire, euh, certainement que ce qui se passe au niveau du topos de l'inconscient et au niveau du site des fréquences n'est pas un corps à corps. Ce n'est pas réductible à un corps à corps. Bah oui. Donc une autre - Non, mais non, mais au niveau philosophique, c'est beaucoup plus profond que ça. C'est-à-dire qu'au niveau philosophique, quand on parle de corps à corps, bon ben on n'a rien dit. Quand on parle du topos de l'inconscient et quand on parle du site musical qui peuvent communiquer à ce niveau-là, disons par un morphisme géométrique, là on est à un sacré niveau d'abstraction qui est beaucoup plus profond et intéressant que le corps à corps. Le corps à corps n'explique rien. Bah si vous prenez Spinoza, ce n'est pas tout à fait vrai. Mais enfin bon, on ne va pas - je veux dire, la question du corps, ce n'est pas une question élémentaire là. Non, mais d'accord, mais on n'a rien dit. On ne sait pas ce dont le corps est capable. Les affects, etc., etc., comment - non, je rejoins François, pas du corps, des questions de corps à corps. Oui, mais Spinoza fait semblant d'être mathématicien. Spinoza - l'interprétation de François, elle est en écho avec cette - elle n'est pas mathématicienne pour le - Voilà. Exactement. Oui, mais alors pour moi, pour moi, du fait que justement ça n'est pas formulable mathématiquement, c'est un peu de la fumisterie philosophique. Je suis désolé de le dire. On l'a compris. D'accord. Ben oui. Oui, oui, oui. Peut-être que la difficulté vient du fait aussi qu'on est inscrit dans un temps que nous, on vit comme le temps linéaire, là où le temps en fait - Bien sûr. Mais bien sûr, ça, c'est tout à fait vrai. Si tu veux, le point de départ de toute cette histoire, justement, c'était ce - le fait que la conception qu'on a, la conception physique du temps linéaire, est une conception qui est - bah - d'ailleurs Spinoza en parle aussi, et je dois faire une discussion philosophique avec un spécialiste de Spinoza, parce que les gens ont trouvé que mes idées sur le temps provenant du non commutatif étaient comparables aux idées de Spinoza. Donc je sais de quoi je parle. D'accord. Bon, donc mais euh donc ce n'est pas - bien sûr - l'idée que nous avons de la linéarité du temps de la physique est une idée un peu incroyablement simpliste quand on la compare au topos que par exemple ne

serait-ce que - ça, mais ça - donc en fait le véritable temps, c'est notre topos de l'inconscient, et à l'intérieur de ce topos l'enroulement du temps de la physique est représenté, d'accord, et il fait une petite partie de cette chose-là, il donne une vague idée de la complexité de ce topos. Mais euh je redis - je redis - que si on n'avait pas l'exemple du site musical, on n'aurait pas d'autres exemples d'un topos très riche dans lequel on a un enroulement. Cet enroulement est donné par n'importe quelle pièce musicale, d'accord, et dont la richesse est justement suffisante pour arriver à se faire une idée de la complexité que l'on a, nous, dans notre inconscient, de la complexité du topos de l'inconscient. D'accord ? Alors après, bon ben, bien sûr, je veux dire, ça va être relié à toutes sortes de choses. Ça va être relié à - mais il y a la différence qu'il y a entre la philosophie et les concepts mathématiques. Elle est fondamentale. Pourquoi ? Parce que le concept mathématique, il est défini de manière incroyablement précise, structurée. Alors que le concept philosophique, lui, il va être en grande partie dépendant de circonstances, de - comment dire - presque - je veux dire - est-ce qu'une idée est acceptée ou pas, etc. Je veux dire, et ça, en mathématiques, ce n'est pas le cas. Quand la théorie des topos - je veux dire, c'est une théorie qui est basée sur des bases absolument parfaites, solides, etc. Il y a un tas de théorèmes qui sont là, qui sont déduits. Quand on lit Spinoza, il y a des CQFD partout, mais de vraies, de véritables démonstrations, je n'en ai pas trouvé. C'est des démonstrations philosophiques. Oui. Oui. Justement. Mais oui, mais il y a une énorme différence. Bah oui, bien sûr, mais là on est payé aussi pour le savoir, ici, hein. Oui, on est - Et encore, le cas de démonstration - dans certaines traductions, il n'est pas - Oui, tu veux dire il n'y a pas de CQFD dans certaines traductions. Si - dans beaucoup de traductions, mais il y a d'autres - prenez par exemple la - B - pas le terme CQFD pour un - Oui, c'est envisageable, et puis ce n'est pas son affaire. Oui, oui, oui, c'est pas le - oui.

Musique, mathématiques et physique quantique

François, tu - oui, oui, oui. Moi je m'intéresse beaucoup à la relation entre musique et mathématiques, comparée à physique et mathématiques. Ah oui, alors ben ça, c'est très différent, bien sûr. Je pense que c'est - je pense qu'il y a aussi - c'est la même chose. Comprendre ce que c'est qu'un électron, la physique quantique, moi je la comprends à un certain niveau, mais en arrivant exactement à ce que vous écrivez pour la musique. Ah mais on est d'accord, on - non, mais c'est - dans le livre, avec le deuxième livre avec Patrick Gauthier-Lafaye, on traite le "où nous sommes", et donc la physique quantique. Et alors un exemple typique - je ne parle pas de l'électron, mais je vais parler des bosons. Alors un exemple qui est incroyablement frappant, c'est que dans la définition d'un ensemble par Cantor, Cantor dit qu'un ensemble est formé d'éléments que l'on peut distinguer les uns des autres. D'accord ? Or, par définition, les bosons, on ne peut pas les distinguer entre eux, parce qu'ils sont - on ne peut pas les distinguer entre eux. Il y a le groupe symétrique qui agit. Donc ça veut dire que l'ensemble des bosons n'est pas un ensemble. Alors ça, c'est délirant, je veux dire, c'est incroyable. C'est-à-dire qu'on s'aperçoit que les premières questions effectivement qui proviennent de la physique, la physique des particules, effectivement elles obligent - elles obligent au quantique, elles obligent justement - enfin le formalisme, moi, que j'avais développé, c'est la géométrie non commutative - mais ce qui est incroyable, c'est qu'il y a une relation absolument non triviale entre géométrie non commutative et les topos. C'est-à-dire que les objets géométriques que l'on étudie sont en fait les mêmes, et le site musical est un prototype, puisque moi j'avais découvert l'espace en question comme objet non commutatif dans les années 96, et on a trouvé avec Katia Consani que c'était un topos en 2014. Et on a été estomaqués de voir que cet objet

qui au départ était un objet de géométrie non commutative pouvait être compris comme un topos. Donc ça veut dire qu'il y a des relations qui sont extrêmement surprenantes entre les deux. Et donc effectivement ça, c'est le monde de la physique. Je suis d'accord. - les autres - que vous avez tapé sur les cellules - effectivement notre cerveau - de cellules - enfin constitué de cellules. Oui, mais pour comprendre - enfin moi pour comprendre ce que c'est que l'ADN et l'ARN, etc., j'arrive au même genre de structure évidemment. Donc là, c'est les chaînes moléculaires. Oui. Mais on revient sur les mêmes constructions, les mêmes schémas. Oui. Oui. Oui. Oui. Non, mais ça, c'est - j'y crois volontiers. J'y crois très volontiers. Oui, bien sûr, bien sûr. En fait, la conclusion de notre livre, c'est justement que bon ben, on a discuté le "qui nous sommes" et le "où nous sommes", et que de manière incroyablement surprenante, les deux formalismes sont reliés entre eux. Ça, voilà. Bon. Et je vais juste un - un jeu en allant un peu plus - prendre la cosmologie, ou la physique stellaire, ou les raies d'absorption, etc., et l'univers dans ce - on arrive au même - là - euh - est-ce que je peux poser une question ? Oui, je cherche - allez-y. Oui, je - pas bien.

Oui. Euh, Alain a parlé donc des spectres d'absorption et d'émission. Hm. Euh, j'aurais bien voulu que vous développiez un petit peu ce dynamisme. Est-ce que ce dynamisme a sa fonction dans la transmission silencieuse, c'est-à-dire infra-verbale, euh, que ce soit pour la musique ou que ce soit dans un autre domaine, dans le domaine de la psychanalyse, c'est-à-dire est-ce que ça correspond à une dynamique qui permet précisément la - comment dire - la transmission silencieuse ou vibratoire ? Oui. Alors ça, c'est une question qui demande une très très longue explication, que l'on a - Patrick Gauthier-Lafaye - dans notre deuxième livre, et qui - parce qu'on commence par décrire cette découverte miraculeuse de Dirac et ce qu'on appelle la théorie des trous de Dirac. Alors il faut que je raconte un petit peu l'histoire, parce qu'elle est vraiment extraordinaire, pour montrer ce que l'homme est capable de faire. Donc Dirac, en 1928, avait écrit une équation qu'on appelle l'équation de Dirac, qui était une équation qui était merveilleuse mathématiquement, parce qu'elle était à la fois quantique et relativiste. Donc c'était la première fois qu'on pouvait écrire quelque chose qui obéissait au quantique mais qui était compatible avec la théorie de la relativité restreinte d'Einstein. Et donc Dirac était très content de son équation, sauf que quand il a regardé un petit peu de plus près, il s'apercevait que la moitié des solutions de son équation étaient malades. Alors en quoi elles étaient malades ? Elles étaient malades parce qu'elles étaient d'énergie négative. Alors, il faut savoir qu'en physique les énergies négatives, ce n'est pas bon. Pourquoi ? Parce que quand il y a des énergies de plus en plus négatives comme dans l'équation de Dirac, eh bien ça veut dire que tout va s'engouffrer là-dedans. Vous savez, quand vous regardez les équations de la physique, en général, vous tendez vers l'énergie minimum. Par exemple, si vous mettez une boule dans un récipient un peu à moitié sphérique, ben la boule, elle va osciller, elle va osciller, osciller, osciller, puis finalement elle va se situer au point où l'énergie potentielle est minimum. Donc en général, en physique, tout va vers l'énergie minimum. Mais s'il y a des énergies négatives qui sont disponibles, tout va s'engouffrer là-dedans. Et donc ça voudrait dire que l'univers depuis longtemps n'existerait plus, parce que tout se serait engouffré dans les états d'énergie négative. Alors Dirac avait de quoi être dormement embêté par ça, parce que dans toutes les autres équations de la physique, il y avait ce qu'on appelle une énergie minimum, et ce n'était pas le cas pour son équation. Pourtant, son équation était magnifique, et quand on regardait seulement la partie d'énergie positive, on obtenait les électrons avec toutes les bonnes propriétés des électrons. Alors, pendant deux ans, Dirac était très très embêté. Alors, il aurait pu évidemment dire que ces états d'énergie négative étaient interdits et tout ça, mais bon, ça, c'est du bidouillage. C'est un peu comme la gamme de tout à l'heure,

et ça ne marche pas. Et puis au bout de deux ans, il a eu une idée. Il a eu une idée, et son idée c'était qu'en fait le vide n'est pas vide. Alors évidemment, quand il a commencé à expliquer son idée à ses collègues, ils ont dû lui dire : "Mon vieux, tu devrais prendre des vacances." Donc son idée c'était que le vide n'était pas vide, mais que dans le vide, il y avait tous les états merdiques qui l'embêtaient. C'est la poubelle. D'accord. C'est-à-dire qu'en fait le vide était plein de tous les états d'énergie négative qui lui posaient problème. Alors évidemment, quand on le formalise comme ça, quand on le formule comme ça, on se dit : bon ben, il était quand même un peu dérangé, d'accord. Mais il n'empêche qu'il avait une justification pour ça, qui est ce qu'on appelle le principe d'exclusion de Pauli. Parce que le principe d'exclusion de Pauli dit que pour les électrons - enfin pour ce qu'on appelle les fermions - on ne peut pas avoir le même état occupé deux fois. Donc l'image en question, c'est que ce n'est pas la poubelle, c'est les toilettes. C'est les toilettes qui sont occupées pour tous les états d'énergie négative. Donc partout il y a marqué "occupé, occupé, occupé". D'accord ? Et comme Pauli dit qu'on ne peut pas occuper deux fois un état d'énergie négative, ça veut dire que le problème est résolu, parce que tous les états d'énergie négative sont occupés. Bon, très bien. Sauf que - il s'est dit : d'accord, bon ben ça a l'air de marcher. C'est un peu, comme on dit, *crazy*. Et donc c'est une *crazy idea*. *Crazy idea*. Bon, de temps en temps, il faut avoir des *crazy ideas*. Donc tous les états d'énergie négative sont occupés. Mais il s'est dit : mais s'il y a quelqu'un qui sort des toilettes, dans les énergies négatives, qu'est-ce qui va se passer ? Bah s'il y en a un qui sort des toilettes, comme il était d'énergie négative, il va devenir d'énergie positive. Bon, et il va devenir d'énergie positive, mais avec la charge opposée à la charge de l'électron. Alors Dirac s'est dit : mais il y a effectivement quelqu'un qui s'appelle le proton, et qui a la charge opposée à l'électron. Donc ça veut dire que s'il y a quelqu'un qui sort des toilettes, c'est un proton. Alors il y a - il y a - c'est de la haute théorie, là. Oui, oui, oui, vraiment. Alors il y a Hermann - il y a Hermann Weyl, qui lui a dit : "Mais ça ne marche pas, votre histoire, parce que le proton il pèse 1500 fois plus que l'électron, donc ça ne marche pas. Et on ne sort pas des toilettes allégé, en général." Ouais, en général on sort plutôt allégé. Bon, alors en fait - ah bah oui, oui. Et alors du coup Dirac il a réfléchi. Il a dit : oui, ça ne marche pas. Le proton ne marche pas. Ça veut dire que c'est une nouvelle particule. Il a osé dire : c'est une nouvelle particule, qu'il a appelée le positron. Mais là, bon, les collègues, ils gardaient leur distance. On était en 1930. D'accord. On était en 1930, et Dirac avait conclu de son idée qu'il devait donc y avoir une nouvelle particule appelée le positron, qui avait la même masse que l'électron mais la charge opposée. Et en 1932, un expérimentateur du nom de Anderson, qui a observé les rayons cosmiques, a eu l'idée géniale de mesurer la charge des rayons cosmiques en les faisant traverser du plomb et en regardant dans quel sens la trajectoire était déviée par un champ magnétique. Et à la grande surprise d'Anderson, il s'est aperçu que parmi les rayons cosmiques, il n'y avait pas que des électrons, mais il y avait aussi des rayons cosmiques qui étaient déviés en sens opposé, et c'étaient des positrons. Et donc Anderson avait découvert le positron, qui avait été imaginé par Dirac. D'accord. Et alors là, la science a fait un pas fantastique. Et dans les collisions qui ont lieu au CERN maintenant, c'est des positrons qui rencontrent des électrons. Donc c'est ce qu'on appelle les antiparticules. Et c'est pour vous dire à quel point, justement, d'accord, une idée qui était une idée complètement folle au départ, qui paraissait une idée absurde, et qui aurait sans doute mis Dirac dans une situation très difficile - et ben en fait, c'était la vérité. Il avait découvert la vérité. Il avait découvert que le vide n'est pas vide. D'accord. Mais qu'il est rempli des choses qui créent un problème dans son équation. En quoi ça explique la transmission silencieuse ? Alors en quoi ça explique la transmission silencieuse ? Et ben, c'est qu'à partir de cette idée, ce qui sort, c'est qu'en fait un positron, c'est un trou, c'est une absence, d'accord ? C'est un trou, c'est une absence.

Et en rebondissant sur cette idée du trou et de l'absence, hein, c'est là exactement qu'on est arrivé - je veux dire, à travers notre discussion avec Patrick bien sûr, puis à travers, si vous voulez, des exemples bien connus comme le livre de Marguerite Duras - euh, on est arrivé justement à cerner cette importance fondamentale de l'absence. Alors je ne sais pas si l'objet petit a dont on parlait, le petit a correspond à l'absence. Ça, j'en sais rien. Non, peut-être pas. Ah, petit autre. Oui, d'accord. Mais toujours est-il que - je veux dire - ce rôle de l'absence, et ce rôle de l'absence bien sûr dans le topos de l'inconscient - l'absence, c'est précisément la présence de trous qui sont détectés par ce qu'on appelle la monodromie, c'est-à-dire par le fait que, en se baladant de manière parfaitement cohérente et en revenant au point de départ, on arrive à une distinction, à une différence qui est mesurée, et qui est la monodromie, et qui signale la présence d'un trou justement, qui est à l'origine de cette monodromie. Donc c'est toute une discussion qui est passionnante bien sûr, et qui est fondamentale. - On a un électron qui a - un positron - et la flèche va dans le - Absolument. Alors en fait ça, c'est une - bien sûr, ça, c'est une - bien sûr, ça remet en question - c'est une autre manière - bien sûr, bien sûr, bien sûr, mais ça, ça, c'est - on le discute aussi, et effectivement la meilleure image, c'est l'image qui est donnée dans un article de Feynman, c'est l'image d'un avion qui vole au-dessus d'un fleuve. Et alors pendant un temps l'avion ne voit qu'un fleuve, que le cours d'un fleuve, bon, et au bout d'un moment, il voit trois fleuves, avec deux fleuves qui sont nés brutalement, et au bout d'un moment, les deux fleuves qui sont à gauche s'annulent. Et alors ce qu'explique Feynman, c'est qu'en ayant vu ça, il a vu l'annihilation et la création d'une paire de particules, avec les électrons et les positrons, qui font précisément que, si vous voulez, en fait on peut - et il y a une idée encore plus folle, qui est une idée de Wheeler, et qui est une idée extraordinaire, due à John Wheeler, et dans laquelle John Wheeler a dit : en fait, il n'y a qu'un seul électron.

Conclusion et remerciements

François Nicolas : Je crois qu'il y a une dernière question, peut-être. C'est ça. Non. Oui. Oui. Non. Non. Non. Euh bon, on a - je vous propose qu'on s'en tienne là. On a tenu les trois heures.

Alain Connes : On a tenu trois heures.

François Nicolas : Oui. Oui. Une heure et demie d'exposé, une heure et demie de discussion. J'espère que ça n'a pas été...

Alain Connes : D'accord. Alors, je vais vous dire ce que vous ne savez pas. Il y a beaucoup de choses qu'on ne sait pas, mais parce que moi..., mais parce que vous n'avez pas écouté Françoise Dolto. Françoise Dolto, je vous conseille absolument de regarder la séance où Françoise Dolto passait chez Pivot. Oui, c'est disponible sur l'INA, hein. Donc vous pourrez le regarder. Et euh elle, il y a quelque chose d'extraordinaire dans cette discussion entre Pivot et Françoise Dolto, qui est qu'elle transmet plus que ce qu'elle dit.

François Nicolas : C'est classique, ça, quand même.

Alain Connes : D'accord. Oui, mais là c'est fantastique, c'est particulièrement fort. C'est-à-dire que c'est une personne qui était capable, par sa présence même, de transmettre - ce n'est pas la musique, pourtant, hein - mais elle était capable de parler d'inconscient à inconscient. C'est-à-dire

qu'elle était capable, par sa propre présence, d'accord, de transmettre quelque chose qui allait au-delà de la parole. Oui. Puis c'est son habitude de travailler avec les enfants. C'est son habitude de travailler avec les enfants, bien sûr. Et oui, mais elle avait cette force incroyable, et c'est une force de vie. C'est une force qui, pour moi justement, est caractéristique, presque, des très grands musiciens. C'est une force de vie. Une force de vie qui est unique. Voilà. Merci.