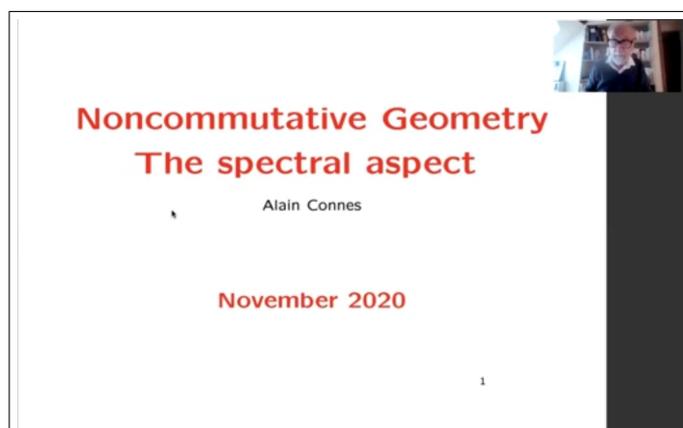


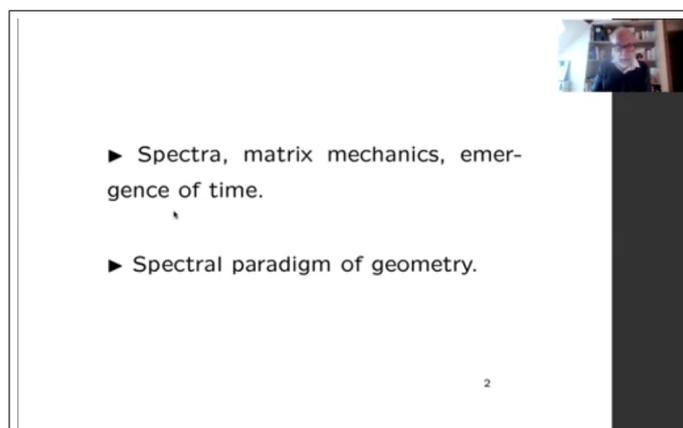
Géométrie non-commutative, l'aspect spectral

Alain CONNES

23.11.2020



OK, alors laissez-moi commencer par dire que je suis vraiment reconnaissant de cette opportunité de parler de la géométrie non-commutative. Et je me concentrerai sur l'aspect spectral du sujet. Donc d'une manière ou d'une autre, je vais commencer par expliquant l'origine.



L'origine, ce sont des spectres, comment ceux qui ont conduit Heisenberg à la mécanique matricielle et à l'émergence du temps, comme je l'expliquerai, qui sont liées aux idées de von Neumann. Maintenant, le point suivant sera le paradigme spectral, le nouveau paradigme qui vient du traitement des espaces non-commutatifs, qui est spectral. Et cela sera analysé et expliqué à deux niveaux. D'abord au niveau microscopique, cela donnera la structure fine de l'espace-temps au niveau euclidien. Et au niveau astronomique, cela révélera la musique des formes. Et je finirai par exposer une forme mystérieuse qui est liée à un travail récent avec Katia Consani.

Conférence donnée à distance dans le cadre du cycle de conférences de l'Université de Harvard "Lecture series Mathematical Science Literature",

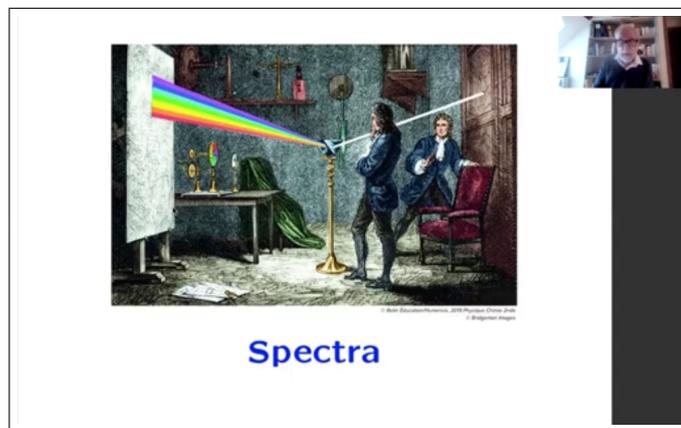
Vidéo visionnable ici <https://youtu.be/AwVRss0F6zI>.

Transcription Denise Vella-Chemla, décembre 2020.

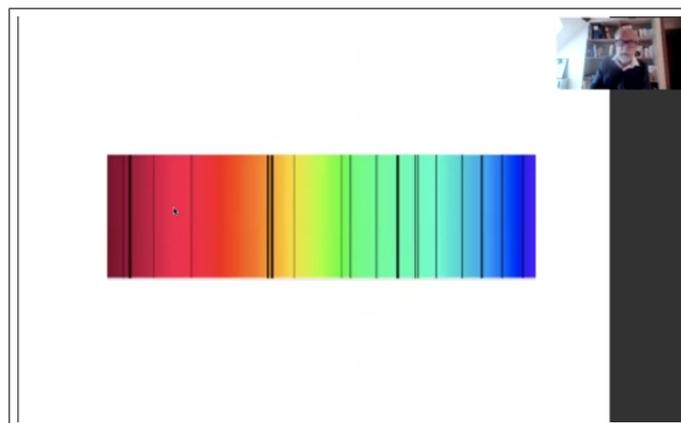
- ▶ Microscopic level, fine structure.
- ▶ Astronomic level, the music of shapes
- ▶ A mysterious shape.

3

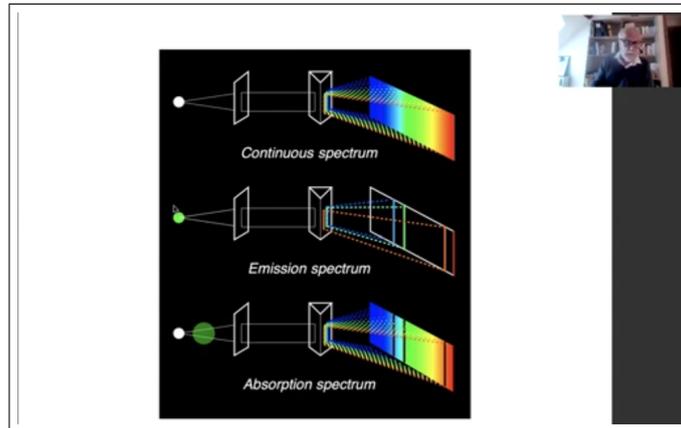
Alors laissez-moi commencer par le bon vieux temps. Cette image représente ce qui s'est passé par exemple lorsque Newton a décomposé un rayon de lumière provenant du soleil en le laissant passer à travers un prisme.



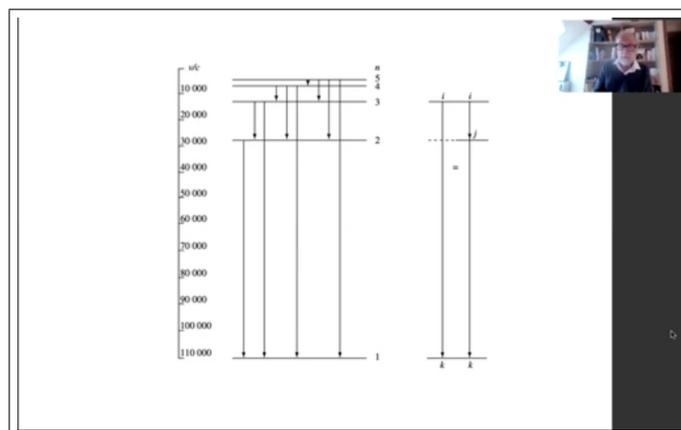
Et on obtient l'arc en ciel. Ce qui est vraiment intéressant à propos de cet arc-en-ciel, c'est que quand on regarde cela très attentivement, on découvre qu'il manque des lignes,



il y a des lignes sombres. Au début, un tel spectre a été découvert pour le sodium. La vraie découverte a été faite par Fraunhofer au début du 19^{ème} siècle. Il a trouvé environ cinq cents de ces lignes sombres qui sont maintenant comprises comme des lignes d'absorption, dans le sens où ce qui se passe, c'est que lorsque la lumière traverse un corps chimique comme dans le voisinage du soleil, la présence de ces corps chimiques a une conséquence qui est que le type de signature des corps chimiques apparaît en négatif, à travers ces lignes sombres. D'une manière ou d'une autre, quelques années plus tard



vers 1860, ce que Bunsen et Kirchhoff ont découvert, c'est qu'en fait on pouvait obtenir les mêmes lignes mais alors sous forme de lignes lumineuses sur fond sombre, c'est si vous voulez le négatif du spectre précédent et après cela, ils ont pu identifier un grand nombre des lignes qui avaient été identifiées en tant que raies d'absorption de Fraunhofer, ils ont pu identifier la plupart d'entre elles comme provenant de corps chimiques. Cela signifie donc que chaque corps chimique a une sorte de code-barres qui est sa propre signature. Et ce qu'ils ont trouvé également, c'est qu'il y avait quelques-unes de ces lignes qui ne concernaient en fait aucun corps chimique qui était connu sur Terre, ils ont donc inventé un nouveau corps chimique qu'ils ont appelé Hélium, en l'honneur du Soleil, bien sûr, et ce qui est étonnant, c'est qu'au début du XX^{ème} siècle, il y a eu une éruption du Vésuve et les gens ont fait une analyse spectrale de la lave sortant du volcan et étonnamment, ils ont constaté que le spectre d'émission correspondant était exactement constitué des lignes manquantes trouvées auparavant et cela correspondait à l'Hélium. Et, bien sûr vous le savez, maintenant, l'Hélium est utilisé sur Terre. Ceci est clairement une caractéristique du fait que les corps chimiques ont leur propre code-barres.



Maintenant, ces codes-barres ont été étudiés par des physiciens et ce qui se passe, c'est qu'ils ont une propriété tout à fait remarquable de compatibilité qui est que certaines de ces lignes, lorsque vous les exprimez en termes de fréquences, vous devez faire très attention de les exprimer en termes de fréquence et pas en termes de longueurs d'onde, certaines d'entre elles s'additionnent. Et pour comprendre comment elles s'additionnent, c'est Ritz-Rydberg qui a trouvé ce qu'on appelle le principe de Ritz-Rydberg, et l'idée est que ces lignes sont indexées non pas par un indice mais par deux indices, ce pourrait être des lettres grecques, comme vous le souhaitez, et le fait est que le principe de Ritz-Rydberg vous dit que la ligne d'indices $\alpha\beta$ se combinera avec la ligne d'indices

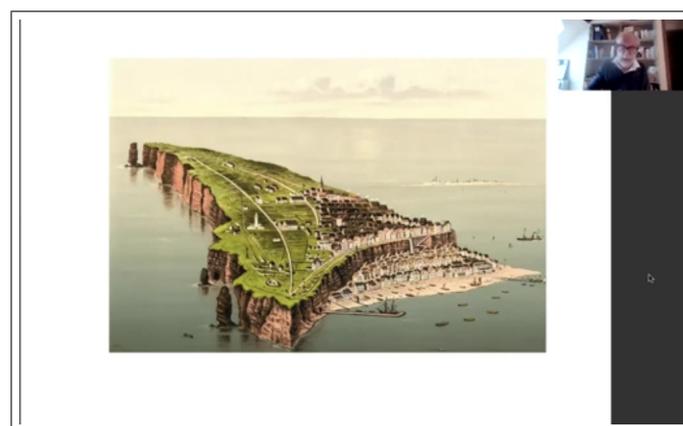
$\beta\gamma$, donc je veux dire que le deuxième indice de la première ligne doit être le premier indice de la deuxième ligne, puis en se combinant, elles vous donnent la ligne correspondant à $\alpha\gamma$. Maintenant ça, ce principe de combinaison Ritz-Rydberg a eu une conséquence étonnante entre les mains de Heisenberg

Heisenberg
Ritz-Rydberg \Rightarrow
Matrix Mechanics !

$$(AB)_{ik} = \sum A_{ij} B_{jk}$$

$$\sigma_t(A) = \exp(itH) A \exp(-itH)$$

et ce qu'Heisenberg a découvert, c'est que grâce à ce principe, il faisait des calculs quand il était seul



à Helgoland où il avait été envoyé parce qu'il était allergique, il avait été envoyé par son université, car il n'y avait pas de remède à ce moment-là, sauf d'envoyer des gens dans un endroit où il n'y avait aucune source de pollen. Donc il était là et il avait tout le temps qu'il voulait pour travailler et à un moment donné, pendant une nuit, je pense qu'il était près de quatre heures du matin, il avait prouvé que l'énergie est conservée¹,

Heisenberg
Ritz-Rydberg \Rightarrow
Matrix Mechanics !

$$(AB)_{ik} = \sum A_{ij} B_{jk}$$

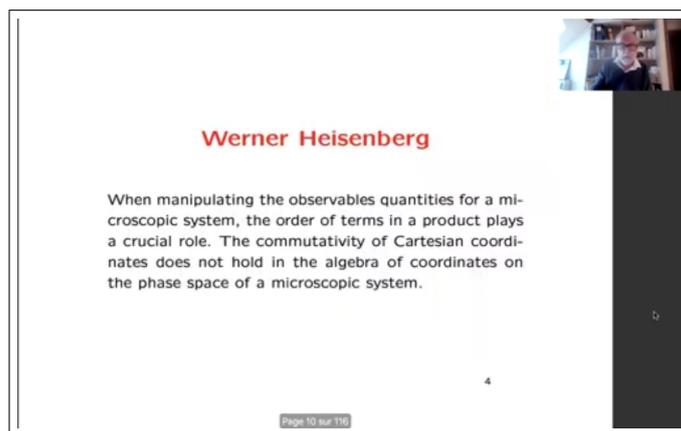
$$\sigma_t(A) = \exp(itH) A \exp(-itH)$$

¹entourant la dernière ligne de la page projetée.

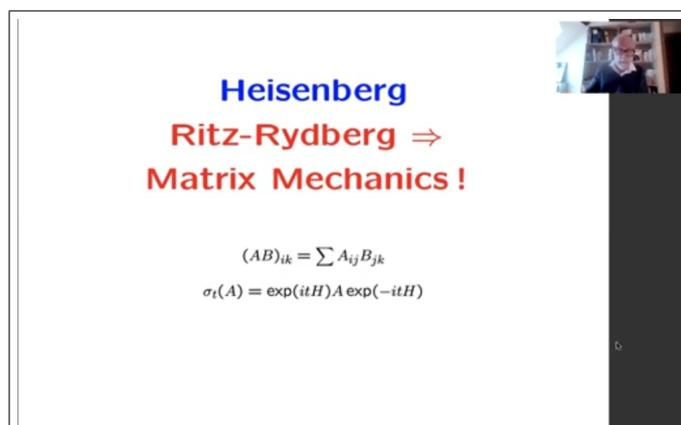
car si vous intervertissez H et A , alors, il y a une commutation entre ces deux termes et vous obtenez que H est préservé par l'évolution temporelle.



Puis, au lieu d'aller se coucher, il a escaladé l'un des sommets qui longeait la côte et il a attendu le lever du soleil au sommet de ce pic. Et il explique qu'il voyait, bien sûr dans son esprit, par sa découverte, un paysage incroyable. Ce qu'il avait découvert avait une conséquence particulière, et cette conséquence était que, parce que les matrices ne commutent pas,



lorsque vous travaillez avec des quantités observables pour un système microscopique, vous devez faire attention à l'ordre des termes d'un produit. En fait, l'ordre des termes d'un produit joue un rôle crucial. Et en fait, si vous revenez à l'équation d'évolution de Heisenberg,



vous trouvez bien sûr que si tout pouvait commuter, cette évolution devrait être l'identité. En réalité, comme nous le verrons beaucoup plus loin, le monde commutatif est statique, tandis que le monde quantique est dynamique, et ceci est la première propriété.



Werner Heisenberg

When manipulating the observables quantities for a microscopic system, the order of terms in a product plays a crucial role. The commutativity of Cartesian coordinates does not hold in the algebra of coordinates on the phase space of a microscopic system.

4

Page 10 sur 116

Maintenant, en particulier, cela signifie que la commutativité des coordonnées cartésiennes ne tient pas dans l'algèbre des coordonnées sur l'espace des phases. Et c'est un exemple fondamental de l'apparence d'un tel espace non-commutatif.



Language

Anagrams :

(Anagrammes renversantes, d'Etienne Klein et Jacques Perry-Salkow sur le sens caché du monde).

"L'horloge des anges ici-bas"

"Le boson scalaire de Higgs"

We can clearly see that going to the commutative is a loss of meaning :

santa = satan
listen = silent

5

Maintenant, comme corollaire de ceci, vous pourriez penser que c'est très étrange, et que nous ne serions pas habitués à cette importance dans l'ordre des éléments, mais c'est faux. Nous sommes parfaitement habitués à cela par la langue, le langage. Je veux dire, quand nous utilisons des mots, nous devons, bien sûr, faire attention à l'ordre des lettres et à l'ordre des mots, sinon, on obtient des anagrammes. Ce que j'ai montré ici est un anagramme en français qui est assez étonnant mais d'une manière ou d'une autre, on peut clairement voir que quand vous allez au commutatif, vous perdez le sens. Par exemple, j'ai écrit ici Santa et Satan, qui sont identiques dans le monde commutatif (il y a deux *a*, un *s*, un *n*, un *t*). *Listen* (écouter en anglais), c'est la même chose que *Silent* (silence en anglais), et ainsi de suite. Donc en fait, ce que vous trouvez, c'est que cette voie quantique, cette manière d'être obligé de faire attention à l'ordre des lettres, c'est une façon de garder le sens. Et en géométrie algébrique ordinaire, on oublie complètement ces nuances.

Quantum variability

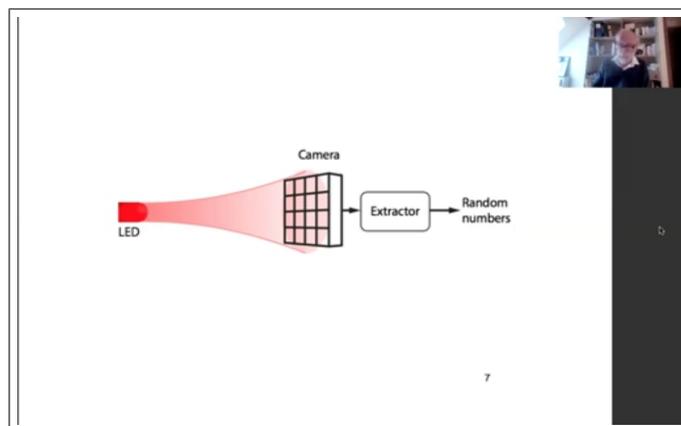
**Quantum random number generation
on a mobile phone**

Bruno Sanguinetti, Anthony Martin, Hugo Zbinden, and
Nicolas Gisin

Group of Applied Physics, University of Geneva, Swit-
zerland

6

Or un corollaire de la non-commutativité, du principe d'incertitude de Heisenberg, c'est la variabilité quantique. Et pour comprendre cette variabilité quantique, il faut donner un exemple.



Plusieurs ingénieurs suisses ont fabriqué un petit appareil que vous pouvez utiliser dans un téléphone portable et qui générera des nombres aléatoires. Mais ces nombres aléatoires sont simplement générés en laissant un photon traverser une petite fente et atterrir quelque part sur une cellule photo, et la cellule sur laquelle il va atterrir est totalement imprévisible, par le principe d'incertitude de Heisenberg. Et donc, ce que cela vous donne, c'est un moyen de générer un nombre aléatoire, et cette façon de générer un nombre aléatoire ne peut pas être attaquée. Pour des raisons de sécurité, c'est un moyen très différent de ce que vous obtiendriez si vous génériez des nombres quantiques à partir d'un ordinateur puisque c'est un moyen incassable. C'est totalement différent non seulement par l'expérience, mais aussi par la théorie : vous savez que les nombres ne sont pas reproductibles. Il y a donc cette variabilité fondamentale,

Real Variables

Classical formulation :

$$f : X \rightarrow \mathbb{R}$$

Discrete and continuous variables cannot coexist in this
classical formalism.

8

qui est liée à la mécanique quantique et quand vous y réfléchirez, vous découvrirez que la mécanique quantique est en fait un formalisme de variabilité bien meilleur que les mathématiques classiques ordinaires. Par exemple, si vous demandez à un mathématicien ce qu'est une variable réelle, vous obtiendrez très souvent comme réponse le fait qu'il ne s'agit que d'une application f d'un ensemble X à la droite réelle. Maintenant, il s'avère que ce formalisme est en fait assez pauvre car on ne peut pas avoir la coexistence de variables discrètes et continues, dans ce formalisme classique. La raison de cela est très simple. La raison est que si vous avez une variable, dans l'ensemble X en question, alors cet ensemble X doit être non dénombrable. Or toute variable discrète prendra en fait une certaine valeur un nombre infini de fois, et en fait même plus qu'un nombre infiniment dénombrable de fois. Donc, le discret et le continu ne coexistent pas.

Quantum formalism

Fortunately this problem of treating continuous and discrete variables on the same footing is completely solved using the formalism of quantum mechanics.

The first basic change of paradigm has indeed to do with the classical notion of a "real variable" which one would classically describe as a real valued function on a set X , ie as a map from this set X to real numbers. In fact quantum mechanics provides a very convenient substitute. It is given by a self-adjoint operator in Hilbert space. Note that the choice of Hilbert space is irrelevant here since all separable infinite dimensional Hilbert spaces are isomorphic.

9



Et étonnamment, ils coexistent dans le formalisme quantique. Donc si vous voulez, le continu et le discrets coexistent dans le formalisme quantique car dans ce formalisme, une variable réelle devient un opérateur auto-adjoint

Classical	Quantum
Real variable $f : X \rightarrow \mathbb{R}$	Self-adjoint operator in Hilbert space
Possible values of the variable	Spectrum of the operator
Complex variable z with $ z ^2 \in \mathbb{N}$	Operator a with $[a, a^*] = 1$



dans l'espace de Hilbert. Et dans le même espace de Hilbert, vous pouvez avoir un opérateur auto-adjoint qui est par exemple une multiplication par x dans l'espace de Hilbert qui est L^2 et qui travaille sur $[0,1]$, mais cet espace de Hilbert des fonctions L^2 sur $[0,1]$ est isomorphe à l'espace de Hilbert qui est l'espace de Hilbert des séquences ℓ^2 sur les entiers dans lesquelles vous avez également une autre variable, si vous le souhaitez, qui est la multiplication par n , qui est auto-adjoint, et qui est évidemment discret.

Quantum formalism

Fortunately this problem of treating continuous and discrete variables on the same footing is completely solved using the formalism of quantum mechanics.

The first basic change of paradigm has indeed to do with the classical notion of a "real variable" which one would classically describe as a real valued function on a set X , ie as a map from this set X to real numbers. In fact quantum mechanics provides a very convenient substitute. It is given by a self-adjoint operator in Hilbert space. Note that the choice of Hilbert space is irrelevant here since all separable infinite dimensional Hilbert spaces are isomorphic.

9

Donc si vous voulez, comme il n'y a qu'un seul espace de Hilbert, à savoir l'espace de Hilbert de dimension infinie de base dénombrable, ce que vous découvrirez, c'est qu'il y a coexistence des variables discrètes, avec les variables continues à la seule condition qu'elles ne puissent pas commuter. Il y a cette nuance, et cette nuance jouera un rôle fondamental plus tard, comme nous le verrons.

Classical	Quantum
Real variable $f : X \rightarrow \mathbb{R}$	Self-adjoint operator in Hilbert space
Possible values of the variable	Spectrum of the operator
Complex variable z with $ z ^2 \in \mathbb{N}$	Operator a with $[a, a^*] = 1$

Nous avons donc ce dictionnaire, qui vient du quantique. Et bien sûr, les valeurs d'une variable réelle sont les valeurs propres du spectre de l'opérateur auto-adjoint, mais les physiciens ont été très tôt capables d'appliquer cette notion à des variables complexes. En fait, ils l'ont appliquée à une situation très particulière où vous voudriez avoir une variable complexe z telle que $|z|^2$ est un entier.

Ceci est lié à la découverte de Planck en 1900 et à ce qu'Einstein a écrit en 1906, à savoir que l'énergie d'un oscillateur ne doit prendre que des valeurs qui soient des multiples entiers de $h\nu$. L'oscillateur a d'abord été compris dans un article de Born, Heisenberg et Jordan, je pense en 1925, puis Dirac a pu utiliser le même ansatz dans lequel vous remplacez la variable z , qui était censée être une variable complexe, vous la remplacez par un opérateur a , et la seule condition pour cet opérateur a est que son commutateur avec son adjoint a^* soit égal à 1. Cela suffit pour s'assurer que le spectre sera formé d'entiers positifs, c'est un peu d'exercice. Et entre les mains de Dirac, cela lui a permis de prouver ce qu'Einstein avait deviné quand il avait deviné les constantes A et B d'émission et d'absorption d'un atome. C'est donc un formalisme très puissant et très étonnant, qui remplace le formalisme classique.



Time and Variability

At the philosophical level there is something quite satisfactory in the variability of the quantum mechanical observables. Usually when pressed to explain what is the cause of the variability in the external world, the answer that comes naturally to the mind is just : the passing of time.

11

Et il y a quelque chose en fait qui est assez frappant, si l'on veut, au niveau de la variabilité, c'est-à-dire que normalement, lorsque les gens nous demandent d'expliquer ce qui est, vraiment, l'essence de la variabilité, quelle est la cause de la variabilité dans le monde extérieur, la réponse habituelle qui vient, je me rappelle avoir un jour donné cette réponse quand j'étais au lycée, la réponse naturelle qui vient à l'esprit est juste le temps qui passe. C'est la seule sorte de réponse raisonnable que nous puissions donner. Mais maintenant, à cause de cette variabilité intrinsèque et en quelque sorte fondamentale qui existe dans le quantique, vient une question très naturelle et



But precisely the quantum world provides a more subtle answer since the reduction of the wave packet which happens in any quantum measurement is nothing else but the replacement of a "q-number" by an actual number which is chosen among the elements in its spectrum. Thus there is an intrinsic variability in the quantum world which is so far not reducible to anything classical. The results of observations are intrinsically variable quantities, and this to the point that their values cannot be reproduced from one experiment to the next, but which, when taken altogether, form a q-number.

12

cette question est... vous savez, bien sûr, nous n'avons pas pu dans le formalisme de la mécanique quantique réduire cette variabilité à cause de la réduction du paquet d'ondes qui est quelque chose qui est en dehors de l'évolution du temps, donc si vous voulez, cette variabilité intrinsèque dans le monde quantique en quelque sorte pose une question très naturelle et cette question naturelle est



How can time emerge from quantum variability ?

As we shall see the study of subsystems as initiated by Murray and von Neumann leads to a potential answer.

13

cette variabilité intrinsèque serait-elle plus primitive que le passage du temps ? À savoir, comment le temps pourrait-il émerger de la variabilité quantique ? Et ce que je veux expliquer brièvement, c'est que l'étude des sous-systèmes, qui a été initiée par Murray et von Neumann dans les années 1930-1940, conduit en fait à une réponse potentielle à cette question. Qu'ont-ils fait ? C'est juste une image que je montre là,



juste pour ne pas oublier que von Neumann est également très connu pour avoir inventé les ordinateurs.

Mais qu'ont-ils fait ?

Factorizations

Let the Hilbert space \mathcal{H} factor as a tensor product :

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$$

Von Neumann investigated the meaning of such a factorization at the level of operators.

A factor is an algebra of operators which has all the obvious properties of the algebra of operators of the form $T_1 \otimes 1$ acting in $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$.

15

Ils ont étudié, ils ont commencé par étudier les factorisations spatiales. Et à cet égard, ils étaient motivés par la mécanique quantique. Alors ils voulaient comprendre pourquoi si vous aviez un espace de Hilbert \mathcal{H} qui est un produit tensoriel, qui se divise en produit tensoriel, alors vous pouvez considérer dans cet espace de Hilbert les opérateurs qui sont de la forme $T_1 \otimes 1$ où T_1 agit dans \mathcal{H}_1 et 1 est l'identité dans \mathcal{H}_2 . D'une manière ou d'une autre, vous voulez comprendre algébriquement quelles sont les algèbres qui apparaissent de cette façon. Leur travail était donc motivé par la mécanique quantique,



4. Another interpretation of (\bar{D}_A) is suggested by quantum mechanics. The operators of \mathfrak{Q} correspond there to all observable quantities which occur in a mechanical system \mathfrak{E} . (Cf. (6), pp. 55-60, and (20), p. 167. We restrict ourselves to bounded operators, which correspond to those observables which have a bounded range. Thus \mathfrak{B} corresponds to the totality of these observables.) Now if \mathfrak{E} can be decomposed into two parts $\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2$ and if we denote the set of the operators which correspond to observables situated entirely in \mathfrak{E}_1 or in \mathfrak{E}_2 by \mathfrak{M}_1 resp. \mathfrak{M}_2 , then we see:

- (1) $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2$ are rings, and 1 (which corresponds to the "constant" observable 1) belongs to both $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2$.
- (2) If $A \in \mathfrak{M}_1, B \in \mathfrak{M}_2$ then the measurements of the observables of A and B do not interfere (being in different parts of \mathfrak{E}); therefore A, B commute (cf. (6), pp. 11-14 and 76, or (20), pp. 117-121). Thus $\mathfrak{M}_1 \subset \mathfrak{M}_1'$.
- (3) As \mathfrak{E} is the sum of $\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2$, therefore $\mathfrak{R}(\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2) = \mathfrak{B}$.

16

en ajoutant bien sûr que vous voulez considérer des quantités observables qui se produisent dans un sous-système, alors bien sûr vous avez affaire à des anneaux d'opérateurs, à des algèbres d'opérateurs, et vous avez une commutation, entre ce qui se passe dans un système et dans le système complémentaire, etc.

Ils ont donc étudié ces factorisations et le terme facteur vient de là, de la conception des algèbres que vous allez avoir, cette situation imiterait le produit tensoriel.



Factorizations

Let the Hilbert space \mathcal{H} factor as a tensor product :

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$$

Von Neumann investigated the meaning of such a factorization at the level of operators.

A factor is an algebra of operators which has all the obvious properties of the algebra of operators of the form $T_1 \otimes 1$ acting in $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$.

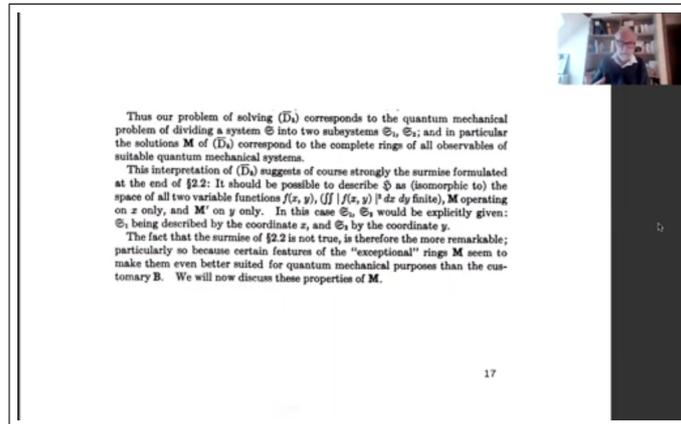
15



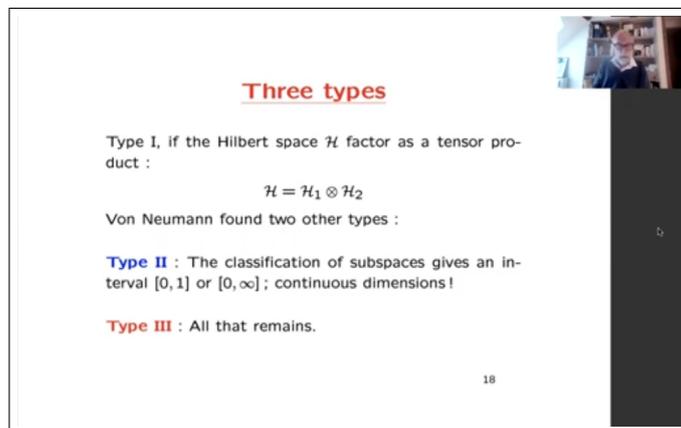
4. Another interpretation of (\bar{D}_A) is suggested by quantum mechanics. The operators of \mathfrak{Q} correspond there to all observable quantities which occur in a mechanical system \mathfrak{E} . (Cf. (6), pp. 55-60, and (20), p. 167. We restrict ourselves to bounded operators, which correspond to those observables which have a bounded range. Thus \mathfrak{B} corresponds to the totality of these observables.) Now if \mathfrak{E} can be decomposed into two parts $\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2$ and if we denote the set of the operators which correspond to observables situated entirely in \mathfrak{E}_1 or in \mathfrak{E}_2 by \mathfrak{M}_1 resp. \mathfrak{M}_2 , then we see:

- (1) $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2$ are rings, and 1 (which corresponds to the "constant" observable 1) belongs to both $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2$.
- (2) If $A \in \mathfrak{M}_1, B \in \mathfrak{M}_2$ then the measurements of the observables of A and B do not interfere (being in different parts of \mathfrak{E}); therefore A, B commute (cf. (6), pp. 11-14 and 76, or (20), pp. 117-121). Thus $\mathfrak{M}_1 \subset \mathfrak{M}_1'$.
- (3) As \mathfrak{E} is the sum of $\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2$, therefore $\mathfrak{R}(\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2) = \mathfrak{B}$.

16



Mais étonnamment, ce que Murray et von Neumann ont trouvé, c'est que, outre la factorisation, qui provient de la factorisation de l'espace de Hilbert sous-jacent, il s'avère qu'il existe des factorisations qui ne viennent pas de là. Et donc, les factorisations issues de la factorisation de l'espace de Hilbert sont appelées les facteurs de type I, ce sont de loin les plus simples.



Mais ils ont trouvé deux autres types. Ils ont trouvé ce qu'on appelle le type II et le type II, qu'est-ce que cela signifie, de quelle manière, si vous voulez, les factorisations de type II sont-elles différentes, sont-elles distinctes des facteurs du type I. Les factorisations I, eh bien, elles sont très distinctes, car quand on considère une factorisation de type I, après tout, l'algèbre est juste l'algèbre des opérateurs dans un espace de Hilbert donné. Alors, si vous voulez, à quoi correspondraient des sous-espaces classés par les entiers, par la dimension du sous-espace, qui pourrait être infini bien sûr. Or, dans le cas du type II, ce qui se passe, c'est que ceux qui correspondent aux sous-espaces ne sont plus classés par un entier mais ils sont classés en fonction du type II_1 ou de type II_∞ , soit par l'intervalle $[0, 1]$, soit par l'intervalle $[0, \infty]$. Et je veux dire, c'est la première apparition de dimensions continues qui... je me souviens avoir lu un article de von Neumann quand j'étais à l'École Normale, et ça, vraiment, ça m'a beaucoup intrigué, le fait qu'il y ait ces dimensions continues, ça apparaît. Et puis, qu'est-ce que vous avez, vous avez le type III et le type III correspond à tout ce qui reste.

KMS Condition

Boltzman State $\varphi(x) = \text{Tr}(x \exp(-\beta H))$ and Heisenberg evolution $\sigma_t(x) = \exp(itH)x \exp(-itH)$.

19

Je veux dire en fait, qu'est venu ensuite comme un outil important le fait que le lien entre l'état de Boltzman est donné lorsque vous considérez tous les opérateurs de l'espace de Hilbert par la trace de x multipliée par l'exponentielle de $-\beta H$ où H est l'hamiltonien et β est la température inverse. Ceci est lié à l'évolution temporelle de Heisenberg que je vous ai déjà montrée, à savoir le fait que $\sigma_t(x) = e^{itH} x e^{-itH}$. Ils sont liés entre eux par quelque chose qui peut être formulé purement algébriquement en termes de l'état lui-même et de l'évolution du temps. Et c'est la condition Kubo-Martin-Schwinger (KMS), qui est une condition qui peut être formulée en termes de fonctions holomorphes.

Tomita-Takesaki

Theorem

Let M be a von Neumann algebra and φ a faithful normal state on M , then there exists a unique

$$\sigma_t^\varphi \in \text{Aut}(M)$$

which fulfills the KMS condition for $\beta = 1$.

20

Et une étape très importante a été franchie par Tomita et Takesaki vers 1970 quand ils ont prouvé que cette association entre un état et un groupe d'automorphismes à un paramètre est valable pour toute algèbre de von Neumann. Donc, si vous prenez une algèbre de von Neumann et si vous prenez n'importe quel état normal fidèle sur cette algèbre, alors il existe un groupe unique d'automorphismes à un paramètre qui remplit réellement la condition KMS de l'association pour $\beta = 1$. J'ai commencé ma thèse et dans ma thèse, ce que j'ai prouvé

Thesis (1971-1972)

Theorem (ac)

$$1 \rightarrow \text{Int}(\mathcal{M}) \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{M}) \rightarrow \text{Out}(\mathcal{M}) \rightarrow 1,$$

The class of σ_t^φ in $\text{Out}(\mathcal{M})$ does not depend on φ .

Thus a von Neumann algebra \mathcal{M} , has a canonical evolution

$$\mathbb{R} \xrightarrow{\delta} \text{Out}(\mathcal{M}).$$

Noncommutativity \Rightarrow Evolution

21

en 1971-1972, en avril 1972, c'est qu'en fait, ce groupe d'automorphismes à un paramètre est unique, quand vous le regardez dans le quotient du groupe des automorphismes de \mathcal{M} divisé par les automorphismes intérieurs. Voyez-vous, quand une algèbre n'est pas commutative, elle admet des automorphismes triviaux, à savoir des automorphismes qui sont obtenus en conjuguant un élément par un élément unitaire dans l'algèbre, donc par x est envoyé sur UxU^* . Et parce que ces automorphismes sont complètement triviaux d'une certaine manière, ils forment un sous-groupe normal du groupe des automorphismes et les automorphismes intéressants forment un groupe quotient qui est le groupe $\text{Out}(\mathcal{M})$. Donc ce que j'ai prouvé dans ma thèse qui était sous Jacques Dixmier, j'ai prouvé qu'en fait, il y a un unique homomorphisme de la droite réelle dans le groupe $\text{Out}(\mathcal{M})$ des classes d'automorphismes de \mathcal{M} , indépendant du choix de l'état. Il s'agit d'un fait étonnant en ce sens que ce qu'il vous dit, c'est que cette algèbre, rien que par sa non-commutativité, acquiert une évolution. Cela m'a bien sûr donné

Classification of factors

New invariants and reduction of type III to type II and automorphisms.

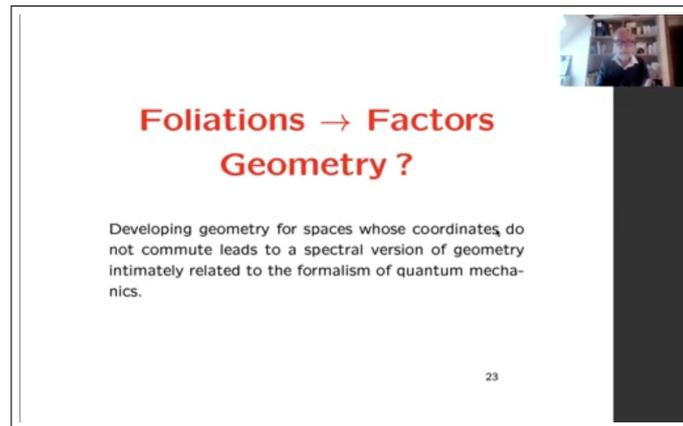
The Module $S(M)$: It is a closed subgroup of \mathbb{R}_+^* .

Factors of type III_λ , $\lambda \in [0, 1]$

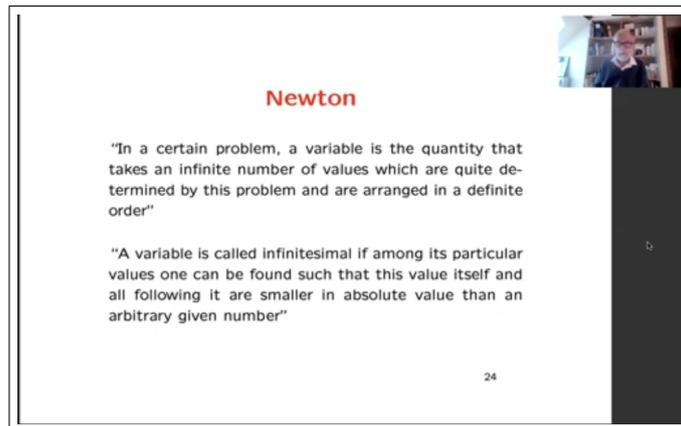
Periods : It is a subgroup of \mathbb{R} , $T(M) \subset \mathbb{R}$.

22

la classification des facteurs. J'ai donc pu définir de nouveaux invariants, et j'ai aussi pu réduire le type III au type II et automorphismes. En fait, j'ai laissé un cas ouvert, qui a été plus tard fermé par Takesaki. Mais j'avais défini deux invariants fondamentaux, le module $S(M)$ qui est un sous-groupe fermé de \mathbb{R}_+^* et qui permettait de classer, si on veut, les facteurs de type III en type III_λ où λ appartient à $[0, 1]$ et la réduction du type III au type II, je l'ai faite dans le cas où λ était différent de 1. Le cas III_0 était particulièrement intéressant. Et j'ai également défini le groupe de périodes, qui est un sous-groupe de la droite réelle, mais cette fois, ce n'est pas un sous-groupe fermé, cela peut être un groupe assez sauvage. Et c'est un sous-groupe remarquable dans le sens où, qu'il soit additif ou pas, il y a certaines durées, du sous-groupe vers la droite, qui sont des périodes des facteurs selon lesquelles le facteur ne bouge pas.



Une fois ce travail effectué, je suis arrivé à l'IHES à Bures, et j'ai découvert que, bien sûr, j'étais un spécialiste d'un sujet précis, mais que les préoccupations des gens étaient en fait assez éloignées des miennes et j'ai eu la chance de rencontrer Dennis Sullivan, et de discuter beaucoup avec lui, et après ces discussions, j'ai trouvé qu'il y avait une manière complètement canonique d'associer une algèbre de von Neumann qui, dans la plupart des cas, est un facteur, aux feuilletages. Les feuilletages sont donc des objets très familiers en géométrie différentielle, ce sont essentiellement des décompositions du produit mais données localement uniquement et ce qui est intéressant, ce n'est pas leurs propriétés locales qui sont triviales mais leurs propriétés globales. Et ce qui était incroyable c'est que cette relation que j'avais trouvée entre les feuilletages et les facteurs m'a permis d'obtenir les facteurs les plus exotiques dans le cas des feuilletages les plus simples. Par exemple, si vous prenez la foliation de Kronecker du tore, elle vous donne le type II hyperfini, si vous prenez par exemple les feuilletages du faisceau de sphères d'une surface de Riemann, cela vous donne le facteur hyperfini unique de type III₁ qui est extrêmement exotique. D'un autre côté, vous savez, ce qui se passe, c'est que lors de cette association des feuilletages aux facteurs, les algèbres de von Neumann ne tenaient compte que de la théorie majeure des feuilletages. Mais les feuilletages sont beaucoup plus riches d'une certaine manière. Ils appartiennent à la géométrie fonctionnelle. Ils ont donc une structure différentielle. Ils ont une topologie et ainsi de suite. Et cela m'a conduit à développer la géométrie des espaces dont les coordonnées ne commutent pas, car lorsque vous traitez l'algèbre des feuilletages, bien sûr les facteurs que vous obtenez ne sont pas commutatifs. Cette non-commutativité vient du fait que vous êtes autorisé à glisser le long des feuilles. Cela m'a donc conduit à une version spectrale de la géométrie, que je souhaite vous présenter ici, et ceci est étroitement lié au formalisme de la mécanique quantique. Et comme échauffement, il faut comprendre ce qu'il y a de miraculeux dans ce formalisme de la mécanique quantique et pourquoi il peut être si pertinent et si utile, pour faire de la géométrie.



Newton

"In a certain problem, a variable is the quantity that takes an infinite number of values which are quite determined by this problem and are arranged in a definite order"

"A variable is called infinitesimal if among its particular values one can be found such that this value itself and all following it are smaller in absolute value than an arbitrary given number"

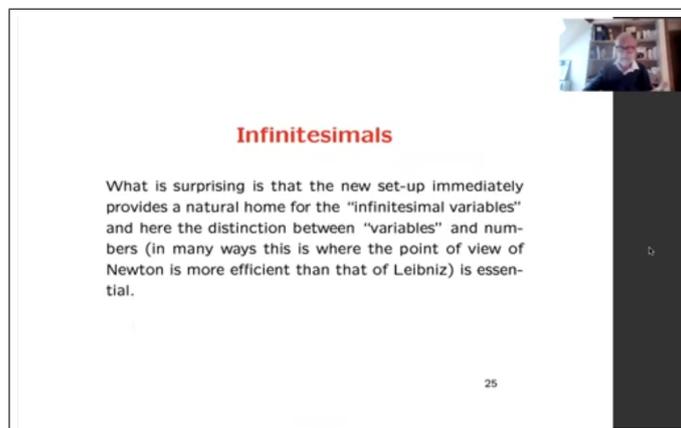
24

Une première chose qui est remarquable est que si vous lisez Newton, vous trouverez, à condition de lire ce qu'il a écrit dans le formalisme de la mécanique quantique... il vous donnera immédiatement la bonne réponse car ce sont des infinitésimaux. Donc, tout d'abord, Newton n'était pas intéressé par les chiffres, il était intéressé par les variables. Ce qu'il dit, c'est que :

"Dans un certain problème, une variable est la quantité qui prend un nombre infini de valeurs qui sont bien déterminées par ce problème et sont disposées dans un ordre défini".

Et puis il parle des infinitésimaux. Et pour lui, un infinitésimal est une variable. Donc,

"Une variable est appelée infinitésimale si parmi ses valeurs particulières, on peut trouver qu'une telle de ces valeurs elle-même et toutes celles qui la suivent sont plus petites en valeur absolue qu'un nombre arbitraire donné."



Infinitesimals

What is surprising is that the new set-up immediately provides a natural home for the "infinitesimal variables" and here the distinction between "variables" and numbers (in many ways this is where the point of view of Newton is more efficient than that of Leibniz) is essential.

25

Maintenant, ce qui est étonnant, c'est que lorsque vous appliquez cette notion d'infinitésimal qui est essentiellement là, à la manière dont il est essentiellement défini selon les mots de Newton, alors vous trouvez qu'ils correspondent exactement à une notion bien connue en théorie des opérateurs

Classical	Quantum
Infinitesimal variable	Compact operator T
Infinitesimal of order α	Operator T with $\mu_n(T) = O(n^{-\alpha})$
Differential of variable	$dT := [F, T]$ $F = F^*$, $F^2 = 1$
Differential k -forms	$\Omega^k := \{\omega = \sum f_0 df_1 \dots df_k\}$

26

et qui est la notion des opérateurs compacts. Parce que les opérateurs compacts, eh bien, ce sont des variables, comme nous l'avons vu, car vous savez, les variables correspondent à des opérateurs, mais de plus, elles ont exactement la propriété que Newton disait, à savoir que si vous prenez leurs valeurs caractéristiques, alors ces valeurs caractéristiques sont des valeurs propres pour la valeur absolue de l'opérateur. Et ces valeurs caractéristiques ont la propriété que pour tout ε , il y en a seulement un nombre infini qui sont plus grands que ε . Ils correspondent donc exactement à ce que Newton avait en tête. Dans ce formalisme, vous avez une règle, immédiatement, pour ce qui est un infinitésimal d'ordre α . Donc, pour cela, vous regardez le taux de décomposition des valeurs caractéristiques, et par exemple, une infinitésimale d'ordre 1 est telle que sa caractéristique voit ses valeurs décroître comme $1/n$. Ceci est fondamental pour plus tard car de telles choses ne sont pas traçables car la série $1/n$ est divergente mais quand on regarde sa trace, elle a une divergence logarithmique, et c'est le coefficient de cette divergence logarithmique qui vous donne quelque chose de local. Il y a aussi le différentiel des variables. Normalement, vous essayez de différencier les fonctions, et etc., mais ici, c'est juste défini, pour un opérateur borné, c'est juste défini comme un commutateur avec l'opérateur F qui satisfait deux conditions : la condition qu'il soit auto-adjoint et la condition que son carré vaille 1. Il n'y a donc pas de contenu dans l'opérateur F lui-même ; ce qui est vraiment important, c'est la relation entre l'opérateur F et l'opérateur T . Comme F^2 vaut 1, vous pouvez facilement montrer que le carré du différentiel au sens graduel est 0, et alors vous avez la notion de k -formes différentielles, qui sont obtenues uniquement en prenant des sommes d'opérateurs de produits de (k -formes) 1-formes, si vous les définissez de manière évidente. Tant de propriétés sortent naturellement. Mais le plus important a été que ce calcul quantifié

Quantized Calculus

⇓

Cyclic cohomology

De Rham homology in noncommutative framework!

$\text{tr}(\gamma\omega) : \Omega^k \rightarrow \mathbb{C}$

Cycles and SBI long exact sequence.

27

m'a conduit en 1980-1981 à la cohomologie cyclique. Et la cohomologie cyclique joue vraiment un rôle fondamental dans la géométrie non-commutative correspondant à la cohomologie de Rham

dans ce cadre non-commutatif. J'ai donné une conférence en 1981 à Oberwolfach dont le titre était "Séquences spectrales et cohomologie des flots pour les algèbres non-commutatives", où si vous voulez toutes les propriétés de base, les propriétés fondamentales de la cohomologie cyclique viennent aisément si l'on prend au sérieux ce calcul quantifié. Parce que dans le calcul quantifié, ce que vous obtenez est ce qu'on appelle le cycle, car vous pouvez utiliser la trace pour intégrer les formes différentielles, et vous obtenez que ce cycle est fermé, et ainsi de suite. Et de plus, si vous pouvez intégrer une forme de dimension k , vous pouvez également intégrer des formes de dimension $k+2$. Il y a une distinction entre les cas pairs et impairs, ce qui donne à l'opérateur S une périodicité, et au SBI une séquence exacte qui est la séquence spectrale correspondante. Alors bien sûr, ce n'est qu'un exemple de l'utilisation du calcul quantifié. Il existe de nombreux autres cas. L'un des cas est que par exemple, vous pouvez faire de la géométrie différentielle dans l'anneau de groupe du groupe libre, en utilisant le calcul quantifié qui est défini par le groupe sur un arbre. Mais ce sont des outils, et maintenant, avec ces outils, nous voulons vraiment venir à la géométrie elle-même, au sens métrique. Donc pour la géométrie elle-même, dans le sens métrique, il faut faire une petite discussion, en revenant, sur le paradigme riemannien

Riemannian paradigm

The Riemannian paradigm is based on the Taylor expansion in local coordinates of the square of the line element and in order to measure the distance between two points one minimizes the length of a path joining the two points

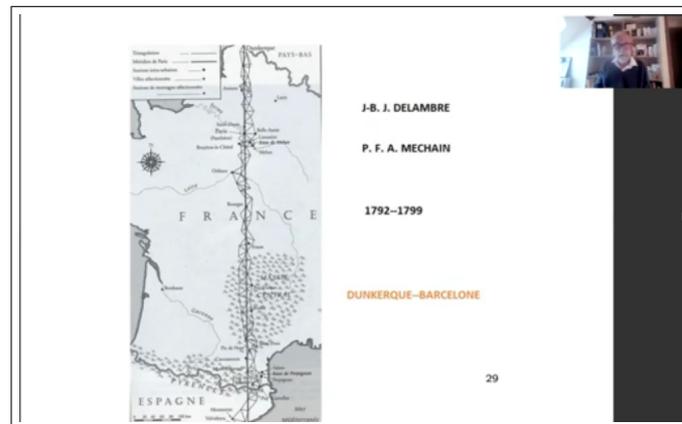
$$d(a, b) = \text{Inf} \int_{\gamma} \sqrt{g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}}$$

28

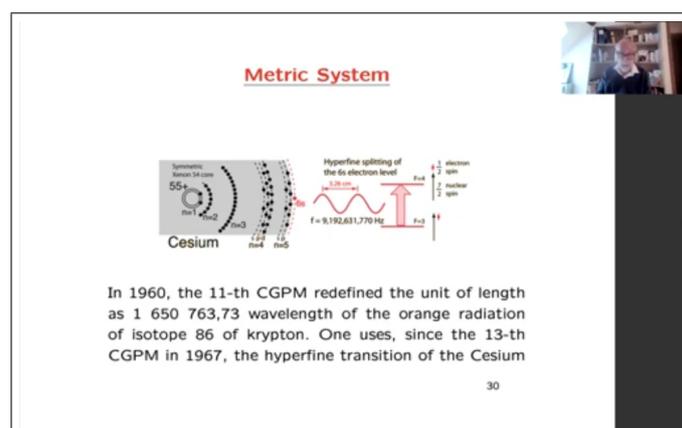
et sur la façon dont le système métrique évolue. Le paradigme riemannien est basé sur le développement de Taylor... Riemann a eu cette fantastique conférence inaugurale, sur laquelle nous reviendrons plus tard, dans laquelle il a eu la perspicacité de définir la métrique localement, en regardant le développement de Taylor de l'élément de longueur en coordonnées locales, et en fait, il regardait le carré de l'élément de longueur. Il y a donc une racine carrée impliquée, et la distance entre deux points, comme vous le savez très bien, est calculée en minimisant la longueur du chemin, comme ici,



par exemple entre Seattle et Londres. Et donc, c'est une définition très concrète de la longueur et en quelque sorte, ça concorde bien avec



la manière dont le système métrique a été développé et typiquement, ce qui s'est passé... ce que je vous montre, c'est le fait que pendant la Révolution française, ils voulaient avoir une unification de l'unité de longueur, donc ils l'ont défini comme $1/40000000$ fois la circonférence de la Terre et bien sûr, nous mesurons juste un angle, qu'ils connaissaient des étoiles, et je veux dire cet angle, cette distance était entre Dunkerque et Barcelone et deux physiciens, astronomes, sont allés le long de ce méridien et ils ont fait une mesure concrète et à partir de cette mesure concrète (ils s'appelaient Delambre et Méchain) a été fabriqué une barre de platine, qui a été déposée près de Paris au Pavillon de Breteuil à Sèvres, et qui devait être l'unité de longueur. Maintenant, ce qui s'est passé est très intéressant. Parce que ce qui s'est passé autour des années 1925 ou quelque chose comme ça, c'est que les physiciens ont découvert que l'unité de longueur qui avait été déposée près de Paris et ainsi de suite, n'avait pas une longueur constante. Comment ont-ils fait ça ? Eh bien, ils l'ont comparée à la longueur d'onde du Krypton. Il y a une certaine raie orange dans la longueur d'onde de Krypton qu'ils ont utilisée pour mesurer cette barre de platine, et ils ont constaté que la longueur changeait. Donc je veux dire, bien sûr, ce n'était pas une bonne définition, et ils ont changé, je veux dire les physiciens ont décalé ce problème à la Conférence sur le système métrique,



ils se sont décalés d'abord pour définir l'unité de longueur par ce rayonnement orange du Krypton, un certain multiple de cette longueur d'onde. Mais ensuite, ils ont découvert qu'il y avait une meilleure façon de le faire, qui était avec le Césium. Et en fait, avec cette définition du Césium, vous pouvez acheter, dans un magasin, des appareils qui vous permettent d'effectuer des mesures immédiates avec une précision de 10 décimales.

**Geometry from the
spectral point of view**

Es muss also entweder das dem Raume zu Grunde liegende Wirkliche eine discrete Mannigfaltigkeit bilden, oder der Grund der Massverhältnisse ausserhalb, in darauf wirkenden bindenen Kräften, gesucht werden.

It is therefore necessary that the reality on which space is based form a discrete variety, or that the foundation of the metric relations be sought outside it, in the binding forces which act in it.

31

Je veux dire, c'est un grand pas en avant, et ce qui s'est passé, c'est qu'il y a une transition hyperfine entre deux niveaux, et cela correspond à peu près à

In fact the speed of light is fixed at
299792458 meters/second
and the second is defined as the duration of 9 192 631 770 periods of the radiation corresponding to the above hyperfine transition. The meter is therefore by convention (with a practical precision of 10^{-14})
$$\frac{9192631770}{299792458} = \frac{656616555}{21413747} \sim 30.6633$$
times the wavelength of the hyperfine transition.

une longueur d'onde d'environ 3,26 centimètres et ensuite, vous redéfinissez le tout, donc en fait, vous définissez la vitesse de la lumière, vous fixez la vitesse de la lumière à ce nombre (j'ai entendu dire que Grothendieck était furieux quand il a entendu ça, parce qu'il voulait que ce soit 300 000 000), mais la raison pour laquelle vous ne pouvez pas le faire c'est-à-dire qu'il y a déjà des mesures précises qui sont effectuées, il faut donc s'accorder là-dessus. Donc je veux dire qu'il y a une valeur étrange qui est prise. Ensuite, vous définissez le second nombre, comme étant un nombre de périodes de ce rayonnement provenant de la transition hyperfine, et comme corollaire de cela, vous connaissez le mètre, l'unité de longueur, qui se définit donc comme étant cette proportion (c'est un nombre rationnel) fois la longueur d'onde de la transition hyperfine. Maintenant, ce qui est extrêmement étonnant, c'est que cette transition conceptuelle en termes de définition, que les physiciens ont faite, il y a longtemps, entre la barre de platine et la barre spectrale, est exactement parallèle à la transition entre le paradigme riemannien et le paradigme spectral, que je vais expliquer.

**Geometry from the
spectral point of view**

Es muss also entweder das dem Raume zu Grunde liegende Wirkliche eine discrete Mannigfaltigkeit bilden, oder der Grund der Massverhältnisse ausserhalb, in darauf wirkenden bindenen Kräften, gesucht werden.

It is therefore necessary that the reality on which space is based form a discrete variety, or that the foundation of the metric relations be sought outside it, in the binding forces which act in it.

31

Ce qui est également étonnant, c'est que Riemann a été incroyablement prudent dans sa conférence inaugurale, pour dire, je veux dire, il ne croyait pas vraiment que sa notion de métrique continuerait à avoir un sens dans les plus petites dimensions. Et la raison pour laquelle il préconisait que... parce qu'il faut dire qu'il travaillait avec des corps solides et qu'il utilisait des rayons de lumière dans sa théorie, donc ce qu'il écrivait était que lorsque vous travaillez dans le domaine où les corps très petits et solides n'ont plus de sens, pas plus que les rayons lumineux et donc, la phrase exacte est la suivante

“Il faut donc que la réalité sur laquelle repose l'espace forme une variété discrète, ou que le fondement des relations métriques soit recherché en dehors d'elle, dans les forces contraignantes qui agissent en elle”.

et comme nous le verrons, c'est exactement ce qui se passe, dans le cadre spectral.

Hamilton, Clifford, Dirac

32

Donc la possibilité de faire ça, de transférer dans le cadre spectral ces idées, vient en fait du travail de Hamilton, Clifford et Dirac, et essentiellement, quelle est la manière d'extraire la racine carrée dans la formule de Riemann ($d(a, b) = \text{Inf} \int_{\gamma} g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}$). Quand il y a la racine carrée de l'élément de longueur, on aimerait en fait n'avoir pas le carré mais l'élément de longueur lui-même. Il est possible d'extraire cette racine carrée au niveau du formalisme quantique, au niveau des opérateurs. Et c'est possible grâce à Hamilton, Clifford et Dirac. Hamilton a été le premier à écrire vraiment l'opérateur de Dirac, parce qu'il avait les quaternions, et il a écrit, vous savez, i, d par dx plus j, d par dy , plus k, d par dz (i.e. $i \frac{d}{dx} + j \frac{d}{dy} + k \frac{d}{dz}$), qui est un exemple d'opérateur de Dirac. Et la clé de tout ça, c'est que quand vous avez deux opérateurs X et Y qui ne commutent pas,

Spectral Paradigm

Hamilton, Clifford, extraction of square root
 $XY = -YX \Rightarrow (X + Y)^2 = X^2 + Y^2$

Dirac, Atiyah-Singer \Rightarrow Dirac operator D
 $ds = \bullet \text{---} \bullet = D^{-1}$

The length element is the propagator of fermions
 $d(a, b) = \text{Sup} |f(a) - f(b)| \mid \| [D, f] \| \leq 1.$

It is the "Kantorovich dual" of the usual formula.

33

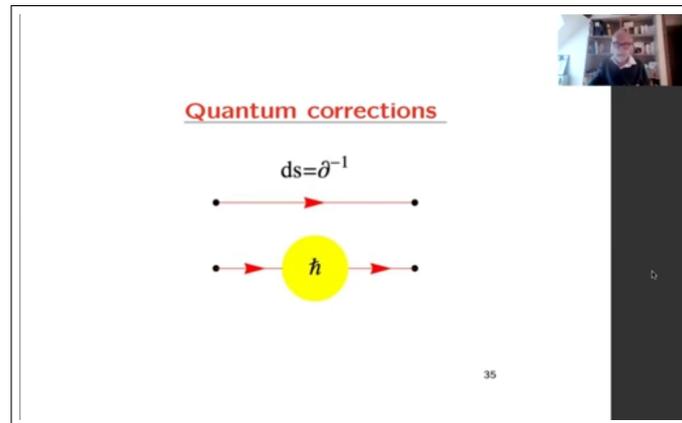
alors en fait, vous pouvez écrire X^2+Y^2 comme un seul carré, à savoir comme le carré de $X+Y$. Donc à travers le travail de Dirac et aussi d'Atyah-Singer, qui ont défini l'opérateur de Dirac pour une variété de spins arbitraire, alors émerge l'opérateur de Dirac D . Dans la théorie spectrale, l'élément de longueur, qui est la racine carrée du ds^2 de Riemann, est un opérateur, c'est un infinitésimal lorsque la variété est compacte, et c'est quoi ? C'est simplement l'inverse de l'opérateur de Dirac. Bien sûr, il y a des choses mineures auxquelles vous devez faire attention, qu'en est-il des zéros et ainsi de suite, mais je veux dire, cet élément de longueur est ce qu'on appelle le propagateur de fermions, et vous devez le penser comme les physiciens l'écrivent quand ils écrivent des diagrammes de Feynman : c'est une toute petite ligne qui relie deux points qui sont très proches. Et puis, plutôt que cet inverse, qui est l'opérateur D , vous pouvez calculer une distance entre deux points, et cette distance n'est plus calculée par l'infimum d'un arc joignant les deux points, mais elle est calculée en regardant le décalage d'onde maximal, entre la valeur en a et la valeur en b , lorsque vous obligez la fréquence des ondes à être limitée. C'est ce qu'on appelle, mathématiquement parlant, le "dual de Kantorovitch" de la formule habituelle.

Classical	Quantum
Line element $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$	Propagator $ds := D^{-1}$
$d(a, b) = \text{Inf} \int_\gamma \sqrt{ds^2}$	$d(a, b) = \text{Sup} f(a) - f(b) \mid \ [D, f] \ \leq 1$
Volume $\int \sqrt{g} d^4x$	$\int ds^4 = \text{coefficient of } \log(\Lambda) \text{ in } \text{Tr}_\Lambda(ds^4)$

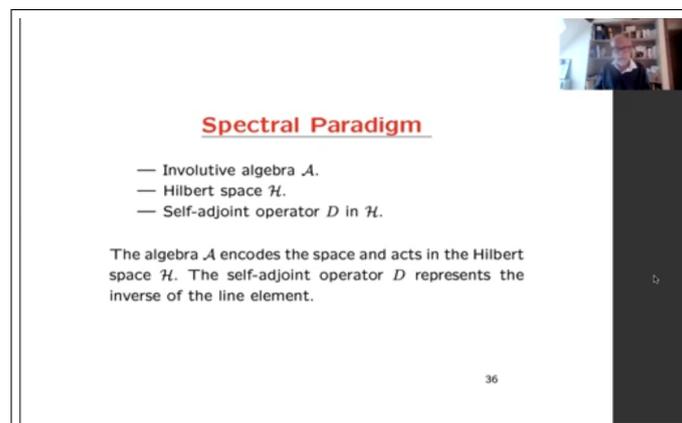
34

Donc vous avez ce dictionnaire maintenant selon lequel l'élément de longueur ds est le propagateur des fermions, la distance est calculable, elle est calculée non pas par un infimum sur les arcs, mais par un supremum, et vous remarquez que ces conditions s'appliquent à beaucoup plus d'espaces, car il y a beaucoup d'espaces dans lesquels vous ne pouvez pas rejoindre deux points par un arc, pensez à un espace qui est déconnecté, alors que la formule de droite est parfaitement logique. Et le volume, par exemple, est défini comme l'intégrale de la puissance de l'élément de longueur qui sera d'ordre 1, et comme je l'ai déjà dit, quand quelque chose est d'ordre 1, un infinitésimal d'ordre 1, cela signifie que sa trace est logarithmiquement divergente. Alors ce que vous faites c'est que vous prenez le coefficient de la divergence logarithmique et cela vous donnera le volume. Aussi, ce qu'il

faut comprendre, c'est que si ce formalisme dans lequel se définit la géométrie est le formalisme quantique, ceci



vous permet immédiatement de comprendre comment incorporer les corrections quantiques. Pourquoi ? Parce que nous savons très bien que le propagateur de fermions quand on travaille dans la théorie quantique des champs ne reste pas tel qu'il était avant. Il acquiert des corrections quantiques. Ce sont des modifications infimes de la géométrie, qui sont données par une sorte de série de puissances, mais qui peuvent être incorporées dans le formalisme spectral. Donc le formalisme spectral est encodé dans



ce qu'on appelle un triple spectral. Un tel triplet contient donc trois données :

- les données d'une algèbre involutive \mathcal{A} , qui vous donne essentiellement l'espace, les coordonnées dans l'espace ; cette algèbre agit dans un espace de Hilbert ;
- l'espace de Hilbert \mathcal{H} est fixe ;
- et de plus vous avez l'élément auto-adjoint D , qui est le propagateur, qui agit dans le Espace Hilbert \mathcal{H} .

Dans la plupart des cas, en passant, vous découvrirez que la représentation de \mathcal{A} et D est, quand vous les prenez ensemble, irréductible. Voilà donc le paradigme spectral. Et ce que je veux expliquer illustrera la puissance de ce paradigme par un certain nombre de cas.

**Inner automorphisms
and internal symmetries**

$\mathcal{A} = C^\infty(M, M_n(\mathbb{C})) = C^\infty(M) \otimes M_n(\mathbb{C})$

Algebra of $n \times n$ matrices of smooth functions on manifold M .

The group $\text{Int}(\mathcal{A})$ of inner automorphisms is locally isomorphic to the group \mathcal{G} of smooth maps from M to the small gauge group $SU(n)$

$1 \rightarrow \text{Int}(\mathcal{A}) \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{A}) \rightarrow \text{Out}(\mathcal{A}) \rightarrow 1$

becomes identical to

$1 \rightarrow \text{Map}(M, G) \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \text{Diff}(M) \rightarrow 1.$

37

Donc la première chose qui arrive est que maintenant, parce que vous pouvez parler de la géométrie lorsque l'algèbre n'est plus commutative, maintenant vous n'avez plus le $g_{\mu\nu}$ qui dépend de x et ainsi de suite et ainsi de suite, juste à cause de cela, vous pouvez regarder l'exemple le plus simple. L'exemple le plus simple qui n'est pas commutatif consiste à remplacer l'algèbre des fonctions sur une variété M par l'ensemble des matrices $n \times n$ sur cette algèbre. Donc, si vous faites cela, vous regardez juste l'algèbre pendant un moment, ce que vous découvrez, comme je l'ai déjà dit, lorsqu'une algèbre n'est pas commutative, elle a cette séquence exacte non triviale, quand vous avez les automorphismes triviaux, qui sont les automorphismes intérieurs, et qui forment un sous-groupe normal d'automorphismes, puis vous passez au quotient qui est l'ensemble des automorphismes extérieurs. Maintenant, quand vous appliquez cette séquence, qui est générale, lorsque vous l'appliquez à l'algèbre des matrices $n \times n$ sur la variété, ce que vous obtenez est une séquence exacte où les automorphismes intérieurs deviennent les fonctions de la variété M vers le groupe G qui est dans ce cas le groupe $SU(n)$, si vous prenez les matrices $n \times n$, puis cela va au groupe des automorphismes, et cela va aux difféomorphismes. Alors qu'est-ce que vous avez automatiquement trouvé par cette extension non-commutative très simple, vous avez amélioré le groupe de difféomorphismes à un groupe que les physiciens connaissent très bien, car c'est le groupe d'invariance de la fonctionnelle d'action, lorsqu'ils couplent, au minimum, la gravité avec la théorie de Yang-Mills, avec le groupe $SU(n)$.

**Spectral Action
and Einstein–Yang–Mills**

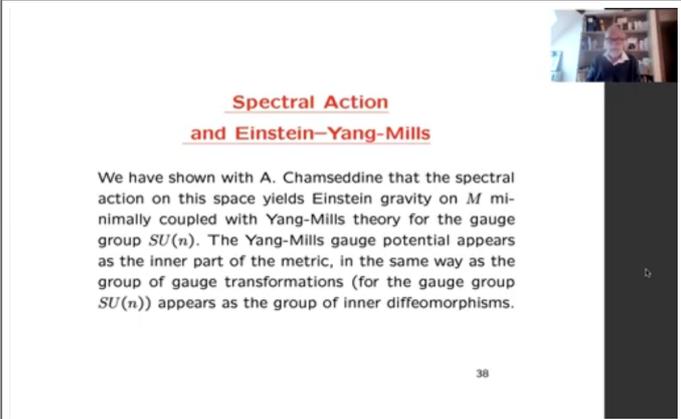
We have shown with A. Chamseddine that the spectral action on this space yields Einstein gravity on M minimally coupled with Yang-Mills theory for the gauge group $SU(n)$. The Yang-Mills gauge potential appears as the inner part of the metric, in the same way as the group of gauge transformations (for the gauge group $SU(n)$) appears as the group of inner diffeomorphisms.

38

Donc dans notre travail avec Ali Chamseddine, ce que nous avons trouvé, c'était la fonctionnelle d'action. Nous avons constaté que si nous prenions le cas très simple ci-dessus qui consiste à prendre les matrices $n \times n$ sur une variété, et si nous regardions l'action qui remplacerait l'action d'Einstein, qui est l'action spectrale, cette action spectrale, il peut difficilement y avoir plus invariante qu'elle,

cette action ne dépend que du spectre de l'élément de longueur. Ce que vous faites alors, c'est que vous écrivez le développement asymptotique et vous obtenez l'action d'Einstein. Vous obtenez le terme cosmologique sur lequel je reviendrai beaucoup plus tard.

Donc, vous obtenez cette gravité d'Einstein mais si vous prenez cette gravité d'Einstein couplée au minimum à la théorie de Yang-Mills, lorsque vous faites le calcul. Et les potentiels de jauge de Yang-Mills au fur et à mesure qu'ils apparaissent, apparaissent comme partie interne de la métrique. Donc, exactement de la même manière que je viens de le dire, le groupe des transformations de jauge du second type, le groupe de jauge $SU(n)$ apparaît comme le groupe des difféomorphismes intérieurs. Donc vous avez ce mélange, qui vient juste du fait d'avoir, vous savez, remplacé l'algèbre des fonctions par l'algèbre des matrices sur la variété. Donc c'est une chose très complète et avec Ali Chamseddine, on a fait beaucoup de travail, ensuite, avec Matilde Marcolli, avec Walter van Suijlekom, et aussi avec Slava Mukhanov, nous avons fait un très gros travail pour aller bien plus loin que cette instance simple d'Einstein-Yang-Mills.

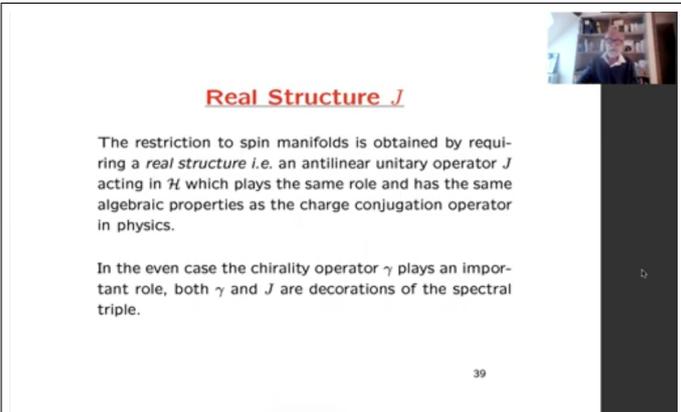


**Spectral Action
and Einstein-Yang-Mills**

We have shown with A. Chamseddine that the spectral action on this space yields Einstein gravity on M minimally coupled with Yang-Mills theory for the gauge group $SU(n)$. The Yang-Mills gauge potential appears as the inner part of the metric, in the same way as the group of gauge transformations (for the gauge group $SU(n)$) appears as the group of inner diffeomorphisms.

38

Dans ce travail, il y a un rôle essentiel qui est joué par la structure réelle. Alors ce qui se passe si vous voulez, c'est qu'il y a une sorte de reconstruction qui vous permet de reconstruire la variété à partir des données spectrales. Et pour se limiter aux variétés de spins, il faut penser à faire tourner les choses comme ça, il faut incorporer un peu de décoration dans les données spectrales, qui est celle d'une structure réelle. C'est donc un opérateur unitaire anti-linéaire, et nous verrons ce que c'est dans le langage physique et dans le langage mathématique, mais essentiellement, vous devez également ajouter une autre décoration dans le cas de même dimension qui est l'opérateur de chiralité. Donc nous avons ces deux choses, et



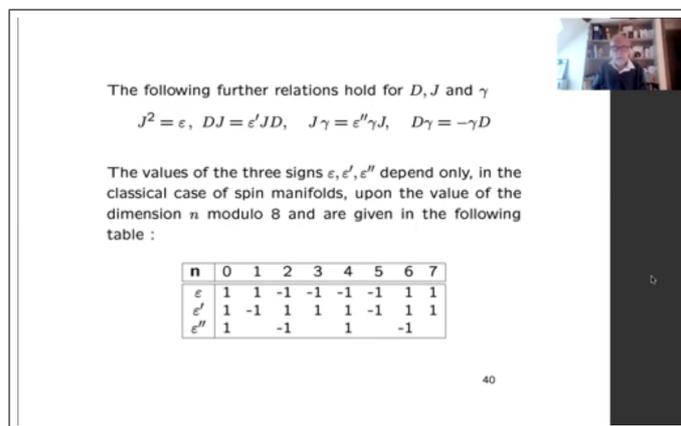
Real Structure J

The restriction to spin manifolds is obtained by requiring a *real structure* i.e. an antilinear unitary operator J acting in \mathcal{H} which plays the same role and has the same algebraic properties as the charge conjugation operator in physics.

In the even case the chirality operator γ plays an important role, both γ and J are decorations of the spectral triple.

39

ils satisfont à certaines règles de commutation. Et ces règles de commutation en fait, elles vous disent que vous avez en fait affaire à huit théories, il y a 8 théories possibles qui dépendent des multiples cas de la dimension modulo 8. Si vous le souhaitez, la théorie conceptuelle sous-jacente est ce qu'on appelle la KO -homologie, et la raison pour laquelle cette KO -homologie joue un rôle fondamental, c'est que, si vous essayez de comprendre à un niveau conceptuel ce qu'est une variété, dans la situation ordinaire, dans la géométrie différentielle ordinaire ce qu'est une variété, vous découvrirez, et c'est un travail qui remonte aux années 1970, en particulier par Dennis Sullivan, vous découvrirez que ce que vous avez besoin de faire...



The following further relations hold for D, J and γ

$$J^2 = \epsilon, \quad DJ = \epsilon'JD, \quad J\gamma = \epsilon''\gamma J, \quad D\gamma = -\gamma D$$

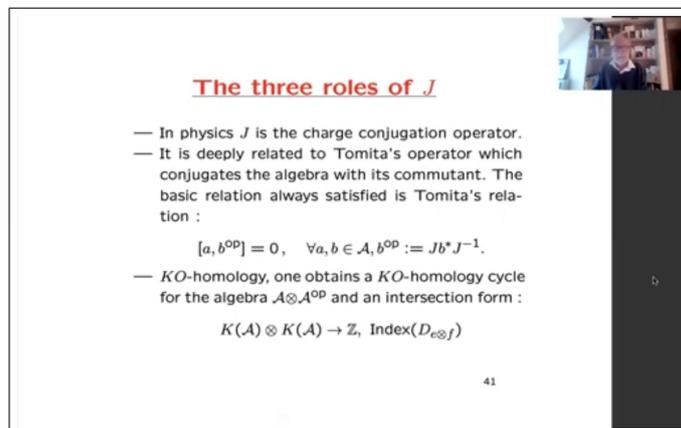
The values of the three signs $\epsilon, \epsilon', \epsilon''$ depend only, in the classical case of spin manifolds, upon the value of the dimension n modulo 8 and are given in the following table :

n	0	1	2	3	4	5	6	7
ϵ	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1
ϵ'	1	-1	1	1	1	-1	1	1
ϵ''	1		-1		1		-1	

40

vous supposez d'abord bien sûr que la variété a la dualité de Poincaré dans l'homologie ordinaire, mais ce n'est pas du tout suffisant, il suffit de mettre l'espace en question dans l'espace euclidien pour qu'il ait un micro-fibré normal. Mais ce micro-fibré n'est en aucun cas un fibré vectoriel. Et la difficulté pour le transformer en une variété, c'est d'élever la structure de ce micro-fibré en structure de fibré vectoriel.

Maintenant, pour résumer très brièvement les choses, dans le cas simplement connecté, vous découvrez que l'obstruction pour faire cela est que vous devriez avoir aussi la dualité de Poincaré dans la théorie plus profonde qui est la KO -homologie. Maintenant, grâce aux travaux d'Atiyah et Singer sur le théorème de l'indice, ils ont découvert que le représentant des cycles en KO -homologie est en fait exactement fourni par les données dont vous avez besoin pour construire l'opérateur de Dirac, et que vous avez 8 théories possibles dans cette KO -homologie, et elles correspondent aux différentes possibilités que j'exposais ici. Donc en fait,



The three roles of J

- In physics J is the charge conjugation operator.
- It is deeply related to Tomita's operator which conjugates the algebra with its commutant. The basic relation always satisfied is Tomita's relation :

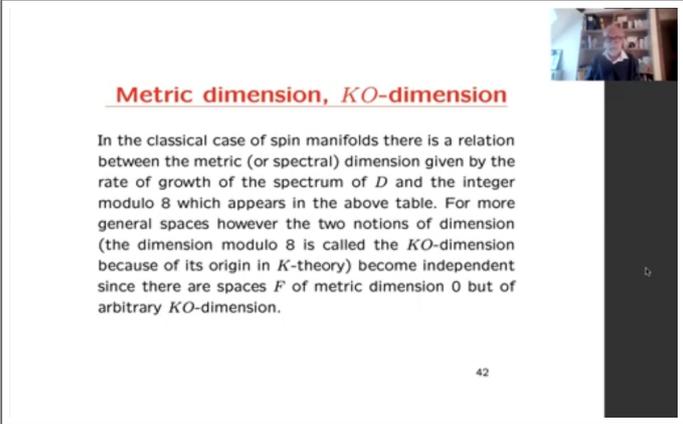
$$[a, b^{op}] = 0, \quad \forall a, b \in \mathcal{A}, \quad b^{op} := Jb^*J^{-1}.$$
- KO -homology, one obtains a KO -homology cycle for the algebra $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}^{op}$ and an intersection form :

$$K(\mathcal{A}) \otimes K(\mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{Z}, \quad \text{Index}(D_{e \otimes f})$$

41

J , cette vraie structure, a trois rôles. En physique, eh bien, les gens la reconnaîtront comme ce qu'on appelle un opérateur de conjugaison de charge, nous travaillons en euclidien, en temps imaginaire,

mathématiquement, cela s'avère être très profondément lié à l'opérateur de Tomita, pourquoi ? Parce que, dans le cas non-commutatif, ce que vous voulez, c'est que vous souhaiteriez restaurer la commutativité d'une manière ou d'une autre, et comment voulez-vous faire ça ? Vous le faites avec une sorte de truc, on retourne, on est capable de retourner l'algèbre en son commutant en utilisant cet opérateur J de la théorie. Tomita vous permet de faire cela en général. Je veux dire, il a prouvé un théorème qui dit que si vous prenez un facteur dans l'espace de Hilbert, qui a un vecteur cyclique et un séparateur, ce qui est toujours le cas dans le type III, alors vous pouvez toujours trouver un tel opérateur J qui le retourne en son commutant. Et enfin, le sens le plus profond, si vous voulez, de ce J comme je l'ai dit, c'est de dire que vous avez la dualité de Poincaré dans la KO -homologie, et cela vous donne le fait que, à cause du J , vous avez le cycle de KO -homologie non seulement pour l'algèbre \mathcal{A} , mais aussi pour l'algèbre sous-tendue par son opposé. Et en particulier, vous avez une forme d'intersection, et ainsi de suite. Maintenant, il s'avère que cela a joué un rôle clé dans le développement de la compréhension du modèle standard, au sens où généralement, lorsque vous travaillez avec des variétés de spins, il existe un lien entre la dimension métrique et ce KO -module de dimension 8.

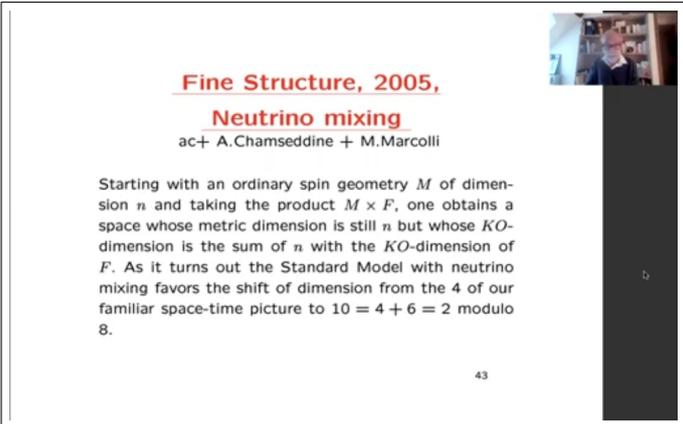


Metric dimension, KO -dimension

In the classical case of spin manifolds there is a relation between the metric (or spectral) dimension given by the rate of growth of the spectrum of D and the integer modulo 8 which appears in the above table. For more general spaces however the two notions of dimension (the dimension modulo 8 is called the KO -dimension because of its origin in K -theory) become independent since there are spaces F of metric dimension 0 but of arbitrary KO -dimension.

42

Ce qui se passe, c'est qu'il y a une notion de dimension métrique, pour une géométrie spectrale, et cette dimension métrique vient juste de la croissance des valeurs propres du spectre de l'opérateur de Dirac. Mais il y a aussi une KO -dimension comme je viens de le mentionner et il s'avère que normalement, la KO -dimension est égale à la dimension métrique modulo 8, mais lorsque vous regardez les espaces de dimension 0, vous découvrez que ce n'est pas forcément vrai : vous pouvez fabriquer des espaces de dimension 0, mais qui sont de dimension arbitraire modulo 8. Cela pourrait sembler une curiosité mais en fait, ce n'est pas le cas du tout, et cela a joué un rôle absolument clé en 2005, dans notre travail conjoint avec Chamseddine et Marcolli,



**Fine Structure, 2005,
Neutrino mixing**
ac+ A.Chamseddine + M.Marcolli

Starting with an ordinary spin geometry M of dimension n and taking the product $M \times F$, one obtains a space whose metric dimension is still n but whose KO -dimension is the sum of n with the KO -dimension of F . As it turns out the Standard Model with neutrino mixing favors the shift of dimension from the 4 of our familiar space-time picture to $10 = 4 + 6 = 2$ modulo 8.

43

et ce que nous avons découvert, vous savez, avec Chamseddine, nous avons abandonné notre travail pour comprendre le modèle standard en 1998, nous l'avions fait en 1996 et nous avons abandonné en 1998 en raison de la découverte du mélange de neutrinos. Et il semblait impossible d'accueillir le mélange de neutrinos avec ce que nous avons. Mais dans ce que nous avons découvert en 2005, nous trois, c'est qu'en fait, si vous essayez les différentes KO -dimensions pour l'espace fini, vous savez, comme vous le mettez au cœur de la structure de l'espace-temps, alors étonnamment, vous constatez que si vous prenez la KO -dimension 6, pour cet espace fini qui a bien sûr une dimension métrique 0, alors, non seulement le mélange de neutrinos vient tout naturellement, mais aussi le mécanisme de bascule. Et je dois dire que j'ai été étonné parce que je ne connaissais pas jusque là le mécanisme de bascule et puis j'ai fait le calcul de ce que nous avons, et j'ai redécouvert le mécanisme de bascule. Mais contrairement à la physique, il n'est pas mis à la main, vous le trouvez à la suite des calculs.

Finite spaces

In order to learn how to perform the above shift of dimension using a 0-dimensional space F , it is important to classify such spaces. This was done in joint work with A. Chamseddine. We classified there the *finite spaces* F of given KO -dimension. A space F is finite when the algebra \mathcal{A}_F of coordinates on F is finite dimensional. We found among the choices of KO -dimension 6

$$\mathcal{A}_F = M_2(\mathbb{H}) \oplus M_4(\mathbb{C})$$

(Pati-Salam) but we had no uniqueness statement.

44

Alors ce que nous avons fait plus tard, avec Ali², nous avons classé les différents espaces finis des différentes KO -dimensions, et bien sûr, nous nous sommes intéressés à la KO -dimension, et parmi eux, nous en avons trouvé un que nous avons trouvé extrêmement intéressant, où l'algèbre qui était sous-jacente à l'espace fini (donc c'est une algèbre de dimension finie) était des matrices 2×2 sur le corps des quaternions, + des matrices 4×4 sur le corps des nombres complexes. Dans ce que nous faisons, le passage au groupe de jauge du modèle standard a été fait par ce que nous avons appelé l'ordre ??, mais ensuite par un travail conjoint avec van Suijlekom, nous avons analysé le modèle complet, sans réduction au modèle standard, et nous avons trouvé un beau modèle de Patti-Salam qui est en fait beaucoup plus intéressant et symétrique que le modèle standard lui-même, en particulier à cause de la liberté asymptotique.

D'accord, donc en fait, à ce stade, nous avons trouvé, et nous serions, vous savez, extrêmement intéressés par une sorte d'autre façon de trouver la même algèbre. Mais cette algèbre est étrange au sens où la dimension réelle des deux parties est différente. Vous avez 32 et 16, donc cela semble très difficile d'obtenir une telle chose de manière naturelle.

²Chamseddine

**Feynman slash of
position variables**

ac+ A.Chamseddine + S. Mukhanov

The role of the position variable q in the higher analogue of $[p, q] = i\hbar$ was the most difficult to uncover.

The answer is to encode the analogue of the position variable q in the same way as the Dirac operator encodes the components of the momenta, just using the Feynman slash.

45

Mais c'est ce que nous avons fait dans notre travail avec Mukhanov. La nouvelle idée qui est venue alors est que maintenant, nous n'allons pas seulement encoder, si vous voulez, tous les moments ensemble, les assembler tous ensemble, comme Dirac l'a fait, vous savez, en utilisant l'opérateur de Dirac, qui mélangeait tous les composants des moments en une seule entité, mais nous avons étudié ce qui se passerait si nous faisons la même chose avec les coordonnées. Et ce que nous avons obtenu est un analogue plus élevé des relations de commutation de Heisenberg.

Ce que nous avons d'abord étudié, comme je vais l'expliquer, nous voulions assembler les coordonnées en un seul opérateur, nous avons donc commencé bien sûr avec l'opérateur slash de

Feynman Slash

We let $Y \in \mathcal{A} \otimes C_\kappa$ be of the Feynman slashed form $Y = Y^A \Gamma_A$, and fulfill the equations

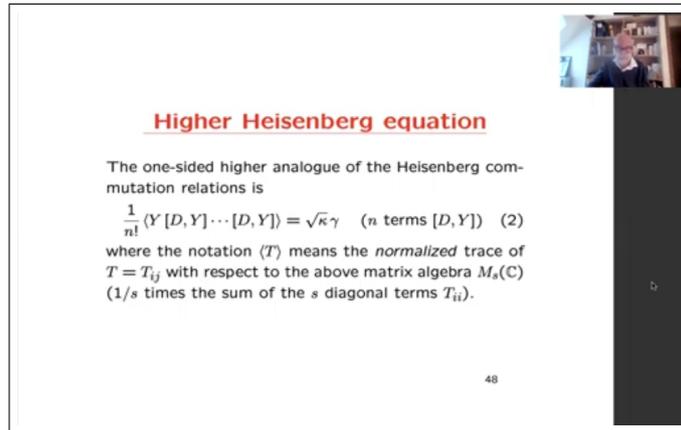
$$Y^2 = \kappa, \quad Y^* = \kappa Y \quad (1)$$

Here $\kappa = \pm 1$ and $C_\kappa \subset M_s(\mathbb{C})$, $s = 2^{n/2}$, is the Clifford algebra on $n+1$ gamma matrices Γ_a , $0 \leq a \leq n$

$$\Gamma_A \in C_\kappa, \quad \{\Gamma^A, \Gamma^B\} = 2\kappa \delta^{AB}, \quad (\Gamma^A)^* = \kappa \Gamma^A$$

47

Feynman, d'accord ? Nous voulions les assembler en une seule entité, et ce que nous avons trouvé très vite, c'est que la bonne condition pour les assembler, à cause des matrices de Clifford et des relations qu'ils vérifiaient, était d'avoir un Y auto-adjoint, ou auto-adjoint selon la valeur de κ qui vaut plus ou moins un, qui vérifie $Y^2 = \kappa$ (soit est auto-adjoint selon κ). Ceci est basé sur les matrices gamma, et au début, cela rappelle beaucoup la sphère car alors, les composants Y^A doivent satisfaire la condition que la somme de leurs carrés est égale à 1.





Higher Heisenberg equation

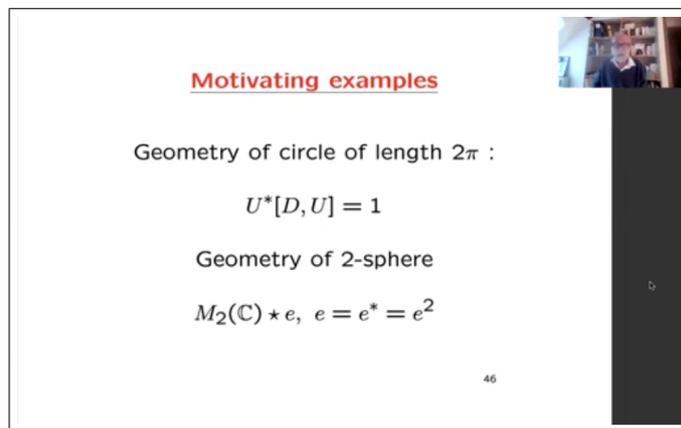
The one-sided higher analogue of the Heisenberg commutation relations is

$$\frac{1}{n!} \langle Y [D, Y] \cdots [D, Y] \rangle = \sqrt{\kappa} \gamma \quad (n \text{ terms } [D, Y]) \quad (2)$$

where the notation $\langle T \rangle$ means the *normalized trace* of $T = T_{ij}$ with respect to the above matrix algebra $M_s(\mathbb{C})$ ($1/s$ times the sum of the s diagonal terms T_{ii}).

48

Donc au début, nous avons écrit une sorte d'équation d'Heisenberg de type supérieur, qui est une sorte de relation de commutation : si vous voulez comprendre ce qu'il y a derrière tout ça, je dois revenir à un exemple bien plus simple,





Motivating examples

Geometry of circle of length 2π :

$$U^*[D, U] = 1$$

Geometry of 2-sphere

$$M_2(\mathbb{C}) \star e, \quad e = e^* = e^2$$

46

qui est la géométrie du cercle de longueur 2π . C'est un exercice facile de montrer que si vous regardez la géométrie du cercle de longueur 2π , elle est spécifiée uniquement par une équation, l'équation théorique d'un opérateur qui est $U^*[D, U] = 1$. U est un opérateur unitaire, D est un opérateur auto-adjoint, et il y a un paramètre unique, essentiellement à un paramètre près, qui ne joue aucun rôle dans la représentation métrique, irréductible de ces relations par des opérateurs d'espaces de Hilbert. Et quand vous calculez, vous trouvez que le spectre de U doit être le cercle et l'opérateur D définit la métrique et vous trouvez que le cercle correspondant a une longueur de 2π . Et bien sûr, vous trouvez cette géométrie de la bonne manière. De même nous avons commencé en fait il y a de nombreuses années avec Gianni Landi à faire la géométrie de la 2-sphère d'une manière similaire, en combinant des matrices 2×2 avec des projections.

Feynman Slash

We let $Y \in \mathcal{A} \otimes C_\kappa$ be of the Feynman slashed form $Y = Y^A \Gamma_A$, and fulfill the equations

$$Y^2 = \kappa, \quad Y^* = \kappa Y \quad (1)$$

Here $\kappa = \pm 1$ and $C_\kappa \subset M_s(\mathbb{C})$, $s = 2^{n/2}$, is the Clifford algebra on $n + 1$ gamma matrices Γ_a , $0 \leq a \leq n$

$$\Gamma_A \in C_\kappa, \quad \{\Gamma^A, \Gamma^B\} = 2\kappa \delta^{AB}, \quad (\Gamma^A)^* = \kappa \Gamma^A$$

47

Donc, avec Chamseddine et Mukhanov, nous avons d'abord commencé par un slash de Feynman, nous avons noté cette équation supérieure de Heisenberg,

Higher Heisenberg equation

The one-sided higher analogue of the Heisenberg commutation relations is

$$\frac{1}{n!} \langle Y [D, Y] \dots [D, Y] \rangle = \sqrt{\kappa} \gamma \quad (n \text{ terms } [D, Y]) \quad (2)$$

where the notation $\langle T \rangle$ means the *normalized trace* of $T = T_{ij}$ with respect to the above matrix algebra $M_s(\mathbb{C})$ ($1/s$ times the sum of the s diagonal terms T_{ii}).

48

qui ressemble à l'équation du cercle, sauf que maintenant, le commutateur D commutateur Y est élevé à la puissance qui est la dimension de l'espace. Nous avons donc écrit cette équation et nous l'avons étudiée. Et l'une des premières choses que nous avons trouvées

Volume is quantized

For even n , equation (2), together with the hypothesis that the eigenvalues of D grow as in dimension n , imply that the volume, expressed as the leading term in the Weyl asymptotic formula for counting eigenvalues of the operator D , is "quantized" by being equal to the index pairing of the operator D with the K -theory class of \mathcal{A} defined by the projection $e = (1 + \sqrt{\kappa} Y)/2$.

49

est que cette équation, exactement comme dans le cas du cercle, elle nous donnait la longueur 2π , bon, cela quantifie le volume. Donc le volume qui est donné par la croissance des valeurs propres, ou si vous voulez, par les divergences logarithmiques de la trace de la bonne puissance, est quantifié. C'est donc la première chose.



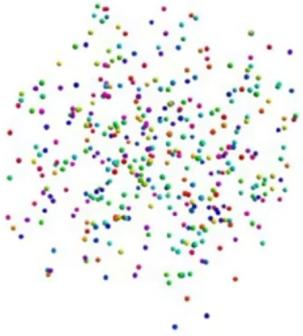
Theorem 1 : spheres

Let M be a spin Riemannian manifold of even dimension n and (A, \mathcal{H}, D) the associated spectral triple. Then a solution of the one-sided equation exists if and only if M breaks as the disjoint sum of spheres of unit volume. On each of these irreducible components the unit volume condition is the only constraint on the Riemannian metric which is otherwise arbitrary for each component.

50

Mais ensuite, nous avons été un peu déçus car ce que nous avons trouvé, c'est que lorsque vous avez une solution à cette équation, alors, automatiquement, la solution, la variété, se brisera comme une disjonction d'un certain nombre de sphères de volume unité. Et si vous travaillez en unités physiques, vous constatez que ce volume unité est le volume de Planck.





51

Donc, à ce stade, nous avons été assez déçus parce que nous nous disions “ok regarde. L'espace-temps, euclidien ou non, ça ne ressemble pas à ça : ce n'est pas une union de sphères, de très minuscules petites sphères. Mais nous avons oublié l'élément essentiel de la structure, qui est le J , qui est la conjugaison de charge, la structure réelle J .”



Two kinds of quanta

It would seem at this point that only disconnected geometries fit in this framework but this is ignoring an essential piece of structure of the NCG framework, which allows one to refine (2). It is the real structure J , an antilinear isometry in the Hilbert space \mathcal{H} which is the algebraic counterpart of charge conjugation.

52

Et quand vous incorporez la structure réelle J , ce que vous trouvez, c'est qu'elle vous oblige automatiquement à affiner l'équation supérieure de Heisenberg. Et à cause de ce problème, de la KO -dimension 6, et ainsi de suite, que trouvez-vous ? Vous constatez que vous êtes obligé d'affiner l'équation en impliquant le J

Two sided equation

This leads to refine the quantization condition by taking J into account as the two-sided equation

$$\frac{1}{n!} \langle Z [D, Z] \cdots [D, Z] \rangle = \gamma \quad Z = 2EJEJ^{-1} - 1, \quad (3)$$

where E is the spectral projection for $\{1, i\} \subset \mathbb{C}$ of the double slash $Y = Y_+ \oplus Y_- \in C^\infty(M, C_+ \oplus C_-)$. More explicitly $E = \frac{1}{2}(1 + Y_+) \oplus \frac{1}{2}(1 + iY_-)$.

53

et le J est maintenant incorporé en passant la projection venant de Y au commutant. L'équation devient cette équation. Maintenant, ce qui est vraiment sorti de nulle part, c'est que tout cela, ce que je suis en train de dire là, a été inspiré par le souhait d'essayer de présenter la géométrie de la manière la plus simple possible, en ayant cette sorte d'appariement entre le Dirac et ce que vous obtenez en assemblant les coordonnées dans un opérateur unique.

Geometry gives Standard Model !

It turns out that in dimension 4, i.e. for 5 gamma :

$$C_+ = M_2(\mathbb{H}), \quad C_- = M_4(\mathbb{C})$$

which give the algebraic constituents of the Standard Model exactly in the form of our previous work!!!!

54

Et maintenant nous avons regardé exactement quelles sont les algèbres de Clifford nécessaires pour obtenir cette équation, pour obtenir la solution de cette équation. Nous avons regardé le tableau des algèbres de Clifford, pour trouver, dans le cas de la dimension 4, donc quand vous prenez 5 matrices Gamma, alors vous trouvez cela pour écrire ceci, vous avez deux algèbres de Clifford qui apparaissent, de façon irréductible. Et la première vous donne en fait $M_2(\mathbb{H}) + M_2(\mathbb{H})$ mais parce que vous voulez prendre une partie irréductible, vous avez $M_2(\mathbb{H})$. Et la seconde est $M_4(\mathbb{C})$ ici et elles apparaissent toutes ensemble. Elles apparaissent si vous voulez comme somme de ces deux parties C_+ et C_- .

The two maps $Y_{\pm} : M \rightarrow S^n$

One now gets two maps $Y_{\pm} : M \rightarrow S^n$ while (3) becomes,

$$\det(e_{\mu}^n) = \Omega_+ + \Omega_-, \quad (4)$$

with Ω_{\pm} the Jacobian of Y_{\pm} (the pullback of the volume form of the sphere).

55

Donc en fait, à partir du problème purement géométrique, nous avons trouvé exactement l'algèbre qui était en quelque sorte mise à la main, vous savez, dans nos travaux précédents, selon une sorte d'histoire ascendante. C'était assez incroyable mais alors bien sûr, il fallait aller plus loin, et il fallait prouver que l'on pouvait obtenir toutes les variétés de spins possibles, de cette construction et non plus une union disjointe de sphères. Alors ce qui se passe, c'est qu'au lieu d'avoir une seule fonction de la variété M vers la sphère, et vous savez, parce que la sphère est simplement connectée dans les dimensions supérieures, vous ne pourriez pas empêcher M d'être elle-même une collection de sphères, mais maintenant vous avez deux fonctions

Theorem 2 : $n = 4$

(i) In any operator representation of the two sided equation (3) in which the spectrum of D grows as in dimension 4 the volume (the leading term of the Weyl asymptotic formula) is quantized.

(ii) Let M be a compact oriented spin Riemannian manifold of dimension 4. Then a solution of (4) exists if and only if the volume of M is quantized to belong to the invariant $q_M \subset \mathbb{Z}$.

56

Y_+ et Y_- vers la sphère, et la seule condition est que lorsque vous effectuez le pullback du volume de la forme de la sphère par plus et par moins, ce n'est pas qu'individuellement elles ne disparaissent pas, non, c'est que leur somme ne disparaît jamais. Leur somme doit définir une forme différentielle qui ne disparaît jamais, pas individuellement, ce qui bien sûr n'est pas possible, sauf si vous êtes une sphère.

Alors très vite, nous avons obtenu deux résultats : nous avons obtenu le fait que le volume était quantifié, j'y reviendrai brièvement ultérieurement, mais nous avons obtenu un fait beaucoup plus précis, qui est que si vous prenez une variété de spin riemannienne orientée compacte de dimension 4, alors une solution de cette équation existe si et seulement si le volume est quantifié pour appartenir à un certain invariant,

The invariant $q_M \subset \mathbb{Z}$

$D(M)$ set of pairs of smooth maps $\phi_{\pm} : M \rightarrow S^m$ such that the differential form

$$\phi_+^{\#}(\alpha) + \phi_-^{\#}(\alpha) = \omega$$

does not vanish anywhere on M (α is the volume form of sphere S^m).

$q_M := \{\text{deg}(\phi_+) + \text{deg}(\phi_-) \mid (\phi_+, \phi_-) \in D(M)\}$
 where $\text{deg}(\phi)$ is the topological degree of ϕ .

57

et cet invariant est simplement la somme des degrés de ces applications φ_+ et φ_- qui remplissent la condition que lorsque vous faites le pullback du volume, vous obtenez quelque chose qui ne disparaît pas. Maintenant, après beaucoup de travail, beaucoup de travail géométrique, qui utilisait l'existence de recouvrements ramifiés de la sphère et aussi toute la puissance de la théorie de l'immersion qui remonte à Smale, Milnor et Poenaru, en fait, il y a un théorème de Poenaru qui dit que si vous avez une variété orientée ouverte de dimension n , alors vous pouvez la plonger dans \mathbb{R}_n . Ensuite, nous avons pu prouver que, dans le cas de la dimension 4, pour toute variété de spins, cet invariant contiendra tous les entiers n plus grands que 4. Le cas des dimensions 2 et 3 est beaucoup plus facile par arguments généraux de transversalité mais le cas où $n = 4$ est beaucoup plus difficile.

Theorem

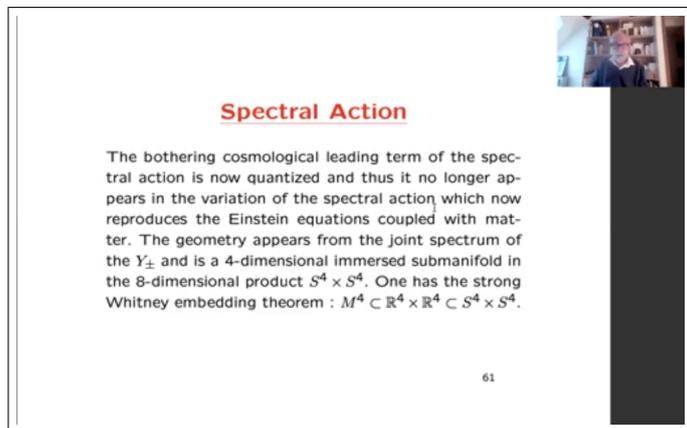
Let M be a smooth connected oriented compact spin 4-manifold. Then q_M contains all integers $m \geq 5$.

59

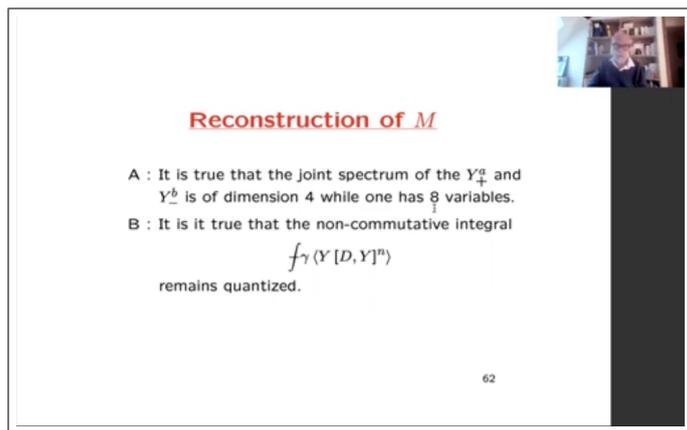
Ce qui se passe, c'est que maintenant vous pouvez obtenir n'importe quelle variété de spins de n'importe quel volume arbitraire. Si vous prenez une 4-variété compacte orientée lisse connexe, alors cet invariant contient tous les entiers plus grands que 5 et qu'est-ce que cela signifie ?

60

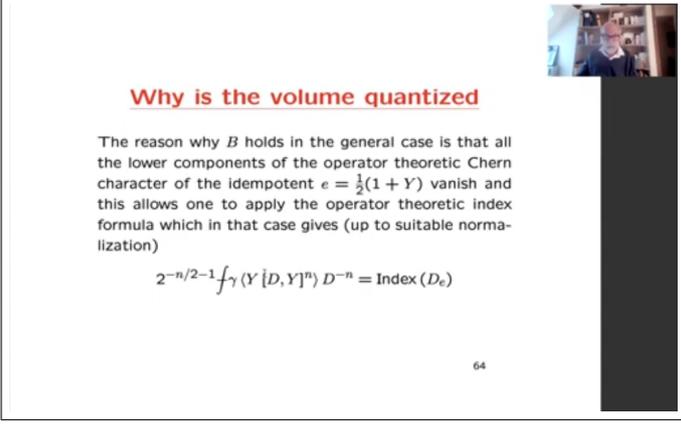
Cela signifie que vous pouvez en quelque sorte obtenir cette variété à partir de deux petites sphères de la taille de Planck mais que bien sûr, cette variété elle-même se développera en quelque sorte, et elle se développera à une taille arbitraire. C'est pourquoi nous avons intitulé l'article que nous avons écrit avec Ali Chamseddine et Mukhanov "Quanta de géométrie" parce que c'est vraiment ce qui se passe. Il y a des petits quanta qui s'imbriquent pour former cet énorme variété. Ce qui se passe aussi, c'est que,



maintenant parce que le volume est quantifié, quand vous notez l'action spectrale comme nous l'avons écrite avec Ali, comme je l'ai dit, dans l'action spectrale, ce que vous avez, c'est qu'il y a un terme cosmologique qui est énorme, et qui est assez dérangeant. Mais maintenant, parce que le volume est quantifié, ce terme cosmologique, qui est le terme principal de l'action spectrale, ne joue aucun rôle, lorsque vous écrivez l'équation variationnelle. Et donc, lorsque vous écrivez l'équation variationnelle, vous reproduisez vraiment l'action d'Einstein couplée à la matière. La géométrie est reconstruite comme un spectre conjoint, et c'est une sous-variété 4-dimensionnelle de ce produit 8-dimensionnel de deux très petites sphères,



et il y a des faits assez généraux qui sont essentiels pour effectuer cette reconstruction : il y a le fait que le spectre conjoint sera de dimension 4, cela repose sur un résultat profond de Dan Voiculescu, et aussi, cela repose sur le fait que le théorème de l'indice, vous dira que le volume restera quantifié.



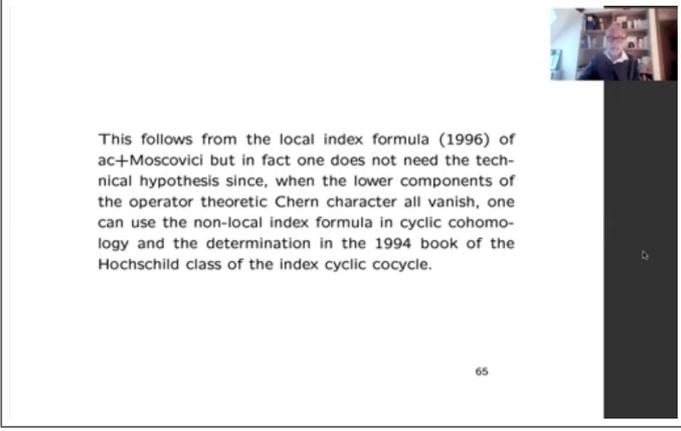
Why is the volume quantized

The reason why B holds in the general case is that all the lower components of the operator theoretic Chern character of the idempotent $e = \frac{1}{2}(1 + Y)$ vanish and this allows one to apply the operator theoretic index formula which in that case gives (up to suitable normalization)

$$2^{-n/2-1} \int_Y \langle [D, Y]^n \rangle D^{-n} = \text{Index}(D_e)$$

64

Le fait que le volume reste quantifié découle du fait que vous disposez de la condition supérieure de Heisenberg qui vous donne que ces quantités seront égales à gamma, donc gamma au carré vaut 1, donc elles s'annulent. Mais c'est aussi un indice. Donc, la raison pour laquelle il s'agit d'un indice repose sur un théorème d'indice que nous avons prouvé



This follows from the local index formula (1996) of ac+Moscovici but in fact one does not need the technical hypothesis since, when the lower components of the operator theoretic Chern character all vanish, one can use the non-local index formula in cyclic cohomology and the determination in the 1994 book of the Hochschild class of the index cyclic cocycle.

65

avec Henri Moscovici en 1996, mais en fait, on peut utiliser un résultat moins général, car il s'avère que les composants des caractères de Chern du Y disparaissent automatiquement, les composants les plus bas. Donc en fait, on n'a pas besoin, si vous voulez, en cohomologie cyclique, de comprendre pleinement l'indice, il suffit de comprendre la classe de Hochschild de l'indice. Bien sûr, ceci est très instrumental pour prouver ce résultat. Alors j'espère vous avoir convaincu... Alors je veux juste ajouter une chose, que certains physiciens écarteront, car à un moment donné, nous avons fait une erreur de prédiction, qui concernait la masse de Higgs, mais il y a une histoire très intéressante, qui est qu'avec Ali Chamseddine, nous avons rédigé un article de survol en 2010 dans lequel nous expliquions la théorie, et dans cet article, nous avons un champ scalaire, que nous ignorions en fait, lorsque nous avons fait les calculs du groupe de renormalisation. Ce champ scalaire fonctionnait comme des coefficients pour le neutrino et ainsi de suite, d'accord, cet article est publié en 2010, maintenant ce qui se passe, c'est qu'en 2012, Ali m'a écrit un e-mail et il m'a dit "tu sais, c'est incroyable parce qu'il y a trois groupes indépendants de physiciens qui ont montré que si vous ajoutez un champ scalaire au modèle standard, vous pouvez récupérer la stabilité du paramètre de diffusion de Higgs, la positivité du paramètre de diffusion de Higgs à l'unification, qui est exactement ce qui, si vous voulez, contredisait notre prédiction, le fait que ce n'était plus positif dans le modèle habituel. Je ne pouvais pas en croire mes yeux, je ne croyais pas Ali, et j'ai vérifié et tous les signes étaient corrects, notre champ scalaire était exactement le bon. Pour que cela puisse corriger la prédiction

et la rendre compatible avec la valeur réelle de la masse de Higgs. Notre modèle n'est donc pas du tout réfuté par ce qui a été trouvé comme masse.

Large Distances

Simple Question :

"Where are we ?"

Two mathematical problems :

- ▶ Can one specify a shape, a geometric space, by a list of invariants ?
- ▶ Can one specify in an invariant manner a point in a geometric space ?

66

Alors maintenant, permettez-moi de venir aux grandes distances.

Riemann a été très prudent dans son discours inaugural, pour distinguer les grandes distances des petites distances. Donc j'espère avoir fait le point pour ce qu'il en est des petites distances et maintenant, quand vous regardez les grandes distances, je veux expliquer que le point de vue spectral est là-aussi pertinent. Pour cela, je vais poser une question simple, qui est "Où sommes-nous ?". Je veux dire par là, comment pouvons-nous essayer de spécifier où est la Terre, si nous envoyons par exemple une sonde dans l'espace, comment pouvons-nous spécifier d'où provient cette sonde ?

The diagram consists of a central point from which many lines radiate outwards. Some lines end in small circles. To the right of the central point, there are two human figures standing side-by-side. At the top of the diagram, there are two circles, each containing the number '1'. At the bottom, there are several small circles and a curved line with an arrow pointing upwards.

Bien sûr, vous pouvez montrer le système solaire, avec notre planète, vous pouvez montrer à quoi nous ressemblons, mais il y a quelque chose qui est beaucoup plus proche de la réponse que je veux expliquer, et qui est cette image, quand vous avez toutes ces droites qui se regroupent toutes en un même point, et sur chacune d'elles, une fréquence est indiquée.

Large Distances

Simple Question :

"Where are we ?"

Two mathematical problems :

- ▶ Can one specify a shape, a geometric space, by a list of invariants ?
- ▶ Can one specify in an invariant manner a point in a geometric space ?

66

Or cela donne naissance à deux problèmes mathématiques, le premier est “peut-on spécifier une forme par une liste d’invariants ?” Donc, si vous essayez de spécifier l’univers ou n’importe quel espace, en donnant un graphique, un système de coordonnées, c’est ridicule, car si par exemple vous donnez quelles sont les coordonnées dans tel système, vous devez spécifier l’origine du système, la question est donc complètement circulaire. Donc ce que vous devez faire, c’est qu’il vous faut d’abord spécifier la forme, par invariants géométriques, par une liste d’invariants, et alors, “peut-on maintenant spécifier de manière invariante un point dans l’espace géométrique ?”. Donc ce sont deux problèmes mathématiques, et la réponse repose sur deux articles.

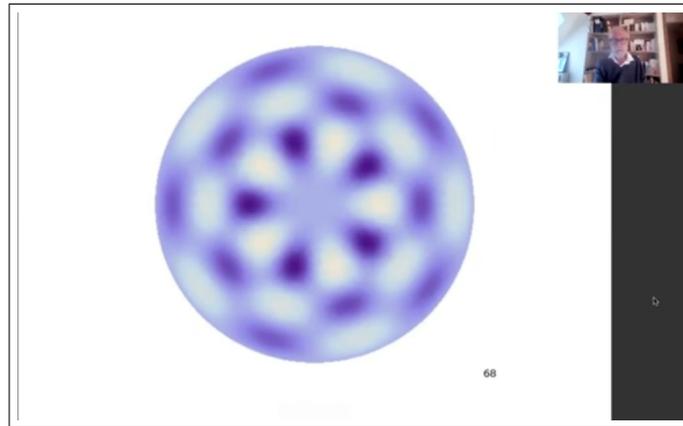
The music of shapes

Milnor, John (1964). "Eigenvalues of the Laplace operator on certain manifolds", *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* 51

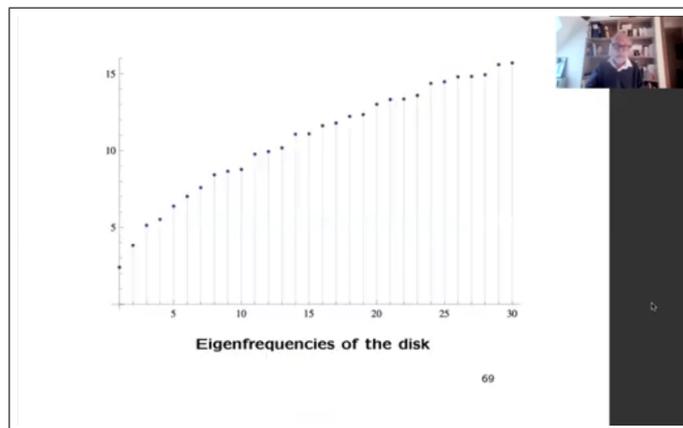
Kac, Mark (1966). "Can one hear the shape of a drum ?". *American Mathematical Monthly* 73 (4, part 2) : 1-23

67

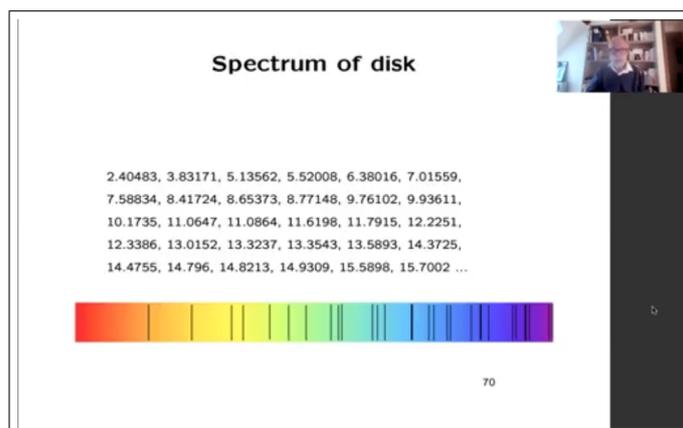
Il y a un article de Milnor en 1964 : il a montré que quand on a un espace, dont on prend le spectre, les valeurs propres de l’opérateur de Laplace ou de l’opérateur de Dirac, cela n’a pas d’importance pour cela, alors il s’avère que cela ne constitue pas un invariant complet de la géométrie. Il a exposé deux espaces en dimension 16, qui avaient les mêmes valeurs propres et la raison à cela repose juste sur des formes modulaires et des fonctions thêta. Et puis, il y a un autre article, qui est de Mark Kac en 1966 qui est “peut-on entendre la forme d’un tambour ?”.



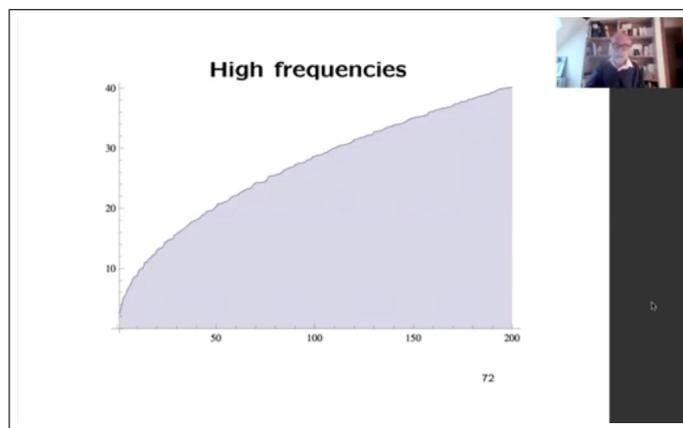
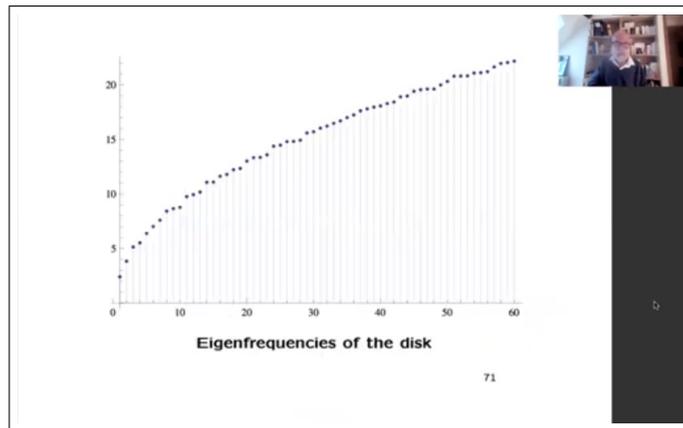
Donc, si vous prenez un tambour, il va vibrer, il aura de nombreuses formes de vibrations, qui dépendent du nombre de variations qu'il y a lorsque le disque est parcouru circulairement, et du nombre de vibrations qu'il y a lorsque le disque est parcouru du centre vers l'extérieur du tambour ; il a donc des séquences de valeurs propres.



elles grandissent,



elles sont calculables comme zéros des fonctions de Bessel, elles forment une sorte de spectre, et quand on regarde ce qu'elles valent pour des fréquences de plus en plus élevées, ces valeurs forment une parabole.



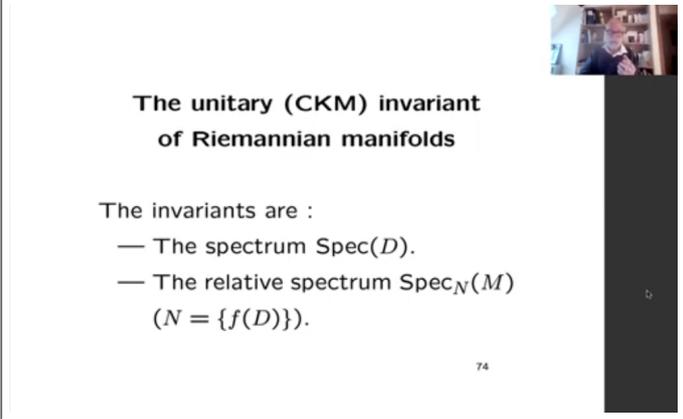
Et cette parabole indique que vous manipulez une forme de dimension 2. C'est le résultat d'Hermann Weyl qui sera assez instrumental plus tard.

It is well known since a famous one page paper of John Milnor that the spectrum of operators, such as the Laplacian, does not suffice to characterize a compact Riemannian space. But it turns out that the missing information is encoded by the relative position of two abelian algebras of operators in Hilbert space. Due to a theorem of von Neumann the algebra of multiplication by all measurable bounded functions acts in Hilbert space in a unique manner, independent of the geometry one starts with. Its relative position with respect to the other abelian algebra given by all functions of the Laplacian suffices to recover the full geometry, provided one knows the spectrum of the Laplacian. For some reason which has to do with the inverse problem, it is better to work with the Dirac operator.

73

Maintenant, la réponse que je veux expliquer est ce qui manque quand on n'a que le spectre, quand vous n'avez que ce qu'ils appelleront l'échelle si vous voulez, car si vous pouviez faire de la musique avec la forme, il y aurait une échelle qui vous serait imposée et qui serait constituée des fréquences très spécifiques que ça donne. Maintenant, il s'avère que les informations manquantes dont vous avez besoin, qui vous manquent pour reconstruire l'espace, la géométrie avec toutes ses propriétés, sont en fait données par la position relative de deux algèbres abéliennes d'opérateurs dans l'espace de Hilbert. Il y a bien sûr l'opérateur de Dirac, qui par son spectre est uniquement incorporable dans l'espace de Hilbert, mais il y en a un autre, et cela vient d'un théorème de von Neumann, car le résultat de von Neumann prouve que si vous prenez deux variétés de même dimension, il s'avère que... l'algèbre de von Neumann est multipliée par des fonctions, par des fonctions mesurables sur

les variétés... ces algèbres de fonctions sont isomorphes dans leur action... mais non seulement elles sont isomorphes comme algèbres mais elles sont aussi isomorphes par la manière dont elles agissent sur l'espace de Hilbert. Donc si vous voulez que la paire donnée par l'algèbre et l'espace de Hilbert soit unique, la paire qui est donnée par l'espace de Hilbert et l'opérateur de Dirac est donnée par le spectre, la seule chose qui vous manque est leur position relative. Et cette position relative me permet de définir



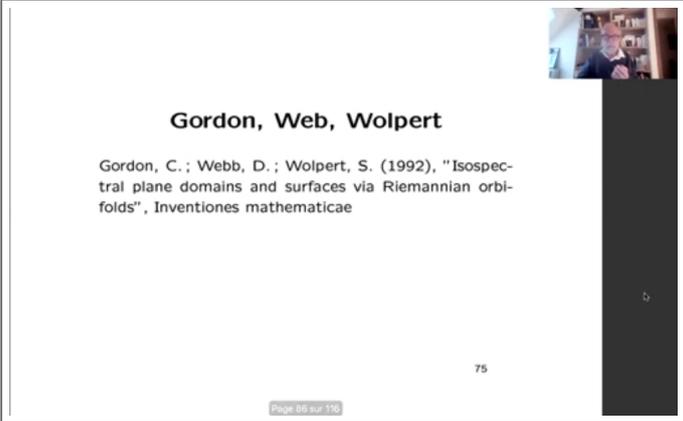
**The unitary (CKM) invariant
of Riemannian manifolds**

The invariants are :

- The spectrum $\text{Spec}(D)$.
- The relative spectrum $\text{Spec}_N(M)$
($N = \{f(D)\}$).

74

un invariant, qui est assez subtil à définir, mais que je peux illustrer très simplement sur un exemple, que j'ai appelé l'invariant CKM et la raison pour laquelle je l'ai appelé CKM, c'est parce que Cabibbo-Kobayashi-Maskawa utilisent un invariant similaire lorsqu'ils définissent leur... vous savez, cette chose qui était en fait une rupture du CP, vous savez, dans le modèle standard. Donc les invariants sont donnés non pas par le spectre de l'opérateur de Dirac, mais par quelque chose qui revient à donner les accords possibles, sur ce spectre.



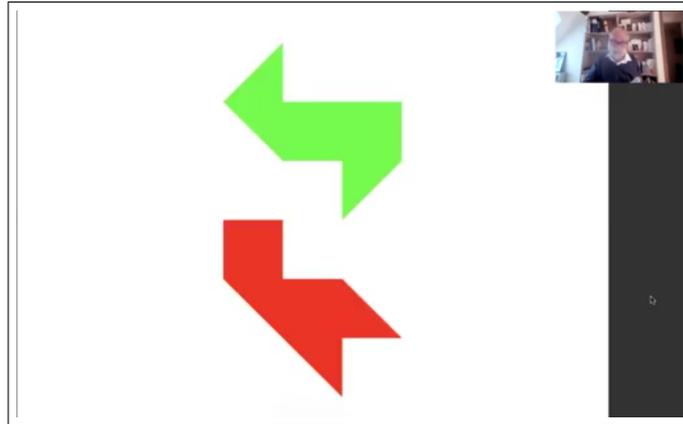
Gordon, Web, Wolpert

Gordon, C. ; Webb, D. ; Wolpert, S. (1992), "Isospectral plane domains and surfaces via Riemannian orbifolds", *Inventiones mathematicae*

75

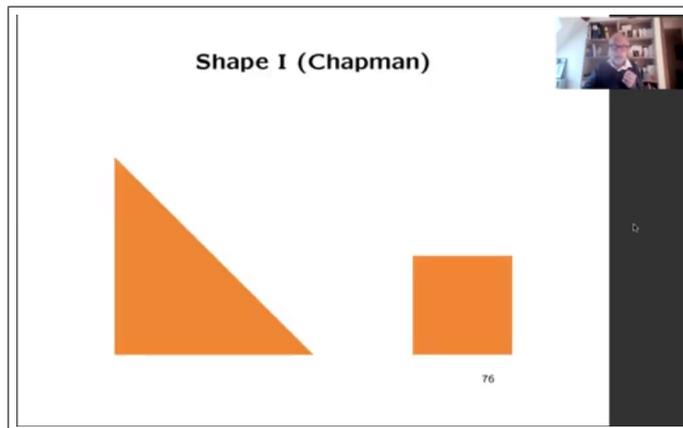
Page 66 sur 116

Et pour illustrer cela, je vais vous montrer cela sur un exemple très simple, bien sûr très naïf, de quoi s'agit-il ? Pour cela, je travaillerai en dimension 2, car grâce au travail de Gordon, Web et Wolpert par exemple, on a un bel exemple, de formes isospectrales, en dimension 2.

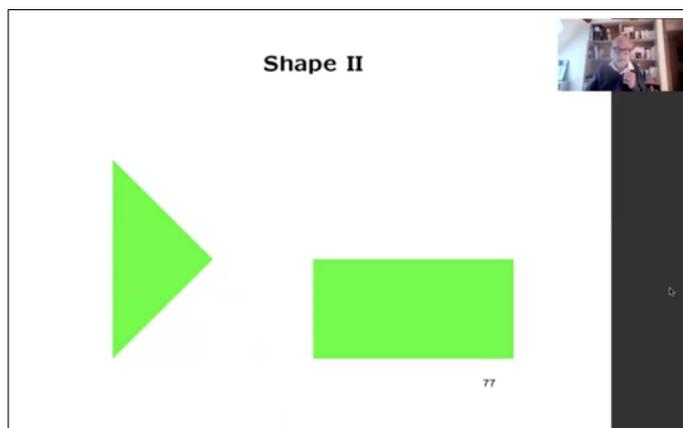


Donc ces deux formes par exemple, elles ont exactement le même spectre, et bien sûr, elles ne sont pas identiques, ici vous avez cette protubérance du petit carré, qui n'apparaît pas dans l'autre forme.

Il y a donc un autre exemple que je vais utiliser qui est dû à Chapman, et les deux formes que je vais utiliser ne sont pas connectées.



Donc la première forme est cette union, de ce triangle isocèle et de ce petit carré,



et la seconde forme est l'union de ce triangle isocèle avec ce petit rectangle, maintenant il s'avère que lorsque vous calculez, vous découvrirez que ces deux formes ont

Spectrum = $\{\sqrt{x} \mid x \in S\}$,

$$S = \left\{ \frac{5}{4}, 2, \frac{5}{2}, \frac{13}{4}, \frac{17}{4}, 5, 5, 5, \frac{25}{4}, \frac{13}{2}, \frac{29}{4}, 8, \frac{17}{2}, \frac{37}{4}, 10, 10, 10, \frac{41}{4}, \frac{45}{4}, \frac{25}{2}, \right.$$

$$13, 13, 13, \frac{53}{4}, \frac{29}{2}, \frac{61}{4}, \frac{65}{4}, \frac{65}{4}, 17, 17, 17, 18, \frac{73}{4}, \frac{37}{2}, 20, 20, 20, \left. \frac{41}{2}, \frac{85}{4}, \frac{85}{4}, \frac{89}{4}, \frac{45}{2}, \frac{97}{4}, 25, 25, 25, \frac{101}{4}, 26, 26, 26, \frac{53}{2}, \right.$$

$$\left. \frac{109}{4}, \frac{113}{4}, 29, 29, 29, \frac{117}{4}, \dots \right\}$$

exactement le même spectre. Chacune des deux formes³ est déconnectée, mais elles ont le même spectre. Le fait qu'elles soient déconnectées m'aidera à vous montrer ce qui se passe.

Ainsi, lorsque vous calculez le spectre, vous trouvez, lorsque vous écrivez les carrés des raies spectrales, que les valeurs propres sont de trois types, il existe trois types de nœuds dans l'échelle : il y a des nœuds qui sont fractionnaires de partie fractionnaire 1/4, il y a des nœuds qui ont 1/2 comme partie fractionnaire, et il y a des nœuds qui sont des entiers "pleins"⁴.

Same spectrum

$$\{a^2 + b^2 \mid a, b > 0\} \cup \{c^2/4 + d^2/4 \mid 0 < c < d\}$$

$$=$$

$$\{e^2/4 + f^2 \mid e, f > 0\} \cup \{g^2/2 + h^2/2 \mid 0 < g < h\}$$


79

Donc en fait, cela forme une sorte de gamme comme celle-ci, et de la même façon que sur un piano, vous avez les touches noires et les touches blanches, ici vous avez le bleu, le rouge et le jaune. Vous avez donc trois types de nœuds, les deux formes ont le même spectre, le spectre ressemble à ceci, il y a ces trois classes de nœuds,

Three classes of notes

One looks at the fractional part

$\frac{1}{4}$: $\{e^2/4 + f^2\}$ with $e, f > 0 = \{c^2/4 + d^2/4\}$ with $c + d$ odd.

$\frac{1}{2}$: The $c^2/4 + d^2/4$ with c, d odd and $g^2/2 + h^2/2$ with $g + h$ odd.

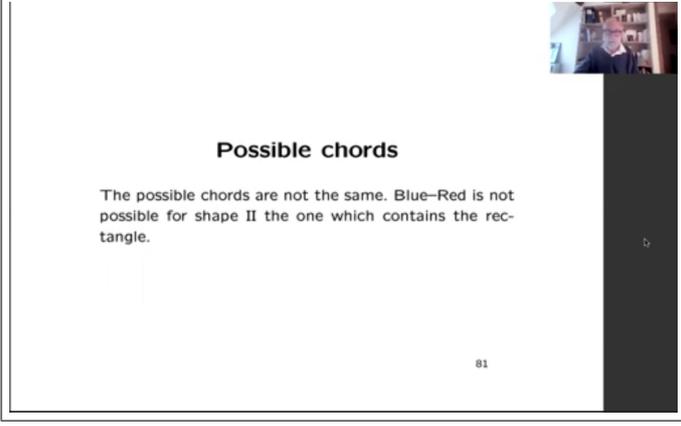
0 : $\{a^2 + b^2 \mid a, b > 0\} \cup \{4c^2/4 + 4d^2/4 \mid 0 < c < d\}$ et $\{4e^2/4 + f^2 \mid e, f > 0\} \cup \{g^2/2 + h^2/2 \mid 0 < g < h\}$ with $g + h$ even.

80

³constituées chacune de deux formes géométriques mais qui sont chacune agrégées en une seule forme en fait.

⁴sans partie fractionnaire.

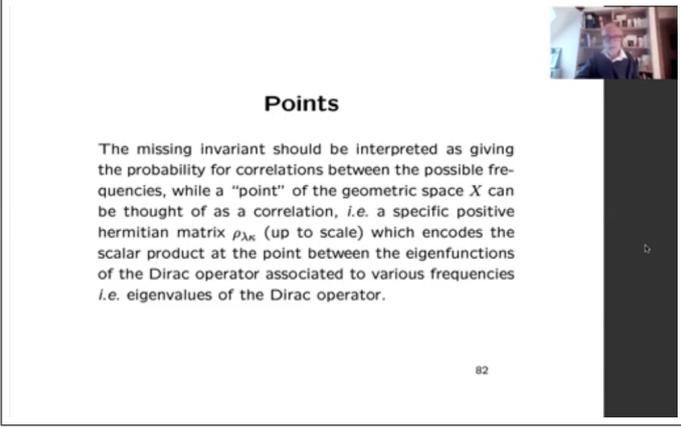
et maintenant, pourquoi les deux formes ne sont-elles pas les mêmes, alors qu'elles ont le même spectre ? Elles ne sont pas les mêmes parce que les accords possibles ne sont pas les mêmes sur les deux formes. Ce que vous découvrez, il faut réfléchir un peu, c'est que l'accord bleu-rouge n'est pas possible pour la forme II, celui qui contient le rectangle, mais que cet accord bleu-rouge est possible pour la forme numéro I. D'accord, vous devez définir ce que vous entendez par un accord, et ainsi de suite.



Possible chords

The possible chords are not the same. Blue-Red is not possible for shape II the one which contains the rectangle.

81

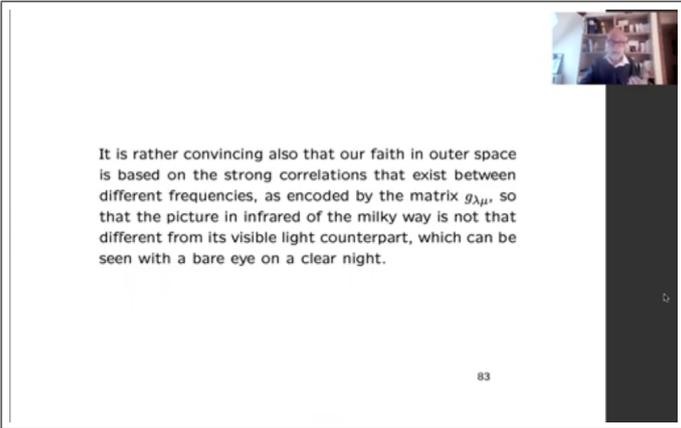


Points

The missing invariant should be interpreted as giving the probability for correlations between the possible frequencies, while a "point" of the geometric space X can be thought of as a correlation, *i.e.* a specific positive hermitian matrix $\rho_{\lambda\kappa}$ (up to scale) which encodes the scalar product at the point between the eigenfunctions of the Dirac operator associated to various frequencies *i.e.* eigenvalues of the Dirac operator.

82

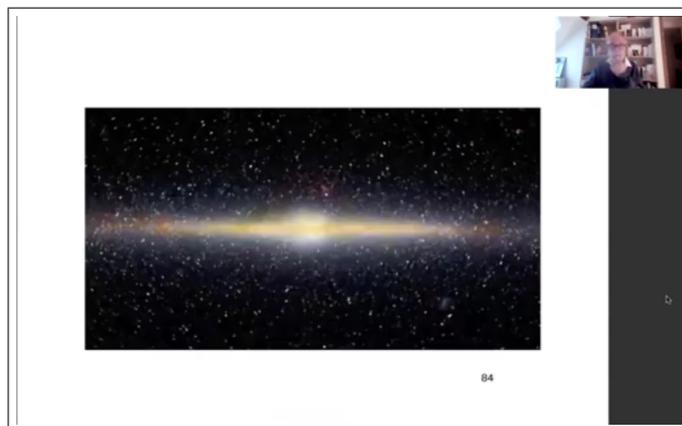
Mais ce que cela signifie en général, c'est que l'idée d'un point émerge également de ce type de réflexion. L'invariant est assez difficile, assez délicat à définir. Ce qui émerge aussi, c'est l'idée d'un point. L'idée est qu'un point dans un espace géométrique doit être considéré comme une corrélation. En fait, c'est donné là comme une mesure hermitienne spécifique, mais ce que ça code, c'est le produit scalaire en le point des fonctions propres de l'opérateur de Dirac, mais ce que ça code si vous voulez, c'est la corrélation entre diverses fréquences.



It is rather convincing also that our faith in outer space is based on the strong correlations that exist between different frequencies, as encoded by the matrix $g_{\lambda\mu}$, so that the picture in infrared of the milky way is not that different from its visible light counterpart, which can be seen with a bare eye on a clear night.

83

Et cela est très convaincant puisque notre foi en l'existence de l'espace extra-atmosphérique repose sur la corrélation qui existe entre différentes fréquences. Par exemple, quand on regarde la voie lactée, on peut la regarder en lumière visible, mais on peut aussi la regarder dans d'autres fréquences comme les rayons X, ou l'infrarouge, etc. Et il est crucial que toutes ces différentes images que nous obtenons à différentes fréquences soient effectivement corrélées les unes aux autres.



C'est donc ce que dit cet invariant supplémentaire. Maintenant pour faire une petite pause, quand je jouais avec ces différentes formes et avec leurs échelles, je me demandais "y en a-t-il une qui nous permettrait de faire de la musique comme on l'aime ?", comme les notes qu'on a sur un piano. Et bien sûr, vous devez en savoir un minimum du point de vue musical, qui est que l'oreille est sensible non pas aux ajouts, comme vous le feriez dans une progression arithmétique ⁵, pas du tout, l'oreille est sensible aux rapports de fréquences : si vous multipliez une fréquence par 2, c'est le passage à l'octave ; c'est comme quand vous jouez sur un piano, vous jouez un *la*, et maintenant si vous jouez le même *la* une octave plus haut, vous ne faites en fait que doubler la fréquence, et l'oreille y est très sensible. Maintenant, l'oreille est également sensible à la multiplication par 3,

Musical shape ?

The ear is sensitive to *ratios* of frequencies.

$$\frac{\log 3}{\log 2} \sim 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}}} = \frac{19}{12}$$

$2^{1/12} = 1.05946\dots, \quad 3^{1/19} = 1.05953\dots$

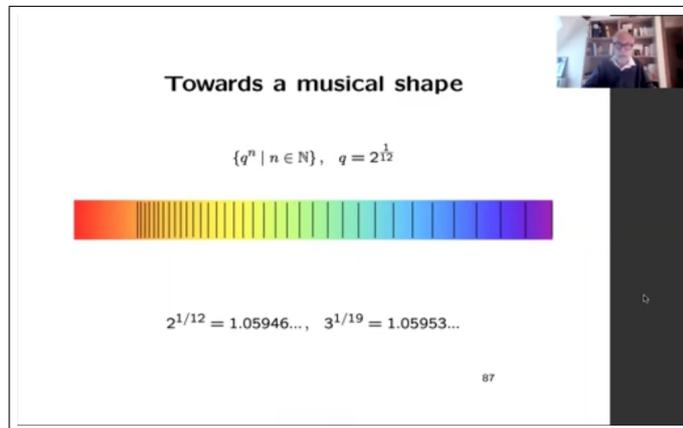
85

et un fait mathématique extrêmement utilisé en musique est le fait que lorsque vous regardez 2^{19} , c'est presque 3^{12} . Bien sûr, ils ne peuvent être égaux, car l'un est pair et l'autre est impair, mais ce que cela signifie, c'est que si vous prenez $\frac{\log 3}{\log 2}$, c'est un nombre très proche de $\frac{19}{12}$. En réalité 19 et 12 apparaissent dans le développement en fractions continues. Donc en fait, la racine douzième de 2 est très proche de la racine dix-neuvième de 3, et il s'avère que la bonne forme musicale est celle que vous pouvez voir sur une guitare. Vous voyez, quand vous regardez une guitare,

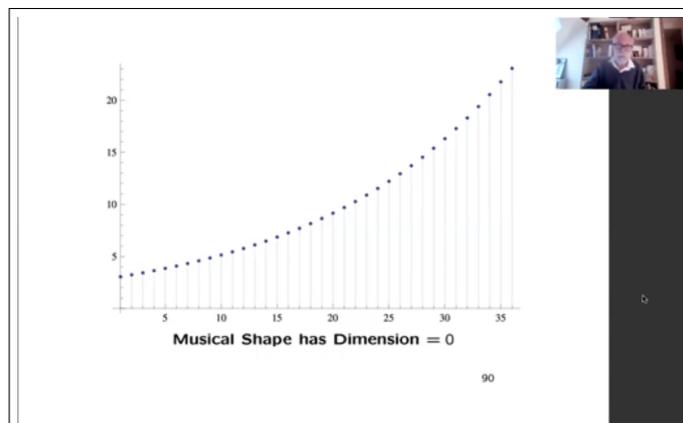
⁵+k, +k, etc.



vous découvrez que les frettes de la guitare sont comme ici, elles ne forment pas du tout une progression arithmétique, elles ne sont pas également espacées, non. Si vous réfléchissez un peu, vous devez réfléchir, et puis vous comparez, vous faites quelques calculs et ainsi de suite, vous trouvez que ces frettes sont exactement les puissances de ce nombre q qui vaut $2^{1/12}$.

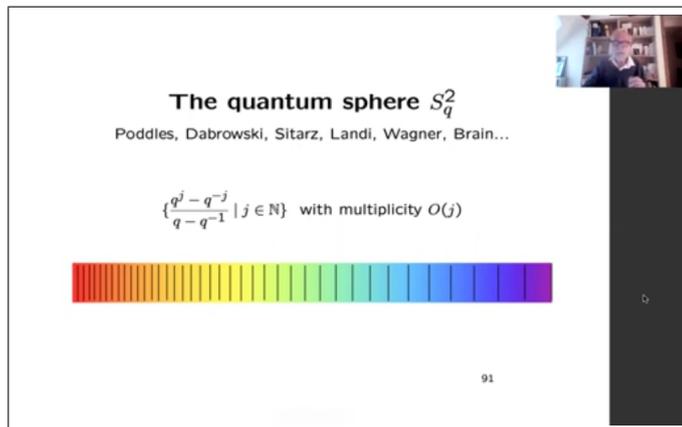


Et le spectre que nous regardons, cette forme musicale, ce qu'elle devrait être, c'est exactement ce qui se passe avec les frettes, à savoir que les raies devraient être les puissances de ce nombre. Maintenant, vous pouvez regarder les formes nous connaissons, auxquelles nous sommes habitués pour essayer de trouver ce spectre. Cela ne vous mène nulle part : si vous obtenez la sphère



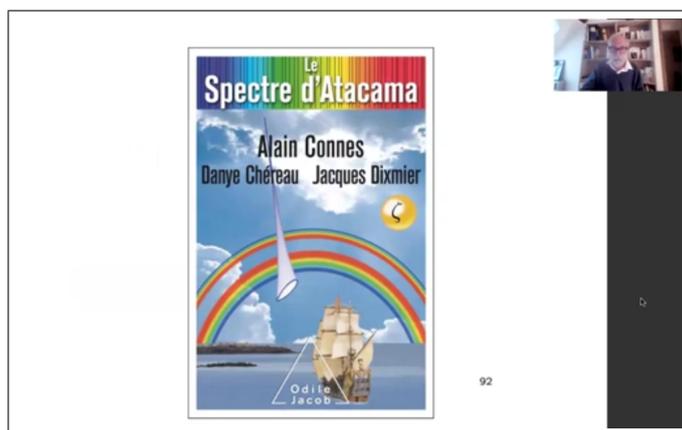
par exemple, la 2-sphère, bien sûr, vous savez, les hautes fréquences ressemblent à une parabole, mais cela ne vous mène nulle part, pourquoi ?

Cela ne nous mène nulle part car cette forme musicale... quand on regarde le spectre, les valeurs croissent rapidement de façon exponentielle, bien sûr, car c'est une série géométrique. Donc quand vous regardez sa dimension, je veux dire, en relation avec les idées précédentes que vous devez utiliser le théorème de Hermann Weyl et ainsi de suite, vous trouvez que la forme doit être de dimension 0. Être de dimension 0, cela signifie qu'il est en quelque sorte inutile de la chercher parmi les formes que nous connaissons. Mais étonnamment, cette forme existe dans le monde non-commutatif, et c'est la sphère quantique,

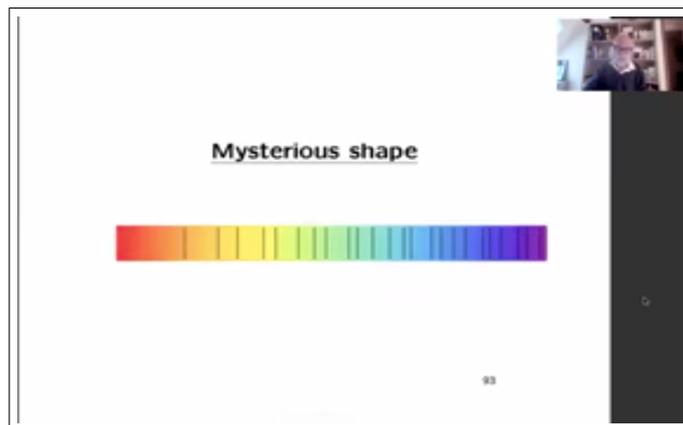


qui est une déformation de la sphère, et dont la beauté est due au fait que non seulement, elle a le spectre que nous aimerions avoir, mais aussi, elle a les symétries que nous aimerions avoir, à savoir que, comme une sphère a un groupe complet de symétries qui agissent sur elle de manière transitoire, la sphère quantique a un groupe quantique de symétries qui agissent sur elle de manière transitoire dans le sens approprié.

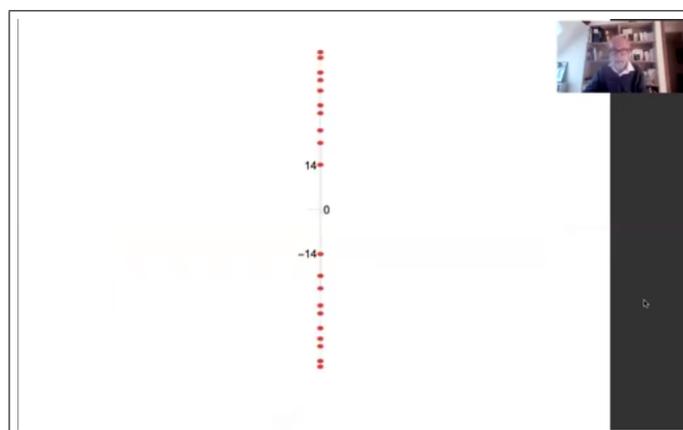
Permettez-moi maintenant d'aborder un sujet très important qui constituera la fin de mon exposé.



Il y a un livre que j'ai écrit avec mon épouse Danye Chéreau et avec Jacques Dixmier, qui est une sorte de Prélude à ce dernier sujet.



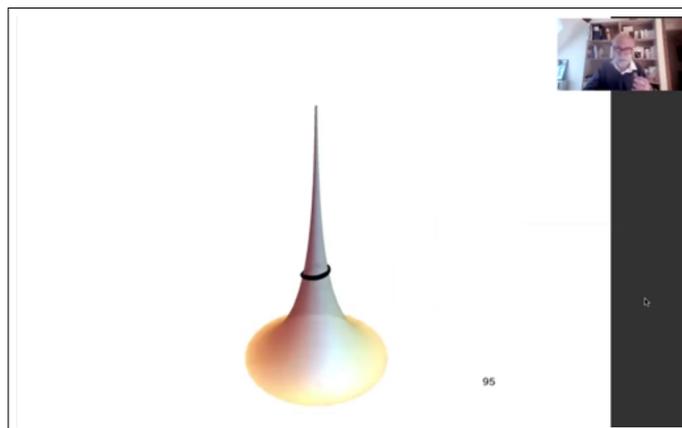
Donc ce dernier sujet concerne une forme mystérieuse, il y a une forme assez mystérieuse, dont je vous montre le spectre, et c'est ainsi qu'il apparaît,



quand vous le regardez pour la première fois, et qu'est-ce que c'est ? Eh bien, les gens qui connaissent un peu la théorie des nombres ont reconnu les zéros de la fonction zêta de Riemann. Maintenant, c'est une forme très mystérieuse, et il faut admettre que ça ressemble un peu à une sorte de spectre d'un opérateur de Dirac, cette remarque m'a été faite par Atiyah, et vous savez

A presentation slide with the following text: "A. Selberg constructed a surface whose spectrum involves primes due to a cusp, but there is a minus sign when compared to the explicit formulas of Riemann-Weil." The slide number "94" is in the bottom right corner. A small video feed of a speaker is visible in the top right corner.

Selberg a essayé de trouver, de construire une surface dont le spectre pourrait être tout à fait lié à cela. Il construit une surface qui, à cause d'une cuspidité, était liée aux nombres premiers, mais lorsque vous calculez plus avant pour la surface de Selberg, vous trouvez qu'il y a un signe moins qui apparaît, et lorsque vous comparez aux formules explicites de Riemann-Weil,



donc, ce genre de choses ne peut pas tout à fait fonctionner, et c'est le type de cuspide que Selberg obtenait et qui s'approchait assez près du spectre qui nous intéresse.

Maintenant, la raison pour laquelle je mentionne cela est que dans un travail très récent que nous avons fait le mois dernier avec Katia Consani, ce que nous avons trouvé, c'est une géométrie non-commutative, mais pour cette géométrie non-commutative, la géométrie est bien sûr donnée par un triplet spectral, mais l'algèbre du triplet est commutative.

Recent work with C. Consani
Spectral triple $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$

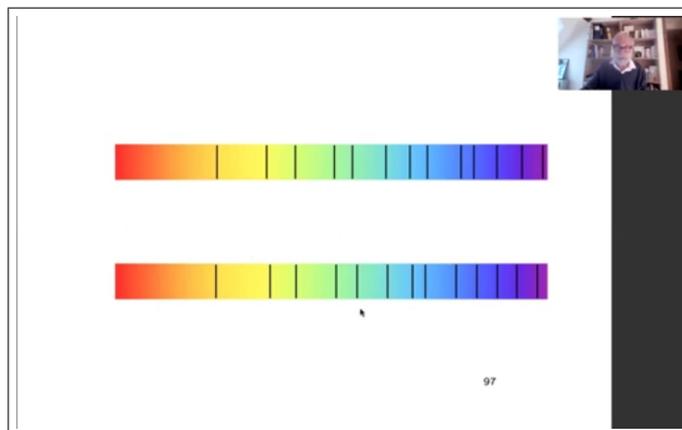
- ▶ \mathcal{A} algebra of even functions on $[-L/2, L/2] \sim [\Lambda^{-1}, \Lambda]$,
 $\Lambda = \exp L/2$.
- ▶ $\mathcal{H} = L^2([-L/2, L/2], dx) = L^2([\Lambda^{-1}, \Lambda], d^*\lambda)$
- ▶ $D = \rho \partial_x \rho = \rho \lambda \partial_\lambda \rho$

Weyl factor $\rho = 1 - P$, P finite rank projection associated to $\mathcal{E}(f)$, f even function, $\text{support}(f) \subset [-\Lambda, \Lambda]$ and $\text{support}(\hat{f}) \subset [-\Lambda, \Lambda]$ up to ϵ , with $\mathcal{E}(f)(\lambda) = \lambda^{1/2} \sum f(n\lambda)$.

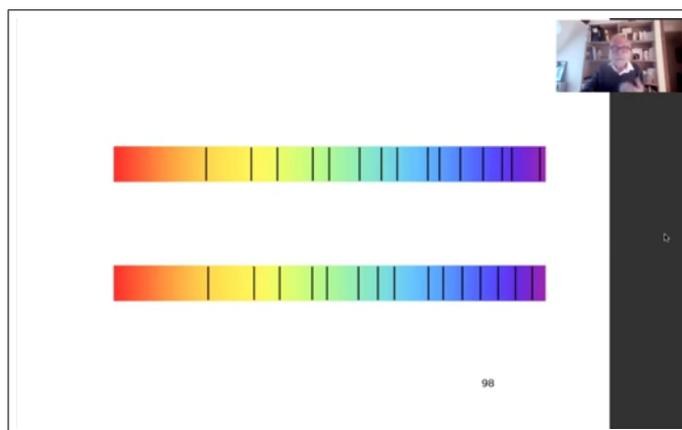
96

donc l'algèbre est juste l'algèbre des fonctions paires ordinaires sur l'intervalle $[-L/2, L/2]$, je pense il vaut mieux y penser de manière multiplicative ($[\Lambda^{-1}, \Lambda]$, c'est un peu mieux. Donc, vous le considérez comme des fonctions de longueur lambda vers lambda en utilisant l'exponentielle. D'accord. L'espace de Hilbert est également simple, c'est l'espace de Hilbert de toutes les fonctions L^2 , sur cet intervalle, à dx ou à mesure de Haar multiplicative $d^*\lambda$ quand on pense multiplicativement, et qu'en est-il de l'opérateur de Dirac ? L'opérateur de Dirac est une toute petite perturbation de l'opérateur de Dirac ordinaire. Et l'opérateur de Dirac ordinaire est donné par D par ∂_x ou par λD par ∂_λ lorsque vous travaillez avec l'exponentielle, et cette minuscule perturbation est provoquée par un facteur de Weyl : il s'avère en général que vous pouvez écrire l'opérateur de Dirac d'une métrique donnée vers l'opérateur de Dirac à partir de la nouvelle métrique obtenue en introduisant simplement un facteur de Weyl par la formule $\rho \partial_\rho$. C'est donc la formule que j'utilise ici, et le facteur de Weyl ne pourrait pas être plus simple, il est de la forme $1 - P$ où P est la projection de rang fini, qui est associée aux fonctions paires dont le support est compris entre $-\Lambda$ et Λ , maintenant je suis dans le cadre multiplicatif, et dont le support de la transformée de Fourier est aussi dans $[-\Lambda, \Lambda]$. Il faut donc être très prudent, je veux dire, c'est en général impossible, mais c'est possible à ϵ près

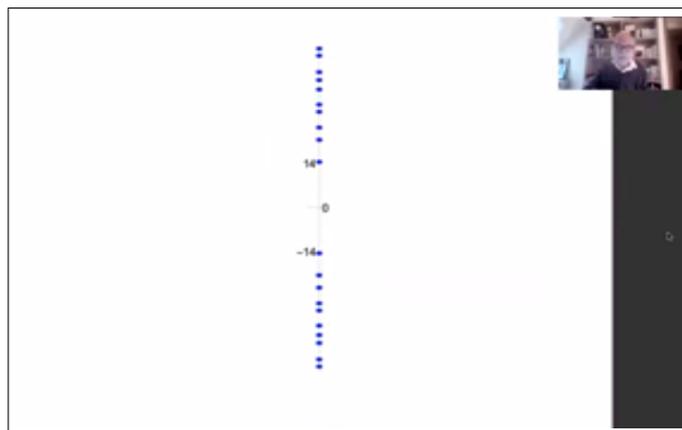
et cela conduit à des fonctions sphéroïdales prolates. D'accord. Donc ce que nous avons fait avec Katia, nous avons défini ce triple spectral, il dépend de la longueur de l'intervalle, et nous avons pu calculer le spectre correspondant de l'opérateur de Dirac, uniquement dans des cas très simples car les formules des fonctions sphéroïdales prolates sont assez compliquées. Nous l'avons donc calculé pour de petites valeurs de L et à notre grand étonnement, vous savez,



je veux dire, cette chose est le spectre des zéros de zêta, et ça, c'est le spectre que nous avons trouvé, dans le premier exemple, et dans le deuxième exemple, nous avons eu une coïncidence encore meilleure entre les deux. Nous explorons donc maintenant cette coïncidence, en essayant de comprendre dans quel sens, dans quelles limites



les deux spectres coïncident, et ce n'est que la pointe émergée de l'iceberg dans un énorme programme que nous poursuivons avec Katia Consani sur la fonction zêta de Riemann et qui bien sûr, je veux dire, a de nombreux liens avec la géométrie non-commutative mais enfin, il a une connexion avec le point de vue spectral. Il a également de nombreuses connexions avec d'autres pans de la géométrie non-commutative, en fait, à la partie concernant les espaces singuliers, comme les espaces de classes d'adèles, et aussi à la théorie des topos de Grothendieck, et etc. et ainsi de suite.



C'est donc le spectre que nous avons obtenu qui est si similaire, le spectre de notre opérateur de Dirac, donc qui est semblable au spectre des zéros de zêta,

Two recent developments

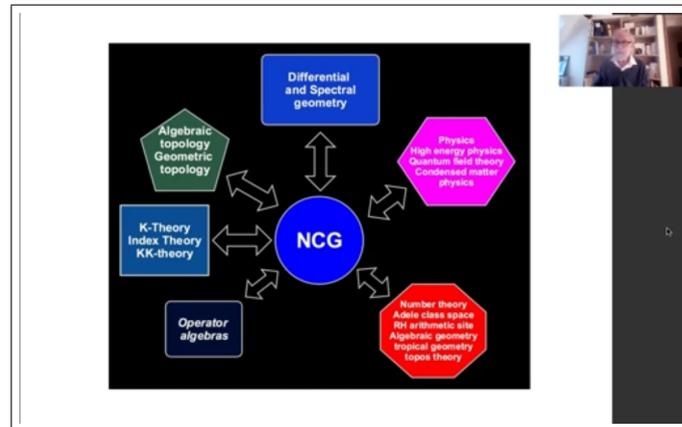
- ▶ Spectral action = Entropy of second quantized fermions (with Chamseddine and Suijlekom)
- ▶ Interplay of curvature with modular theory. Zeta function $\text{Tr}(D^{-2s})$, modular automorphism, finite difference equations.

99

et je voudrais terminer mon intervention en mentionnant deux développements récents très actifs. Il existe un développement que j'aime beaucoup et qui est que lorsque nous avons développé l'action spectrale, avec Chamseddine, l'action spectrale dépend d'une fonction, elle dépend très peu de cette fonction parce que vous en donnez juste le développement asymptotique mais nous n'avons aucun moyen de choisir la fonction. Maintenant, avec Ali Chamseddine et Walter van Suijlekom, nous avons montré qu'en fait, le spectre de l'action est égal à l'entropie des seconds fermions quantifiés, mais pour une fonction test très très spécifique, qui est liée à la fonction zêta de Riemann. Et l'autre développement, que je n'ai pas trop le temps de mentionner, est l'interaction de la courbure, qui est généralement une courbure riemannienne, une extension de la courbure riemannienne au cas non-commutatif : il y a un jeu fantastique entre cette courbure et la théorie modulaire, avec les opérateurs modulaires, dont j'ai parlé par rapport à l'évolution du temps.

Donc cette théorie est étonnante dans le sens où il faut calculer le développement asymptotique, et en ce qui me concerne, vous savez, j'ai commencé à travailler là-dessus avec Paula Tretkoff, Paula Cohen à la fin des années 1980, et cela a été révisé plus récemment pour prouver le théorème de Gauss-Bonnet dans le paradigme non-commutatif, ce théorème de Gauss-Bonnet a été prouvé dans un cas, mais a ensuite été prouvé par Masoud Khalkhali et ses collaborateurs dans le cas général, et ce travail, en ce qui me concerne, a vraiment acquis une substance incroyable dans ma collaboration avec Henri Moscovici. Et ce que nous avons constaté en particulier, c'est que les formules remplissaient certaines équations différentielles qui permettaient de calculer les fonctions

de plusieurs variables qui se produisaient dans l'interaction de la courbure avec la théorie modulaire et ces choses peuvent être codées sur ordinateur et peuvent être vérifiées, nous avons été absolument étonnés car la théorie prédisait certaines relations très compliquées qui ont été effectivement vérifiées par les tests et un cas plus élevé de ceci a été fait dans mon collaboration avec Farzad Fathizadeh, lorsque nous avons calculé les termes du a_4 dans le développement asymptotique.



Je terminerai par un diagramme qui montre les relations entre la géométrie non-commutative et d'autres branches des mathématiques. Donc je veux dire que la géométrie non-commutative s'adapte énormément, elle est en relation avec la physique, la physique des hautes énergies comme je l'ai expliqué, elle est en relation avec la théorie des nombres, avec l'espace sous-jacent aux classes d'adèles et etc., elle est liée aux algèbres d'opérateurs bien sûr, dès ses tout premiers commencements, avec la K -théorie, la théorie des indices ainsi qu'avec la fantastique KK -théorie de Kasparov qui est l'un des outils-clés, avec bien sûr la topologie algébrique, la théorie des groupes géométriques et etc., et aussi avec la géométrie différentielle, car dans tous ces cas, il y a un retour de l'une à l'autre : par exemple en géométrie différentielle, ce que Skandalis et ses collaborateurs ont montré, c'est à quel point elle est pertinente, pas seulement pour étudier les variétés mais également pour étudier les groupoïdes lisses et pour étudier les groupoïdes lisses, vous avez besoin de la géométrie non-commutative.

Alors bien, je pense que je vais finir ici, et je vous remercie pour votre patience. Merci beaucoup.