Sur la distribution des zéros de la fonction de Riemann $\xi(t)$.

H. v. Mangoldt à Dantzig.

B. Riemann dans son traité "Sur le nombre de nombres premiers inférieurs à un nombre donné" [1] affirmait sans preuve que la fonction désignée ici par $\xi(t)$ a une infinité de zéros et que le nombre de ces zéros dont les parties réelles sont comprises entre 0 et un grand nombre positif T sont comptés, approximativement par l'expression[2]

$$\frac{T}{2\pi} l \frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi}$$

Dans un travail antérieur [3] , j'ai montré que l'écart entre cette approximation et le nombre à représenter reste plus faible, dans l'absolu, pour $T > 12$, que

$$0,34(lT)^2 + 1,35\, lT + 2,58.$$

On montrera ci-après que, dans l'hypothèse où $T > 28,558$, une limite encore plus basse peut être spécifiée pour la valeur absolue de la différence mentionnée, qui n'augmente que jusqu'à l'ordre de grandeur de $0,43200\, lT + 1,91662\, l\, lT + 13,07873$.

1.

Après avoir arbitrairement supposé une constante positive a, supérieure à $\frac{1}{2}$, imaginez (Fig. 1) dans le plan de la variable complexe t, d'une part, passant par le point $(-ia)$, un axe parallèle à l'axe réel, et d'autre part, passant par le point T une parallèle à l'axe imaginaire. On choisit la valeur T de telle manière que sur cette dernière parallèle, il n'y ait aucun zéro de la fonction $\xi(t)$.

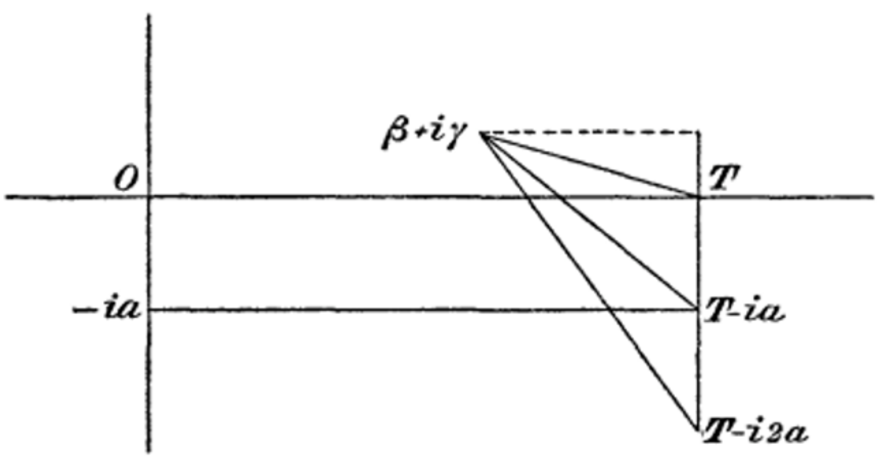

Fig. 1.

Traduction en français : Denise Vella-Chemla, non germaniste, avec Google traduction, avril 2024.

[1] Riemann, Rapports mensuels de l'Académie de Berlin 1859, p. 671, Œuvres mathématiques rassemblées, Leipzig, 1ère édition, 1876, page 136 ; 2ème édition, 1892, page 145.

[2] Les deux symboles la désigne ici, comme partout ailleurs ci-dessous, le logarithme népérien de a.

[3] H. v. Mangoldt, Journal (pour la justesse et l'actualité des) Math. 114, 1895, p . 266.

Si N désigne alors le nombre de zéros de la fonction $\xi(t)$ dont les parties réelles sont comprises entre 0 et T, chacune comptée autant de fois que son nombre ordinal, alors leur produit est égal à $2\pi N$; il s'ensuit, d'après les propriétés connues de la fonction $\xi(t)$, que ce nombre est égal à deux fois l'augmentation que connaît le coefficient de i dans l'expression $l\xi(t)$ si t progresse continûment sur les deux distances l'une après l'autre

$$-ia \;\ldots\; T-ia \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad T-ia \;\ldots\; T$$

La valeur réelle de $l\xi(t)$ pour $t=-ia$ peut être supposée comme étant la valeur initiale de $l\xi(t)$ et à partir de là, les valeurs possibles restantes de $l\xi(t)$ peuvent ensuite être dérivées par prolongement continu.

Pour le premier des deux chemins mentionnés, il n'y a aucune difficulté à calculer l'incrément correspondant $\Phi_1(a,T)$ du coefficient de i dans l'expression $l\xi(t)$. De la formule qui, selon Riemann, relie les fonctions $\xi(t)$ et $\zeta(s)$ il résulte

$$\xi(T-ia)=\Pi\left(\frac{1}{4}+\frac{a}{2}+i\frac{T}{2}\right)\left(a-\frac{1}{2}+iT\right)\pi^{-\frac{1}{4}-\frac{a}{2}-i\frac{T}{2}}\zeta\left(\frac{1}{2}+a+iT\right). \tag{1}$$

Imaginons maintenant une variable réelle τ qui parcourt ce chemin, et faisons augmenter τ constamment sur l'intervalle $0\ldots T$. On obtient des formules

$$l\xi(T-ia)\;; \qquad l\Pi\left(\frac{1}{4}+\frac{a}{2}+i\frac{T}{2}\right)\;; \qquad l\zeta\left(\frac{1}{2}+a+iT\right)$$

ces valeurs des logarithmes pour la variable τ

$$l\xi(\tau-ia)\;; \qquad l\Pi\left(\frac{1}{4}+\frac{a}{2}+i\frac{\tau}{2}\right)\;; \qquad l\zeta\left(\frac{1}{2}+a+i\tau\right),$$

qui découlent des valeurs réelles des logarithmes

$$l\xi(-ia)\;; \qquad l\Pi\left(\frac{1}{4}+\frac{a}{2}\right)\;; \qquad l\zeta\left(\frac{1}{2}+a\right)$$

par prolongement continu pour $\tau=T$. Pour tous les autres logarithmes, les valeurs principales peuvent être prises.

Il résulte alors de (1)

$$l\xi(T-ia)=l\Pi\left(\frac{1}{4}+\frac{a}{2}+i\frac{T}{2}\right)+l\left(a-\frac{1}{2}+iT\right)-\left(\frac{1}{4}+\frac{a}{2}+i\frac{T}{2}\right)l\pi+l\zeta\left(\frac{1}{2}+a+iT\right). \tag{2}$$

Maintenant selon T. J. Stieltjes[4]

$$\begin{aligned}
l\Pi\left(\frac{1}{4}+\frac{a}{2}+i\frac{T}{2}\right) &= l\left(\frac{1}{4}+\frac{a}{2}+i\frac{T}{2}\right)+l\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{a}{2}+i\frac{T}{2}\right)\\
&=\left(\frac{3}{4}+\frac{a}{2}+i\frac{T}{2}\right)l\left(\frac{1}{4}+\frac{a}{2}+i\frac{T}{2}\right)-\left(\frac{1}{4}+\frac{a}{2}+i\frac{T}{2}\right)+\frac{1}{2}l\left(2\pi\right)+J\left(\frac{1}{4}+\frac{a}{2}+i\frac{T}{2}\right),
\end{aligned}$$

[4]T.-J. Stieltjes, Journal de Mathématiques pures et appliquées (4) 5, 1889, S. 431, Formule (20).

où $J\left(\frac{1}{4}+\frac{a}{2}+i\frac{T}{2}\right)$ est un complément dont la valeur absolue peut être estimée avec suffisamment de précision et se rapproche de la valeur limite 0 à mesure que T augmente.

En introduisant cette expression pour $l\Pi\left(\frac{1}{4}+\frac{a}{2}+i\frac{T}{2}\right)$ dans l'équation (2), on déduit

$$\begin{aligned}(3)\qquad l\xi(T-ia) = {} & \left(\frac{3}{4}+\frac{a}{2}+i\frac{T}{2}\right) l\left(\frac{1}{4}+\frac{a}{2}+i\frac{T}{2}\right) - \left(\frac{1}{4}+\frac{a}{2}+i\frac{T}{2}\right)(1+l\pi) \\ & + l\left(a-\frac{1}{2}+iT\right) \\ & + \frac{1}{2} l\,(2\pi) + l\zeta\left(\frac{1}{2}+a+iT\right) + J\left(\frac{1}{4}+\frac{a}{2}+i\frac{T}{2}\right)\end{aligned}$$

Grâce aux déterminations qui ont été faites pour expliquer clairement les logarithmes qui interviennent, l'incrément $\Phi_1(a,T)$ mentionné ci-dessus, dont il s'agit pour le calcul, n'est rien d'autre que le coefficient de i, si l'on décompose le côté droit de l'équation ci-dessus en ses parties réelle et imaginaire. Mais on a

$$\begin{aligned} l\left(\frac{1}{4}+\frac{a}{2}+i\frac{T}{2}\right) & = l\left(\frac{T}{2}-i\frac{1+2a}{4}\right) + li \\ & = l\frac{T}{2} + l\left(1-i\frac{1+2a}{2\,T}\right) + i\frac{\pi}{2} \\ & = l\frac{T}{2} + \frac{1}{2} l\left[1+\left(\frac{1+2a}{2T}\right)^2\right] + i\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{1+2a}{2T}\right), \end{aligned}$$

où pour le signe, arctg des angles compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, l'arc le plus petit doit être pris. De là, on obtient des nombres réels compris entre 0 et 1 pour ϑ_1 et ϑ_2

$$l\left(\frac{1}{4}+\frac{a}{2}+i\frac{T}{2}\right) = l\frac{T}{2} + \frac{\vartheta_1}{2}\left(\frac{1+2a}{2T}\right)^2 + i\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta_2\frac{1+2a}{2T}\right).$$

Les valeurs ne sont pas requises pour ce qui suit, on a identiquement

$$\begin{aligned} l\left(a-\frac{1}{2}+iT\right) & = l\left(T-i\frac{2a-1}{2}\right) + li \\ & = lT + l\left(1-i\frac{2a-1}{2\,T}\right) + i\frac{\pi}{2} \\ & = lT + \frac{1}{2} l\left[1+\left(\frac{2a-1}{2T}\right)^2\right] + i\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta_3\frac{2a-1}{2\,T}\right) \qquad (0<\vartheta_3<1). \end{aligned}$$

Enfin, si R est la valeur absolue et θ désigne l'écart séparant du nombre complexe, on a, selon T. J, Stieltjes [5] $\left(\frac{1}{4}+\frac{a}{2}+i\frac{T}{2}\right)$

$$\left|J\left(\frac{1}{4}+\frac{a}{2}+i\frac{T}{2}\right)\right| < \frac{1}{12\ R\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^2}.$$

Mais maintenant, dans le cas présent

$$R > \frac{T}{2} \qquad \text{et} \qquad \theta < \frac{\pi}{2}$$

et

$$\cos\frac{\theta}{2} > \frac{1}{\sqrt{2}}$$

par conséquent

$$\left|J\left(\frac{1}{4}+\frac{a}{2}+i\frac{T}{2}\right)\right| < \frac{1}{3T}$$

Compte tenu de ces résultats, on obtient de l'équation (3) en comparant les partie réelle et imaginaire et si l'on utilise le coefficient de i dans l'expression $l\zeta\left(\frac{1}{2}+a+iT\right)$ le nombre

$$Z(a,T)$$

si η signifie un nombre réel compris entre -1 et $+1$

$$\Phi_1(a,T) = \frac{T}{2}l\frac{T}{2} - \frac{T}{2}(1+l\pi) + \left(\frac{7}{4}+\frac{a}{2}\right)\frac{\pi}{2} + Z(a,T)$$
$$+\frac{\eta}{3T} + \left\{\vartheta_1\frac{(1+2a)^2}{16} - \vartheta_2\left(\frac{3}{4}+\frac{a}{2}\right)\frac{1+2a}{2} - \vartheta_3\frac{2a-1}{2}\right\}\frac{1}{T},$$

et après avoir combiné les termes initiaux et combiné les deux corrections négatives en une seule

$$\text{(4)} \qquad \Phi_1(a,T) = \frac{T}{2}l\frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2} + \left(\frac{7}{4}+\frac{a}{2}\right)\frac{\pi}{2} + Z(a,T)$$
$$+\frac{\eta}{3T} + \left\{\vartheta_1\frac{(1+2a)^2}{16} - \vartheta\frac{4a^2+16a-1}{8}\right\}\frac{1}{T} \qquad \begin{pmatrix}-1<n<1\\ 0<\vartheta_1<1\\ 0<\vartheta<1\end{pmatrix}$$

2.

[5] T.-J. Stieltjes, a. a. O. S. 433, Formel (26).

Il est plus difficile d'estimer l'augmentation Φ_2, que subit l'écart à $\xi(t)$, lorsque t passe par le chemin qui va du point $(T - ia)$ au point T. L'objectif est atteint en comparant cette augmentation à l'augmentation Φ_3 dont l'écart à $\xi(t)$ augmente si t est sur la droite reliant le point $(T - i2a)$ au point $(T - ia)$, et Φ_2 selon l'équation

$$\Phi_2 = \Phi_3 + (\Phi_2 - \Phi_3)$$

qui distingue deux composantes dans Φ_2.

Pour trouver la première de ces composantes, il suffit de remplacer dans l'équation (4) la constante a par la constante $2a$ et de soustraire la nouvelle valeur résultante de Φ_1 de la valeur originale. Ainsi, si on combine toujours les corrections d'un même signe en une seule, on obtient,

$$\begin{aligned}\Phi_3 = -a\frac{\pi}{4} + Z(a,T) - Z(2a,T) \\ + \eta\frac{2}{3T} + \left\{\vartheta\frac{36\ a^2 + 68\ a - 1}{16} - \vartheta'\frac{24a^2 + 40\ a - 1}{16}\right\}\frac{1}{T} \qquad (5)\end{aligned}$$

$$(0 < \vartheta < 1; 0 < \vartheta' < 1)$$

Les considérations suivantes sont utilisées pour estimer la différence $(\Phi_2 - \Phi_3)$: imaginons la fonction $\xi(t)$ représentée comme le produit de ses facteurs linéaires de telle sorte que deux facteurs linéaires $(1 - \frac{t}{\alpha})$ et $(1 + \frac{t}{\alpha})$ qui ont deux points zéro opposés égaux α et $(-\alpha)$ se correspondant, peuvent se succéder directement, ou ne sont séparés l'un de l'autre que par un nombre de places qui reste inférieur à une limite fixée. Laissons maintenant la variable t augmenter[6] alors les changements que subissent ici les écarts des facteurs linéaires individuels par rapport à $\xi(t)$ forment, dans l'arrangement qui correspond à l'ordre des facteurs linéaires, une série infinie convergente, dont la somme correspond au changement dans l'écart de la fonction. De même la différence $(\Phi_2 - \Phi_3)$ peut également être vue comme une série infinie convergente de termes, qui à leur tour correspondent aux facteurs linéaires de la fonction $\xi(t)$ ordonnés de la manière spécifiée ci-dessus.

Maintenant soit

$$\alpha = \beta + i\gamma,$$

où β et γ désignent des nombres réels, correspondant à n'importe lequel des parties imaginaires des zéros de la fonction $\xi(t)$, et dans la suite le symbole arctg sera toujours compris comme l'arc compris entre $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ et $\frac{\pi}{2}$. Puis l'augmentation, qui est l'écart entre le facteur linéaire et le point nul mentionné

$$1 - \frac{t}{\beta + i\gamma} = -\frac{1}{\beta + i\gamma}[t - (\beta + i\gamma)]$$

montre que si t est la distance sur $(T - ia)\ldots T$, t passera à un moment par la valeur T dans tous les cas

$$\operatorname{arctg}\frac{a+\gamma}{T-\beta} - \operatorname{arctg}\frac{\gamma}{T-\beta}$$

(voir l'illustration de la Fig. 1).

[6] ?

L'augmentation de l'écart du facteur linéaire dans le cas de la distance $(T-i2a)\dots(T-ia)$ est le même et dans dans tous les cas, il est égal à

$$\operatorname{arctg}\frac{2a+\gamma}{T-\beta}-\operatorname{arctg}\frac{a+\gamma}{T-\beta}.$$

Par conséquent, la contribution du facteur linéaire considéré à la différence $(\Phi_2-\Phi_3)$ est la même

$$-\left\{\operatorname{arctg}\frac{2a+\gamma}{T-\beta}-\operatorname{arctg}\frac{a+\gamma}{T-\beta}-\left(\operatorname{arctg}\frac{a+\gamma}{T-\beta}-\operatorname{arctg}\frac{\gamma}{T-\beta}\right)\right\}.$$

Or, après avoir arbitrairement supposé un nombre k positif, deux cas peuvent être distingués, selon qu'on a

$$|T-\beta|<2k \quad \text{ou bien} \quad |T-\beta|\geq 2k$$

et par conséquent la différence $(\Phi_2-\Phi_3)$ peut être divisée en une somme de deux parties ω_1,ω_2 dont la première ω_1 est la somme des contributions de ces facteurs linéaires $\left(1-\dfrac{t}{\beta+i\gamma}\right)$ lorsque $|T-B|<2k$, donc

$$T-2k<\beta<T+2k$$

tandis que la seconde ω_2 inclut les contributions de tous les autres facteurs linéaires.

Pour estimer ω_1, imaginons l'intervalle $(T-2k)...(T+2k)$ décomposé en deux parties

$$(T-2k)\dots T \quad \text{et} \quad T...(T+2k)$$

et pour chacune d'elles, on compte le nombre de zéros $\beta+i\gamma$ pour lesquels β se trouve à l'intérieur de la partie en question. Si plusieurs zéros apparaissent, chacun devra être touché aussi souvent que sa multiplicité l'indique. Le plus grand des deux nombres résultants est appelé K. Il s'avère alors qu'on doit avoir

$$|\omega_1|<K\frac{\pi}{2}.$$

Si initialement $\gamma=0$, c'est-à-dire si β est un zéro réel de la fonction $\xi(t)$, alors la contribution du facteur linéaire correspondant à la différence $\Phi_2-\Phi_3$ est égale à la différence entre deux angles aigus de *même* signe, à savoir les deux angles sous lesquels les chemins $(T-ia)\dots T$ et $(T-i2a)\dots(T-ia)$ apparaissent vus du point β. La valeur absolue de cette contribution est donc $<\frac{\pi}{2}$.

Deuxièmement, si $(\beta+i\gamma)$ où $\gamma \gtrless 0$ est un zéro imaginaire de la fonction $\xi(t)$, alors ce complexe a un complexe conjugué $(\beta-i\gamma)$, et la valeur absolue de la somme des angles φ_1,φ_2, voir la Fig. 2,

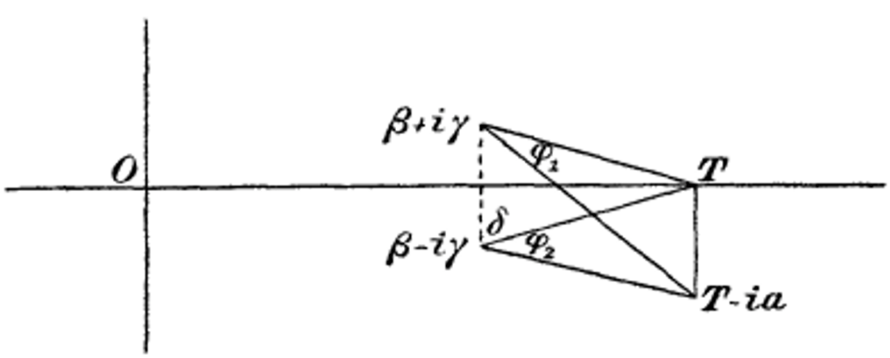

Fig. 2.

sur laquelle le chemin $(T-ia)...T$ apparaît à partir des points $(\beta+i\gamma)$ et $(\beta-i\gamma)$, est comprise entre 0 et π. Comme $|\varphi_1|$ est plus petit que l'angle de base du triangle isocèle de sommet T et de base δ

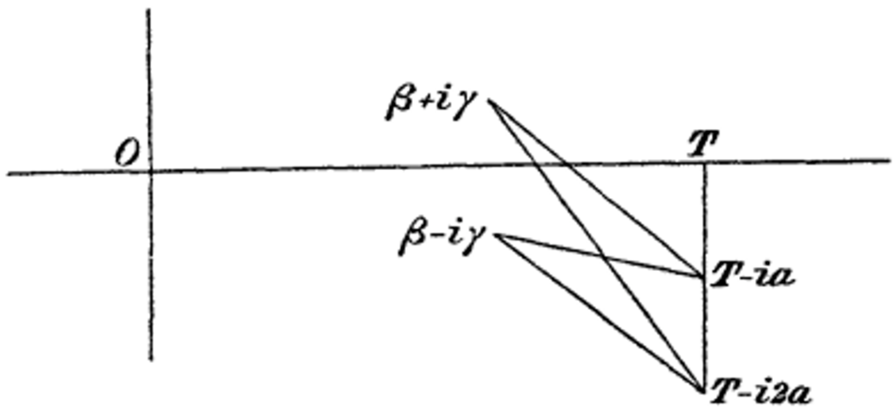

Fig. 3.

$(\delta+|\varphi_2|)$ est $<\pi$. De même, la figure 3 montre que la somme des angles auxquels la distance $(T-i2a)\ldots(T-ia)$ à partir des points $(\beta+i\gamma)$ et $(\beta-i\gamma)$ apparaît, pris en valeur absolue, est $<\pi$, car les deux angles sont aigus. En même temps, cette somme a toujours le même signe que la somme $(\varphi_1+\varphi_2)$.

La différence entre les deux sommes que nous venons de mentionner est donc $<\pi$ en valeur absolue. Cependant, cette différence représente la contribution que les facteurs linéaires correspondant aux points zéro $(\beta+i\gamma)$ et $(\beta-i\gamma)$ apportent ensemble au nombre ω_1. On considère pour chacune de ces contributions à ω_1 sa valeur absolue de sorte qu'en moyenne, chaque facteur linéaire individuel $<\pi$ a une contribution dont la valeur absolue est $<\frac{\pi}{2}$.

De plus, puisque deux zéros dont les parties réelles se situent sur des côtés différents de T donnent lieu à des contributions de signes *opposés*, on obtient en estimant $|\omega_1|$ certainement trop si l'on considère uniquement les zéros dont les parties réelles sont à l'intérieur d'un des deux intervalles $(T-2k)\ldots T$ et $T\ldots(T+2k)$ à savoir une contribution inférieure à $\frac{\pi}{2}$ chacun. Il en résulte que la plupart plupart des zéros sont de même contribution et que

$$|\omega_1|<K\frac{\pi}{2},$$

comme on l'a prétendu..

Dans le deuxième cas, si $|T-\beta|\geq 2k$ la contribution des facteurs linéaires $\left(1-\frac{t}{\beta+i\gamma}\right)$ à la différence (Φ_2,Φ_3) fournie ci-dessus est calculée en appliquant le théorème de Taylor sous la forme la plus simple du facteur linéaire. On obtient :

$$-\left\{\operatorname{arctg}\frac{2a+\gamma}{T-\beta}-\operatorname{arctg}\frac{a+\gamma}{T-\beta}-\left(\operatorname{arctg}\frac{a+\gamma}{T-\beta}-\operatorname{arctg}\frac{\gamma}{T-\beta}\right)\right\}$$

$$=-\frac{a}{T-\beta}\left\{\frac{1}{1+\left(\dfrac{a(1+\vartheta)+\gamma}{T-\beta}\right)^2}-\frac{1}{1+\left(\dfrac{a\vartheta+\gamma}{T-\beta}\right)^2}\right\}$$

$$=\frac{a(T-\beta)\{[a(1+\vartheta)+\gamma]^2-(a\ \vartheta+\gamma)^2\}}{\{(T-\beta)^2+[a(1+\vartheta)+\gamma]^2\}\{(T-\beta)^2+(a\vartheta+\gamma)^2\}}$$

$$=a^2[a(1+2\vartheta)+2\gamma]\cdot\frac{(T-\beta)^2}{(T-\beta)^2+(a\vartheta+\gamma)^2}\cdot\frac{1}{(T-\beta)\{(T-\beta)^2+[a(1+\vartheta)+\gamma]^2\}}$$

$$(0<\vartheta<1)$$

De là il résulte

$$\left|\operatorname{arctg}\frac{2a+\gamma}{T-\beta}-\operatorname{arctg}\frac{a+\gamma}{T-\beta}-\left(\operatorname{arctg}\frac{a+\gamma}{T-\beta}-\operatorname{arctg}\frac{\gamma}{T-\beta}\right)\right|$$

$$<a^2(3a+2\gamma)\cdot\frac{1}{|T-\beta|^3}$$

$$<a^2(3a+1)\cdot\frac{1}{|T-\beta|^3}$$

La série de contributions que contiennent les facteurs linéaires de (1) où $(1-\frac{t}{\beta+i\gamma})$, avec $|T-\beta|\geq 2k$ donne la différence $(\Phi_2-\Phi_3)$ est donc *absolument* convergente. Par conséquent, l'hypothèse indiquée précédemment concernant la disposition des membres de cette série peut maintenant être abandonnée et toute autre disposition peut être substituée à la précédente. En particulier, on peut d'abord combiner tous les termes positifs, c'est-à-dire ceux pour lesquels $\beta<T$ en une somme Σ_1, puis tous les termes négatifs, c'est-à-dire ceux pour lesquels $\beta>T$ en une somme $(-\Sigma_2)$ et la somme ω_2 des contributions de tous les facteurs linéaires du type considéré est égal à la différence $(\Sigma_1-\Sigma_2)$ ensemble. Cela montre que $|\omega_2|$ est plus petit que le plus grand des deux nombres Σ_1,Σ_2, et donc encore plus petit que

$$a^2(3a+1)\Sigma'\frac{1}{|-\beta|^2},$$

où la somme Σ' peut être étendue soit uniquement sur les zéros $(\beta+i\gamma)$ pour lesquels $\beta\geq T+2k$ soit uniquement sur ceux pour lesquels $\beta\leq T-2k$. Selon l'un ou l'autre cas, on obtient la plus grande valeur de Σ'.

En résumant les résultats auxquels a conduit l'examen des deux cas précédemment distingués, on obtient

$$|\Phi_2 - \Phi_3| < K\frac{\pi}{2} + a^2(3a+1)\Sigma'\frac{1}{|-\beta|^2}. \tag{6}$$

L'estimation de Φ_2 peut maintenant être effectuée. La combinaison des formules (5) et (6) donne :

$$\Phi_2 = \Phi_3 - (\Phi_2 - \Phi_3)$$

l'équation

$$\begin{aligned} \Phi_2 = &-a\frac{\pi}{4} + Z(a,T) - Z(2a,T) \\ &+ \eta\left\{K\frac{\pi}{2} + a^2(3a+1)\Sigma'\frac{1}{|-\beta|^3} + \frac{2}{3T}\right\} \\ &+ \left\{\vartheta\frac{36a^2+68a-1}{16} - \vartheta'\frac{24a^2+40a-1}{16}\right\}\frac{1}{T} \end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{pmatrix} -1 < \eta < 1 \\ 0 < \vartheta < 1 \\ 0 < \vartheta' < 1 \end{pmatrix}$$

Et pour ceux qui vérifient l'équation

$$N = \frac{\Phi_1 + \Phi_2}{\pi}$$

avec N le nombre des racines de la fonction $\xi(t)$, dont les parties réelles sont comprises entre 0 et T, l'expression suivante découle des équations (4) et (7)

$$\begin{aligned} N = &\frac{T}{2\pi}l\frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + \frac{7}{8} + \frac{2Z(a,T) - Z(2a,T)}{\pi} \\ &+ \eta\left\{\frac{K}{2} + \frac{a^2(3a+1)}{\pi}\Sigma'\frac{1}{|T-\beta|^3} + \frac{1}{\pi T}\right\} \\ &+ \{\vartheta\frac{5a^2+9a}{2} - \vartheta'\frac{32a^2+72a-3}{16}\}\frac{1}{\pi T} \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{pmatrix} -1 < \eta < 1 \\ 0 < \vartheta < 1 \\ 0 < \vartheta' < 1 \end{pmatrix}$$

3.

Si l'on souhaite simplement se convaincre du fait que la valeur absolue de la différence entre N et la valeur d'approximation de Riemann $\frac{T}{2\pi}l\frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi}$ avec T infiniment croissant peut devenir au maximum de l'ordre de lT à l'infini, il suffit de poser $a = \frac{3}{2}$ dans l'équation (8) et choisir la valeur de k alors

$$\chi = \operatorname{tg} 1 = 1,55741$$

Ensuite, on a

$$\begin{aligned} Z(a,T) &\leq |l\zeta(2+iT)| \\ &\leq \left| \sum \left\{ \frac{1}{p^{2+iT}} + \frac{1}{2}\frac{1}{p^{2(2+iT)}} + \frac{1}{3}\frac{1}{p^{3(2+iT)}} + \dots \right\} \right| \end{aligned}$$

où la somme de tous les nombres premiers p s'étend de 2 à l'infini, d'où

$$|Z(a,T)| \leq \sum \left\{ \frac{1}{p^2} + \frac{1}{2}\frac{1}{p^4} + \frac{1}{3}\frac{1}{p^6} + \dots \right\} = l\zeta(2) = l\frac{\pi^2}{6}.$$

Il s'ensuit également que $|Z(2a,T)|$ ne peut dépasser la valeur finie $l\frac{\pi^2}{6}$.

De plus, selon un théorème que j'ai prouvé plus tôt [7] , ce nombre reste systématiquement plus petit que

$$\chi l(T+\chi) < \chi lT + \frac{\chi^2}{T}.$$

Finalement, la somme $\sum{}' \frac{1}{|T-\beta|^3}$ peut devenir à l'infini au plus de l'ordre de lT.

Cela entraîne la considération suivante : Si ν est un nombre entier positif, alors cela signifie que pour qu'on ait

$$2\,\nu\chi \leq |T-\beta| < 2(\nu+1)\chi\ , \tag{9}$$

il faut que β soit dans l'intervalle

$$T + 2\nu\chi \dots T + 2(\nu+1)\chi,$$

ou dans l'intervalle

$$T - 2(\nu+1)\chi \dots T - 2\nu\chi$$

Le nombre de zéros $\beta + i\gamma$ de la fonction $\xi(t)$, pour lesquels β ne se situe pas en dehors de l'intervalle mentionné en premier est cependant plus petit, selon le même théorème que ci-dessus, que

$$\chi l[T + (2\nu+1)\chi],$$

et cette expression, comme il résulte du fait que la distribution des zéros de la fonction $\xi(t)$ est symétrique par rapport au point zéro, représente aussi une limite pour le deuxième intervalle, limite du nombre de zéros pour lesquels β ne se situe pas en dehors de ce second intervalle, c'est donc

[7] v. Mangoldt, Journal f, d. r. u. a. Math. 114, 1895, S. 265.

une limite dans tous les cas. Donc, pour $k = \chi$ en combinant toujours dans un groupe tous les membres de la somme Σ' pour lesquels une seule et même inégalité de la forme (9) existe :

$$\begin{aligned}
\sum{}' \frac{1}{|T-\beta|^3} &< \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\chi l[T+(2\nu+1)\chi]}{8\nu^3\chi^5} \\
&< \frac{1}{8\chi^2}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu^3}\cdot lT + \frac{1}{8\chi^2}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{l(1+\dfrac{(2\nu+1)\chi}{T})}{\nu^3} \\
&< \frac{\zeta(3)}{8\chi^2}lT + \frac{1}{8\chi}\cdot\sum_{v=1}^{\infty}\frac{2\nu+1}{\nu^3}\cdot\frac{1}{T} \\
&< \frac{\zeta(3)}{8\chi^2}lT + \frac{2\zeta(2)+\zeta(3)}{8\chi}\cdot\frac{1}{T}
\end{aligned}$$

La somme $\sum{}'$ peut donc devenir infinie au plus comme lT, ce qui prouve aussi l'affirmation faite concernant le nombre N.

4.

Mais si l'on cherche maintenant la valeur absolue de la différence entre le nombre N et l'approximation de Riemann

$$\frac{T}{2\pi}l\frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi}$$

et qu'on utilise la forme

$$AlT + B$$

pour cette limite supérieure, formule dans laquelle A représente une constante positive *la plus petite possible* et B représente une expression d'un ordre de grandeur inférieur à lT, quelques considérations supplémentaires sont nécessaires :

$$a = \frac{1}{2} + u$$

où u désigne un nombre à déterminer ultérieurement de manière appropriée, on testera pù a se situe par rapport à $\frac{1}{lT}$. Ensuite, prenons u tel que

(10) $$0 < u < 0,97413$$

On a

$$|Z(a,T)| = |Z(\frac{1}{2}+u,T)| \leq |l\xi(1+u+iT)| \leq l\xi(1+u).$$

Mais alors

$$\xi(1+u) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+u}} < 1 + \int_1^{\infty}\frac{dx}{x^{1+u}} = 1 + \frac{1}{u} = \frac{1+u}{u}.$$

par conséquent

$$l\xi(1+u) < l(1+u) - lu < u - lu,$$

Ainsi, on a également

$$\left| Z\left(\frac{1}{2}+u, T\right) \right| < -lu + u. \tag{11}$$

La deuxième égalité est

$$|Z(2a,T)| = |Z(1+2u,T)| \leq \left| l\zeta\left(\frac{3}{2}+2u+iT\right) \right|$$

d'où il découle

$$|Z(2a,T)| \leq l\zeta\left(\frac{3}{2}+2u\right) < l\zeta\left(\frac{3}{2}\right). \tag{12}$$

Troisièmement, afin d'obtenir une limite supérieure pour K, considérons d'abord les zéros de la fonction $\xi(t)$ dont les parties réelles ne se situent pas en dehors de l'intervalle $T \ldots (T+2k)$. Le nombre K_1 de ces zéros satisfait l'inégalité

$$K_1 \operatorname{arctg} \frac{2k}{1+u} < \Phi_1\left(\frac{1}{2}+u, T+2k\right) - \Phi_1\left(\frac{1}{2}+u, T\right). \tag{13}$$

Car si la variable t est continue, et passe par le chemin

$$T - i\left(\frac{1}{2}+u\right) \ldots T+2k-i\left(\frac{1}{2}+u\right),$$

l'écart de chaque facteur linéaire individuel à la fonction $\xi(t)$ devient positif. De plus [8], correspond à tout zéro dont la partie réelle n'est pas en dehors de l'intervalle, $T \ldots (T+2k)$ une augmentation supérieure à $\operatorname{arctg} \dfrac{2k}{1+u}$.

La somme de ces augmentations à elle seule dépasse donc la valeur $K_1 \operatorname{arctg} \dfrac{2k}{1+u}$. Raison de plus qui fera que l'augmentation totale de l'écart de la fonction $\xi(t)$, qui est représenté par la différence $\Phi_1(\frac{1}{2}+u, T+2k) - \Phi_1(\frac{1}{2}+u, T)$ sera plus grand que $K_1 \operatorname{arctg} \dfrac{2k}{1+u}$.

Mais maintenant, il résulte de l'équation (4)

$$\begin{aligned}\Phi_1(a,T+2k) - \Phi_1(a,T) = {} & \left(\frac{T+2k}{2} l \frac{T+2k}{2\pi} - \frac{T+2k}{2}\right) - \left(\frac{T}{2} l \frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2}\right) \\ & + Z(a,T+2k) - Z(a,T) + \frac{\eta}{T}\left\{\frac{2}{3} + \frac{12a^2+36a-1}{16}\right\}\end{aligned}$$

[8]Cf. H. v. Mangoldt, Journal f. d. r. u. a. Math. 114, 1895, S. 258f.

Pour $a < \frac{1}{2} + 0,97413 = 1,47413$, il en résulte après transformation du nombre en début de droite une différence latérale, en utilisant le théorème de Taylor

$$\begin{aligned}\Phi_1(a, T+2k) - \Phi_1(a,T) &= 2k \cdot \frac{1}{2} l \frac{T + \vartheta 2k}{2\pi} + Z(a, T+2k) - Z(a, T + \frac{\eta}{T} \cdot 5,5511) \\ &= kl\frac{T}{2\pi} + kl\left(1 + \frac{\theta 2k}{T}\right) + Z(a, T+2k) - Z(a,T) + \frac{\eta}{T} \cdot 5,5511 \\ &= kl\frac{T}{2\ \pi} + Z(a, T+2k) - Z(a,T) + \frac{\eta}{T}(2k^2 + 5,5511).\end{aligned}$$

Si on fixe maintenant $a = \frac{1}{2} + u$, alors, en tenant compte de l'inégalité (11), on obtient

$$\Phi_1(\frac{1}{2} + u, T+2k) - \Phi_1(\frac{1}{2} + u, T) < kl\frac{T}{2\pi} - 2lu + 2u + \frac{1}{T}(2k^2 + 5,5511).$$

Par conséquent, on a

$$K_1 < \frac{1}{\operatorname{arctg} \dfrac{2k}{1+u}} \left\{ kl\frac{T}{2\pi} - 2lu + 2u + \frac{1}{T}(2k^2 + 5,5511) \right\} \tag{14}$$

Comme nous le verrons plus tard, on ne peut pas choisir une valeur comprise entre 0,67 et 0,68. De plus, $T > 12$ peut être pris puisque la fonction $\xi(t)$ n'a pas de zéro dont la partie réelle serait ≤ 12 en termes absolus. Cependant, pour les valeurs de k et T, qui satisfont à ces conditions, le membre droit de l'inégalité (14) augmente à mesure que T augmente. Donc, si $T > 12$ ce membre de droite ne représente pas l'intervalle $T \ldots (T+2k)$ mais il représente une limite supérieure pour le nombre de zéros de la fonction $\xi(t)$, dont les parties réelles appartiennent à cet intervalle, mais aussi pour tout autre intervalle de longueur $(2k)$, dont l'extrémité est la plus proche du point zéro et en est à une distance $< T$. En particulier, le membre droit de l'inégalité (14) est également une limite supérieure pour le nombre de zéros dont les parties réelles appartiennent à l'intervalle $(T-2k) \ldots T$ et donc aussi pour le nombre précédemment noté K de sorte que, si $k < 0,68$, soit si $2k^2 < 0,9248$ on obtient

$$K < \frac{1}{\operatorname{arctg} \frac{2k}{1+u}} \left(kl\frac{T}{2\pi} - 2lu + 2u + \frac{6,4759}{T} \right). \tag{15}$$

Pour le premier facteur du membre de droite de cette inégalité, on le développe selon le théorème de Mac-Laurin

$$\frac{1}{\operatorname{arctg} \frac{2k}{1+u}} = \frac{1}{\operatorname{arctg}(2k)} + \frac{2ku}{\left(\operatorname{arctg} \frac{2k}{1+\vartheta u}\right)^2 [(1+\vartheta u)^2 + 4k^2]}$$

et, si on continue,

$$\frac{1}{\operatorname{arctg} \dfrac{2k}{1+u}} = \frac{1}{\operatorname{arctg}(2k)} + \frac{1}{[\operatorname{arctg}(2k)]^2} \cdot \frac{2k}{1+4k^2} u + 2k \frac{2k - (1+\theta u)\operatorname{arctg} \dfrac{2k}{1+\theta u}}{(\operatorname{arctg} \dfrac{2k}{1+\theta u})^3 [(1+\theta u)^2 + 4k^7]^2} u^2.$$

De là il résulte

$$\frac{1}{\operatorname{arctg}\dfrac{2k}{1+u}} < \frac{1}{\operatorname{arctg}(2k)} + \frac{2ku}{(\operatorname{arctg}\dfrac{2k}{1+u})^2(1+4k^9)},$$

respectivement

$$\frac{1}{\operatorname{arctg}\dfrac{2\ k}{1+u}} < \frac{1}{\operatorname{arctg}(2k)} + \frac{1}{[\operatorname{arctg}(2k))^2} \cdot \frac{2k}{1+4k^q} \cdot u2k - \operatorname{arctg} + 2k.1 + 1(\operatorname{arctg}12k)(1+43)2.$$

Il s'ensuit donc

$$K < \frac{k}{\operatorname{arctg}(2k)} \cdot l\frac{T}{2\pi} + \frac{1}{[\operatorname{arctg}(2k)]^2} \cdot \frac{2k^2}{1+4k^2} ul\frac{T}{2\pi} - \frac{2lu}{\operatorname{arctg}(2k)}$$

$$2k^2 \frac{2k - \operatorname{arctg}\frac{2k}{1+u}}{\left(\operatorname{arctg}\frac{2k}{1+u}\right)^3(1+4k^2)^2} u^2 l\frac{T}{2\pi} - \frac{4kulu}{\left(\operatorname{arctg}\frac{2k}{1+u}\right)^2(1+4k^2)}$$

$$+\frac{1}{\operatorname{arctg}\frac{2k}{1+u}}\left(2u + \frac{6,4759}{T}\right)$$

Maintenant, si on l'utilise dans le deuxième terme du membre de droite, il découle

$$M = \frac{k}{\operatorname{arctg}(2k)} \cdot l\frac{T}{2\pi} + \frac{1}{[\operatorname{arctg}(2k)]^2} \cdot \frac{2k^2}{1+4k^2} ulT - \frac{2lu}{\operatorname{arctg}(2k)} \tag{16}$$

et

$$\begin{aligned} P = {} & 2k^2 \frac{2k - \operatorname{arctg}\frac{2k}{1+u}}{\left(\operatorname{arctg}\frac{2k}{1+u}\right)^3(1+4k^2)^2} u^2 l\frac{T}{2\pi} - \frac{4kulu}{\left(\operatorname{arctg}\frac{2k}{1+u}\right)^2(1+4k^2)} \\ & - \frac{2k^2 l(2\pi)u}{[\operatorname{arctg}(2k)]^2 \cdot (1+4k^2)} + \frac{1}{\operatorname{arctg}\frac{2k}{1+u}}\left(2u + \frac{.6,4759}{T}\right) \end{aligned} \tag{17}$$

on a

$$K < M + P. \tag{18}$$

Des considérations similaires à celles précédentes sont utilisées pour estimer la somme $\sum{}' \dfrac{1}{|T-\beta|^3}$: on considère les zéros $(\beta + i\gamma)$, pour lesquels

$$2\nu k \leq |T-\beta| \leq 2(\nu+1)k$$

et, d'après les considérations qui viennent d'être faites, cette différence s'avère plus petite que l'expression qui résulte de la somme $(M+P)$ si l'on remplace T par $(T+2\nu k)$, aussi prendre en compte les inégalités

$$l(T+2\nu k) < lT + \frac{2\nu k}{T} \quad \text{et} \quad \frac{1}{T+2\nu k} < \frac{1}{T}$$

la rend inférieure à

$$M + P + \frac{2\ \nu k}{T} Q,$$

ou devient

$$Q = \frac{k}{[\mathrm{arctg}(2k)]^2(1+4k^2)} + 2k^2 \frac{2k - \mathrm{arctg}\frac{2k}{1+u}}{\left(\mathrm{arctg}\frac{2k}{1+u}\right)^3 (1+4k^2)^2} u^2 \tag{19}$$

qu'on utilise. Voilà pourquoi

$$\sum{}' \frac{1}{|T-\beta|^3} < \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{M + P + \dfrac{2\nu k}{T} Q}{8\nu^3 k^3},$$

ou

$$\sum{}' \frac{1}{|T-\beta|^3} < \frac{M+P}{8k^3}\zeta(3) + \frac{\zeta(2)}{4k^2}\frac{Q.}{T}$$

où pour abréger

$$a^2(3a+1) = \left(\frac{1}{4} + u + u^2\right)\left(\frac{5}{2} + 3u\right) = \frac{5}{8} + \frac{13}{4}u + \frac{11}{2}u^2 + 3u^3,$$

$$\frac{a^2(3\ a+1)}{\pi}\Sigma' \frac{1}{|T-\beta|^3}$$

$$= \left(\frac{5}{8} + \frac{13}{4}u + \frac{11+6u}{2}u^2\right)\frac{\zeta(3)}{8\pi k^3}M + \frac{1}{4\pi k^2}\left(\frac{5}{8} + \frac{13}{4}u + \frac{11}{2}u^2 + 3u^3\right)\left[\frac{\zeta(3)}{2k}P + \frac{\zeta(2)}{T}Q\right],$$

Voilà pourquoi $u < 0,97415$,

$$\begin{aligned} \tfrac{a^2(3a+1)}{\pi}\Sigma' \frac{1}{|T-\beta|^3} &< \left(\frac{5}{8} + \frac{13}{4}u + 8,4225u^2\right)\frac{\zeta(3)}{8\pi k^3}M \\ &\quad + \frac{94,272}{32\pi k^2}\left[\frac{\zeta(3)}{2k}P + \frac{\zeta(2)}{T}Q\right]. \end{aligned} \tag{20}$$

À l'aide des formules (11), (12), (18), (20) et les inégalités

$$a < 1,47415$$

découle maintenant de l'équation (8)

$$N = \frac{T}{2\pi}l\frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + \frac{7}{8} + \eta\{[\frac{1}{2} + \frac{5\xi(3)}{64\pi k^8}]M$$

$$- \frac{2}{\pi}lu + \frac{13\xi(3)}{32\pi k^3}uM + \frac{1}{\pi}l\xi(\frac{3}{2}) + \frac{2}{\pi}u + \frac{8,4225}{8\pi k^3}\xi(3)u^2M + \frac{P}{2}[1 + \frac{94,272}{32\pi k^3}\xi(3)] + \frac{1}{\pi T}[13,067 + \frac{94,272}{32k^2}$$

Si on remplace M par la valeur donnée par l'équation (16), on obtient

$$
\begin{aligned}
N = {} & \frac{T}{2\pi} l \frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + \frac{7}{8} \\
& + \eta \left\{ \frac{32\pi k^3 + 5\zeta(3)}{64\pi k^2 \mathrm{arctg}(2k)} l \frac{T}{2\pi} \right. \\
& + \left[\frac{32\pi k^3 + 5\zeta(3)}{32\pi k[\mathrm{arctg}(2k)]^2(1+4k^2)} + \frac{13\zeta(3)}{32\pi k^2 \mathrm{arctg}(2k)} \right] ulT \\
& - \left[\frac{32\pi k^2 + 5\zeta(3)}{32\pi k^3 \mathrm{arctg}(2k)} + \frac{2}{\pi} \right] lu + \frac{1}{\pi} l\zeta\left(\frac{3}{2}\right) + \frac{2}{\pi} u \qquad (21) \\
& + \frac{8,4225\zeta(3)}{8\pi k^2 \mathrm{arctg}(2k)} u^2 lT \\
& + \frac{\zeta(3)(13 + 33,6900u)u}{32\pi k^3 \mathrm{arctg}(2k)} \left[\frac{2k^2 ulT}{\mathrm{arctg}(2k)(1+4k^2)} - 2lu - kl(2\pi) \right] \\
& + \frac{P}{2} \left[1 + \frac{94,272}{32\pi k^3} \zeta(3) \right] + \frac{1}{\pi T} [13,067 + \frac{94,272}{32k^2} \zeta(2) Q]
\end{aligned}
$$

L'expression

$$\frac{32\pi k^3 + 5\zeta(3)}{64\pi k^2 \,\mathrm{arctg}(2k)} = \frac{1}{64\pi} \cdot \frac{32\pi k^3 + 5\zeta(3)}{k^2 \,\mathrm{arctg}(2k)}$$

devient un minimum lorsque k vérifie l'équation

$$k^2 \mathrm{arctg}\,(2k) \cdot 96\pi k^2 - [32\pi k^3 + 5\zeta(3)] \left[2k \mathrm{arctg}\,(2k) + \frac{2k^2}{1+4k^2} \right] = 0$$

ou lorsque

$$48\pi k^3 \mathrm{arctg}(2k) - [32\pi k^3 + 5\zeta(3)] \left[\mathrm{arctg}\,(2k) + \frac{k}{1+4k^2} \right] = 0$$

ou lorsque

$$\mathrm{arctg}(2k) = \frac{32\pi k^3 + 5\zeta(3)}{16\pi k^3 - 5\zeta(3)} \cdot \frac{k}{1+4k^2} \qquad (22)$$

est satisfaite. La valeur de $\zeta(3)$ peut être trouvée dans un tableau donné par M. J. P. Gram[9] jusqu'à 15 décimales. On utilise l'arrondi inférieur aux cinq premières décimales,

$$\zeta(3) = 1,2020\underline{6}$$

À partir de ce résultat, le calcul numérique montre que l'équation (22) a une racine comprise entre $0,67$ et $0,68$, ce qui est approximativement égal à $0,675$. Si l'on prend cette valeur d'approximation pour k

[9] J. P. Gram, Mémoires de l'Académie Royale de Copenhague (6) 2, 1884, S. 269.

$$(23) \qquad k = 0,675$$

on trouve ainsi

$$\frac{32\pi k^3 + 5\zeta(3)}{64\pi k^2 \mathrm{arctg}(2k)} < 0,43200.$$

De plus, premièrement, si l'on pose $k = 0,675$, les approximations suivantes sont un peu trop grandes pour les coefficients de ulT et de $(-lu)$ du côté droit de l'équation (21) :

$$(24) \qquad \frac{32\pi k^3 + 5\zeta(3)}{32\pi k[\mathrm{arctg}(2k)]^2(1+4k^2)} + \frac{13\zeta(3)}{32\pi k^2 \mathrm{arctg}(2k)} < 0,58704,$$

$$(25) \qquad \frac{32\pi k^3 + 5\zeta(3)}{32\pi k^3 \mathrm{arctg}(2k)} + \frac{2}{\pi} < 1,91662,$$

et, d'autre part, il s'agit de rendre l'expression $0,58704ulT - 1,91662$ minimum. Ceci est réalisé lorsque

$$0,58704 \; ulT - 1,91662\frac{1}{u} = 0$$

ou

$$u = \frac{1,91662}{0,58704}\frac{1}{lT} = \frac{3,2650}{lT}$$

Or, compte tenu des résultats qui ont été assurés jusqu'à présent concernant les plus petits zéros de la fonction $\xi(t)$, on peut utiliser la variable T à condition que

$$T > 28,558$$

qui correspond à l'inégalité déjà utilisée ci-dessus

$$u < 0,97413$$

Cela a des conséquences. Parce que nous connaissons parfaitement les zéros de la fonction $\xi(t)$, dont les parties réelles sont comprises entre 0 et $28,558$. Ces zéros sont tous réels, comme l'a prouvé M. Ch. J. de la Vallée Poussin [10] . D'ailleurs, ils sont tous simples, ce qui n'a pas été expressément souligné par M. de la Vallée Poussin, mais découle facilement de ses considérations. Enfin, les valeurs numériques des zéros en question sont devenues connues grâce aux calculs très précis effectués par Monsieur J. P. Gram [11] à savoir

$$\alpha_1 = 14,134725 \; ; \quad \alpha_2 = 21,022040 \; ; \quad \alpha_3 = 25,010856$$

Maintenant, on prend

$$k = 0,675 \; ; \quad u = \frac{3,2650}{lT} \quad \text{et} \quad T > 28,558$$

---

[10] Ch.-J. de la Vallée Poussin, "Sur la fonction $\zeta(s)$ de Riemann et le nombre des nombres premiers inférieurs à une limite donnée", Mémoires couronnés et autres Mémoires publiés par l'Académie royale de Belgique, Vol. 59, 1899, S. 23.

[11] J.-P. Gram, "Note sur les zéros de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann", Bulletin de l'Académie royale des sciences et des lettres du Danemark, 1902, S. 8.

Ceci résulte d'un calcul numérique

$$\log\frac{2k}{1+u} > 9,83495 \quad \text{et } \mathrm{arctg}\frac{2k}{1+u} > 0,59977$$

et puis de (17)

$$\frac{P}{2} < k^2\frac{2k-0,59977}{(0,59977)^3(1+4k^2)^2}u^2lT - k^2\frac{2k-0,59977}{(0,59977)^2(1+4k^2)^2}l(2\pi)u^2$$

$$-\frac{2k}{(0,59977)^8(1+4k^2)}ulu + (\frac{1}{0,59977} - \frac{k^2l(2\pi)}{[arctg(2k)]^2(1+4k^8)})u + \frac{3,2380}{0,59977}\cdot\frac{1}{T}.$$

Si on regarde maintenant le premier lien à droite

$$ulT = 3,2650$$

puis si on calcule les coefficients numériquement, on obtient :

$$\frac{P}{2} \quad < 0,64943u - 0,36555u^2 - 1,3298ulu + 1,32677u + \frac{5,3990}{T}$$

$$< 1,97620u - 0,36555u^2 - 1,3298\ ulu + \frac{5,3990}{T}$$

Maintenant puisque

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{lT}\cdot\frac{lT}{T} = \frac{1}{3,2650}\cdot\frac{lT}{T}\cdot u,$$

et puisque $\frac{lT}{T}$ a au plus la valeur, $\frac{128,558}{28,558}$ alors on a

$$\frac{5,3990}{T} < 0,19410u$$

Ainsi on a

$$\cdot\frac{P}{2} < 2,17030u - 0,36555u^2 - 1,3298ulu.$$

Le membre de droite de cette inégalité augmente pour les valeurs de u en question à mesure que u augmente, de sorte que ces éléments permettent d'obtenir pour $\frac{P}{2}$ une borne supérieure si on fixe $u = 0,97413$. Voici comment

(26) $$\frac{P}{2} < 1,80131.$$

De plus, il résulte de (19) pour $k = 0,675$ et $u < 0,97413$

(27) $$Q < 1,46195.$$

On a enfin

$$\zeta\left(\frac{3}{2}\right) = 2,612\underline{4}, \tag{28}$$

et

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6} = 1,6449\underline{4}. \tag{29}$$

Si l'on utilise maintenant les résultats exprimés par les formules (23) à (29) pour estimer le membre de droite de l'équation (21), on obtient, pour $T > 28,558$, par exécution des calculs numériques

$$N = \frac{T}{2\pi} l \frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + \frac{7}{8} + \eta(0,43200\ lT + 1,91662\ llT + 12,20373) \qquad (-1 < \eta < 1).$$

Aix-la-Chapelle, le 6 mai 1904.