

Sur les sources de mon livre *Algèbre moderne*
B.L. van der Waerden, Zurich¹

Résumé : En décembre 1971, Garrett Birkhoff m’a demandé de donner mon avis sur les principales sources de mon livre. Je lui ai écrit une lettre de sept pages, accompagnée de deux suppléments. Il avait l’intention de publier une version révisée de ma lettre, avec quelques commentaires de sa part, mais au cours de notre correspondance, il s’est avéré que les deux versions étaient insatisfaisantes. Je vais maintenant présenter un compte rendu détaillé, expliquant plus en détail comment j’en suis venu à écrire ce livre et quelle était la situation générale de l’algèbre à cette époque.

Introduction

J’ai étudié les mathématiques et la physique à l’Université d’Amsterdam de 1919 à 1924. Hendrik de Vries y a donné un excellent cours d’algèbre classique. Il abordait des sujets tels que :

- les déterminants et les équations linéaires,
- les fonctions symétriques,
- les résultantes et les discriminants,
- le théorème de Sturm sur les racines réelles,
- l’“Indice d’inertie” de Sylvester pour les formes quadratiques réelles ; la résolution d’équations cubiques et biquadratiques par radicaux.

J’ai complété ce cours par l’étude de la théorie de Galois et d’autres sujets dans l’admirable manuel d’algèbre en trois volumes de Heinrich Weber. J’ai également lu les “*Studien über das Ikosaeder*” de Felix Klein et étudié en profondeur la théorie des invariants.

Au début de notre siècle, nombreux étaient ceux qui considéraient la théorie des invariants comme un outil puissant en géométrie algébrique. Selon le “Programme d’Erlangen” de Felix Klein, chaque branche de la géométrie s’intéresse aux propriétés des objets géométriques qui sont invariantes dans un certain groupe. Cependant, en étudiant les travaux fondamentaux de Max Noether, le “père de la géométrie algébrique” et père d’Emmy Noether, ainsi que les travaux des grands géomètres italiens, notamment de Severi, j’ai rapidement découvert que les véritables difficultés de la géométrie algébrique ne peuvent être surmontées par le calcul des invariants et des covariants.

Déjà à Amsterdam, je réfléchissais à des questions du type suivant, sans parvenir à les résoudre :

- Comment définir la “dimension” d’une variété algébrique ?

¹ Transcription et traduction : Denise Vella-Chemla, assistée des outils Google, septembre 2025.

Proverbe :

Tout est dans le même panier chez Dedekind

Emmy Noether

- Que veulent dire les géomètres italiens lorsqu'ils parlent de "point générique" (*punto generico*) d'une variété ?
- Comment peut-on définir les multiplicités d'intersection ?
- Comment démontrer les généralisations n -dimensionnelles du théorème de Bézout sur le nombre de points d'intersection de deux courbes planes ?
- Peut-on justifier le "Principe de conservation du nombre" et le "Calcul de la géométrie énumérative" de Schubert ?

Ce dernier problème fut présenté par Hilbert au Congrès de Paris en 1900, mais je l'ignorais lorsque je suis arrivé à Göttingen en 1924.

Un autre problème qui m'inquiétait beaucoup était la généralisation à n dimensions du "théorème fondamental sur les fonctions algébriques" de Max Noether. Le théorème de Noether spécifiait les conditions sous lesquelles un polynôme donné $F(x, y)$ peut s'écrire comme une combinaison linéaire de deux polynômes donnés f et ϕ de coefficients polynomiaux A et $B\phi$: $F = Af + B\phi$. Plus généralement, on peut se demander sous quelles conditions un polynôme $F(x_1, \dots, x_n)$ peut s'écrire comme une combinaison linéaire de polynômes donnés $f_1, \dots, f_r$, de coefficients polynomiaux : $F = A_1f_1 + \dots + A_rf_r$, ou en terminologie moderne, sous quelles conditions F est contenu dans l'idéal engendré par $f_1, \dots, f_r$. Grâce aux travaux de Max Noether, je savais que cette question revêtait une importance considérable en géométrie algébrique, et j'ai réussi à la résoudre dans quelques cas particuliers. J'ignorais alors que Lasker et Macaulay avaient obtenu des résultats beaucoup plus généraux.

Göttingen

À mon arrivée à Göttingen en 1924, un monde nouveau s'ouvrait à moi. J'appris d'Emmy Noether que les outils permettant de traiter mes questions avaient déjà été développés par Dedekind et Weber, par Hilbert, Lasker et Macaulay, par Steinitz et par Emmy Noether elle-même. Elle m'a dit que je devais étudier l'article fondamental d'E. Steinitz, "Algebraische Theorie der Korper", paru dans le *Journal de Crelle* (1910), ainsi que le *Cambridge Tract Modular Systems* de Macaulay, le célèbre article de Dedekind et Weber sur les fonctions algébriques paru dans le *Journal de Crelle* (1882), et ses propres articles sur la théorie idéale et la théorie de l'élimination.

La bibliothèque mathématique de Göttingen était unique. On y trouvait tout le nécessaire, et on pouvait emprunter soi-même les livres sur les étagères ! À Amsterdam et dans la plupart des universités continentales, c'était impossible. J'ai donc commencé à étudier l'algèbre abstraite et à travailler sur mon problème principal : les fondements de la géométrie algébrique.

Je vais maintenant aborder les principaux sujets traités dans mon livre, non pas dans l'ordre logique du texte, mais approximativement dans l'ordre où j'ai appris la théorie. La numérotation des chapitres et des paragraphes suivra la première édition.

Théorie des Corps

Dans les traités antérieurs, les corps de nombres et les corps de fonctions algébriques étaient généralement traités dans des chapitres séparés, et les corps finis dans un autre chapitre. Le premier à en donner un traitement unifié, en commençant par une définition abstraite du terme “corps”, fut E. Steinitz dans son article de 1910 mentionné plus haut. Dans mon chapitre 5, intitulé “Körpertheorie”, j’ai essentiellement suivi Steinitz. La démonstration du “théorème de l’élément primitif” dans le § 34 est due à Galois. C’est Emmy Noether qui a attiré mon attention sur cette démonstration.

Le chapitre 9 traite des extensions de corps infinis. Les idées principales sont, une fois de plus, dues à Steinitz. Ses démonstrations étaient fondées sur le bon ordre et l’induction transfinie ; j’ai donc ajouté le chapitre 8, qui traite de ces sujets. Les paragraphes 57 et 58, consacrés au bon ordre, étaient tirées des articles classiques de Zermelo, mais le paragraphe 59, consacré à l’induction transfinie, était nouveau et s’inspirait du traitement de l’induction complète dans 3.

L’histoire de 3 est curieuse. Le point principal de 3 est la justification de la “définition par induction complète”, c’est-à-dire la démonstration du théorème (la variable x couvre tous les entiers naturels) :

(A) *Soit un ensemble de relations récursives définissant $f(x)$ en fonction des valeurs précédentes $f(m)$ ($m < x$), il existe une fonction $f(x)$ vérifiant ces relations.*

Le théorème (A) a été démontré pour la première fois par Dedekind, essentiellement comme je l’ai démontré dans le § 3. Sa démonstration ne repose pas sur les axiomes de Peano. Dedekind présuppose la notion de “segment initial de 1 à n ”, ou (ce qui est équivalent) la relation $m < n$. Puisque cette relation peut être définie par $m + u = n$, on peut également dire que la démonstration de Dedekind présuppose l’addition. Autrement dit, cela présuppose le théorème suivant :

(B) *Il existe une fonction $x + y$ vérifiant les relations $x + 1 = x^+$, $x + y^+ = (x + y)^+$.*

Donc (B) implique (A), et inversement, car (B) est un cas particulier de (A).

Avant 1925, tout le monde tenait pour acquis que l’arithmétique élémentaire, incluant (A) et (B), découlait des axiomes de Peano. Mais en 1927, trois personnes ont compris qu’il y avait un problème: Edmund Landau, John von Neumann et Laslo Kálmár.

Landau préparait son ouvrage “*Grundlagen der Analysis*”. Il a tenté de démontrer (A) ou (B) à partir des axiomes de Peano, mais sans succès. Il a discuté de la question avec John von Neumann, qui venait souvent de Berlin à Göttingen. Von Neumann a montré que (A) et donc (B) peuvent être déduits des axiomes de Peano, mais sa démonstration était assez compliquée. En 1927, Laslo Kálmár visita Göttingen et montra à Landau une démonstration extrêmement simple de (B) par induction complète par rapport à x . Cette démonstration figurait dans le livret de Landau. Dans mon Algèbre, je me suis référé à ce livret pour la démonstration de (B), et j’ai démontré (A) par une méthode due à Dedekind.

Théorie des groupes

J'ai appris la théorie des groupes principalement grâce au cours d'Emmy Noether "*Gruppentheorie und hyperkomplexe Zahlen*" (hiver 1924/25) et lors de discussions orales avec Artin et Schreier à Hambourg. J'ai également étudié la *Theorie der Gruppen endlicher Ordnung* de Speiser et la *Theory of Groups* de Burnside. Grâce à l'existence de ces excellents manuels, il ne m'a pas été nécessaire de traiter en détail la théorie des groupes dans mon livre.

Au chapitre 2, intitulé "*Gruppen*", je me suis limité aux notions fondamentales utilisées tout au long de l'ouvrage.

Au chapitre 6, intitulé "*Fortsetzung der Gruppentheorie*", la notion de groupe avec opérateurs est introduite, utilisée principalement au chapitre 15 ("*Lineare Algebra*") et dans les chapitres 16 et 17 suivants. À partir de Dedekind, de nombreux auteurs ont considéré les groupes commutatifs avec opérateurs, par exemple les modules sur un anneau, mais la notion générale de groupe avec opérateurs telle que définie dans mon livre est due au mathématicien russe Otto Schmidt, qui visita Göttingen en 1925 et publia un excellent article intitulé "*Ueber unendliche Gruppen mit endlicher Kette*" en 1928 (*Mathematische Zeitschrift* 29, p. 34).

La formulation et la démonstration des deux théorèmes d'isomorphisme du § 40 sont dues à Emmy Noether. Il en va de même pour le § 42.

La démonstration du théorème de Jordan-Hölder dans le § 41 est due à Otto Schreier. Elle a été publiée en 1928 (*Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar Hamburg* 6, p. 300).

Les deux derniers paragraphes du chapitre 6 ont été ajoutés car ils sont nécessaires au chapitre suivant sur la théorie de Galois. Les théorèmes démontrés dans ces deux paragraphes sont dus à Galois lui-même.

Afin de suivre l'ordre historique, je dois maintenant passer au volume 2.

Théorie des idéaux

À mon arrivée à Göttingen, l'un de mes principaux problèmes était la généralisation du "théorème fondamental" de Max Noether $F = Af + B\phi$ à n dimensions. Les conditions que F doit satisfaire sont des "conditions locales" au voisinage des points d'intersection des courbes $f = 0$ et $\phi = 0$. Si P est un point d'intersection, les conditions locales définissent un "idéal premier" Q et l'idéal originel $M - (f, \phi)$ est l'intersection de ces "idéaux premiers". La terminologie est moderne, mais les idées sont celles de Max Noether et celles de Bertini.

Il semble que Hilbert ait été le premier à comprendre qu'une généralisation en dimension n du théorème de Noether serait souhaitable. Emmanuel Lasker, champion d'échecs, qui a soutenu son doctorat sous la direction de Hilbert en 1905, a été le premier à résoudre ce problème. Il a démontré que, de manière générale, tout idéal polynomial $(f_1, \dots, f_r)$ est une intersection d'idéaux primaires.

Dans son article de 1921 “*Idealtheorie in Ringbereichen*” (*Mathematische Annalen* 83), Emmy Noether a généralisé le théorème de Lasker à des anneaux commutatifs arbitraires satisfaisant une “condition de chaîne ascendante” (*Teilerkettensatz*). Le chapitre 12 de mon livre *Allgemeine Idealtheorie der kommutativen Ringe* est basé sur cet article d’Emmy Noether. La démonstration du théorème des bases finies de Hilbert dans le § 80 est due à Artin ; il l’a présentée lors d’un séminaire à Hambourg en 1926. La condition de chaîne ascendante est très faible ; elle est satisfaite dans tous les domaines polynomiaux sur un corps quelconque et dans de nombreux autres cas. En faisant des hypothèses plus fortes concernant l’anneau, on peut même démontrer que les idéaux premiers sont des puissances d’idéaux premiers et que tout idéal est un produit d’idéaux premiers. Dans l’article d’Emmy Noether “*Abstrakter Aufbau der Idealtheorie in algebraischen Zahl und Funktionenkörpern*” (*Mathematische Annalen* 96 (1926), p. 26-61), cinq axiomes ont été formulés, garantissant que tout idéal est un produit d’idéaux premiers. Les anneaux satisfaisant ces axiomes sont désormais appelés “anneaux de Dedekind”. Dans ces anneaux, la théorie de Dedekind des idéaux dans les corps de nombres algébriques et les corps de fonctions algébriques à une variable est valide.

La théorie des corps de Dedekind a été présentée au chapitre 14 de mon livre. Les démonstrations d’Emmy Noether ont été simplifiées en utilisant une idée de W. Krull contenue dans le paragraphe § 3 de l’article de Krull paru dans *Mathematische Annalen* 99 (1927), p. 51-70. Emmy Noether, qui a examiné cet article, en a parlé à Artin. Artin a simplifié la preuve de Krull et l’a présentée lors d’un séminaire à Hambourg, auquel j’ai participé. La version simplifiée de la preuve de Krull par Artin a été reproduite dans le paragraphe 100 (§ 137 de l’édition de poche).

En 1929, j’ai généralisé la théorie de Dedekind-Noether-Krull-Artin aux anneaux intégralement clos dans leurs corps quotients. L’idée était de remplacer les idéaux par des classes d’idéaux “quasi-égaux”. Tout idéal a été montré comme quasi-égal à un produit d’idéaux premiers. Cette théorie a été publiée dans les *Mathematische Annalen* 101 (1929). En 1930, j’ai reçu une lettre d’Artin dans laquelle il donnait une démonstration simplifiée de mon théorème, reproduite dans le paragraphe 103 de mon livre (le paragraphe 140 de l’édition de poche).

Comme je l’ai déjà dit, l’une de mes principales préoccupations était la rigueur des fondements de la géométrie algébrique. Mon premier article sur ce sujet, intitulé “*Nullstellentheorie der Polynomideale*”, a été publié dans les *Mathematische Annalen* 96 (1926). La majeure partie de cet article a été intégrée au chapitre 13 de mon livre. Pour un compte rendu plus complet de l’histoire de mes premiers articles sur la géométrie algébrique, je peux me référer à ma conférence de Nizza sur les fondements de la géométrie algébrique, publiée dans les Archives d’histoire des sciences exactes n° 7, p. 171.

Dans le chapitre 13, j’ai aussi utilisé le traité de Macaulay *Modular Systems* (Cambridge 1916). Le dernier paragraphe (§ 96) du chapitre 13 est basé sur mon article “*Der Multiplizitätsbegriff der algebraischen Geometrie*”, *Mathematische Annalen* 97 (1927), dans lequel le “Principe de conservation du nombre de solutions” de Schubert a été démontré dans des conditions assez générales. Sur l’historique de cet article, voir ma conférence de Nizza citée ci-dessus, p. 173. Le contenu du chapitre 15 (“*Lineare Algebra*”) était généralement connu en 1924. Pour le § 106, j’ai utilisé (et cité) un livre d’A. Châtelet : *Leçons sur la théorie des nombres* (1913), sur lequel Emmy Noether a attiré mon attention. Le paragraphe 107 a été influencé par Otto Schreier de Hambourg,

spécialiste d'algèbre linéaire et de théorie des groupes. Le paragraphe 108 s'inspire de l'article d'Emmy Noether paru dans *Mathematische Zeitschrift* 30 (1929), p. 641, et le paragraphe 110 a été fortement influencé par les articles classiques de Frobenius sur les diviseurs élémentaires.

Au chapitre 11 ("*Théorie des éliminations*"), les équations 71 et 72 sont classiques (dues à Euler). Les paragraphes 73 et 74 s'appuient sur les travaux de l'école de Kronecker ; ma source directe est le *Cambridge Tract* de F. Macaulay, "*Systèmes modulaires*". Le paragraphe 75 est tirée de "*Zum Hilbertschen satz*" d'A. Rabinowitsch, "*Mathematische Annalen*" 102 (1929), p. 520. Sa preuve du Nullstellensatz est apparue juste à temps pour être inclus dans mon livre de 1931.

Le paragraphe 76 était basée sur les trois articles suivants :

- (1) F. Mertens, "*Aur Theorie der Elimination I*", *Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften Wien* 108 (1899), p. 1173. Si ma mémoire est bonne, c'est Ostrowski qui a attiré mon attention sur cet article remarquable, dans lequel l'existence d'un système de résultantes pour des équations homogènes a été prouvée pour la première fois.
- (2) B.L. van der Waerden, "*Ein algebraisches Kriterium für die Lösbarkeit eines homogenen Gleichungssystems*", *Proceedings Koninklijke Akademie Amsterdam* 29 (1926), p. 142. Dans cet article, l'existence d'un système de résultantes a été à nouveau prouvée.
- (3) H. Kapferer, "*Ueber Resultanten und Resultantensysteme*", *Sitzungsberichte der Bayerischen Akademie München* 1929, p. 179. Dans cet article, une preuve plus courte de l'existence d'un système de résultantes a été donnée.

Dans les § 77-78, j'ai principalement utilisé A. Hurwitz, "*Ueber die Trägheitsformen eines algebraischen Moduls*", *Annali di Matematica* (3a seria) 20 (1913) avec des simplifications qui m'étaient propres, et "*Neue Begründung der Eliminations- und Resultantentheorie*", *Nieuw Archief voor Wiskunde* 15 (1928), p. 301.

Le paragraphe 79 est tiré de mon article "*Der Multiplizitätsbegriff der algebraischen Geometrie*", *Mathematische Annalen* 97 (1927), p. 756.

En résumé, on peut dire que l'ensemble du chapitre 11 est étroitement lié aux travaux d'Emmy Noether sur la théorie de l'élimination (*Mathematische Annalen* 90, p. 229) et à mes propres travaux sur les fondements de la géométrie algébrique.

Algèbres et Représentations

À mon arrivée à Göttingen, j'ai suivi le cours d'Emmy Noether "*Gruppentheorie und hyperkomplexe Zahlen*" en 1924/25. L'un des principaux sujets de ce cours était la théorie des algèbres sur corps arbitraires de MacLagan Wedderburn. Le même sujet a été traité, sous une forme bien améliorée, dans son cours du même titre en 1927/28, qui proposait également un traitement tout à fait nouveau des représentations de groupes et d'algèbres. J'ai pris des notes de ce dernier cours, et ces notes ont servi de base à la publication d'Emmy Noether dans *Mathematische Zeitschrift* 30 (1929), p. 641. Les chapitres 16 ("*Theorie der hyperkomplexen Grössen*") et 17 ("*Darstellungstheorie der Gruppen und hyperkomplexen Grössen*") sont presque entièrement dus à Emmy Noether.

Seul le paragraphe § 127, consacré aux représentations des groupes symétriques S_n , provient d'une communication orale de John von Neumann, comme indiqué en note de bas de page.

Göttingen et Hambourg

Mon premier séjour à Göttingen ne dura qu'un an, de 1924 à 1925. À cette époque, l'équipe permanente de l'Institut de mathématiques était composée de Hilbert, Herglotz, Landau, Runge, Courant, Emmy Noether et Felix Bernstein. Une magnifique constellation !

Parmi les "Privatdozenten", je cite ceux à qui je dois le plus : Alexander Ostrowski, Helmut Kneser, Paul Bernays et Otto Neugebauer, l'historien des sciences. Des invités de marque venus du monde entier : Hermann Weyl, Caratheodory, John von Neumann, Siegel, Hasse, Richard Brauer, Heinz Hopf, Paul Alexandroff, Kuratowski, Skolem, Niels et Harald Bohr, Rolf Nevanlinna, Oswald Veblen, G.D. Birkhoff, Norbert Wiener et bien d'autres.

J'ai appris la logique mathématique principalement grâce aux *Principia Mathematica* de Russell et Whitehead, et la théorie des ensembles grâce aux travaux de Felix Bernstein et Zermelo. J'ai appris les méthodes de la physique mathématique auprès de Courant et de ses jeunes élèves, Hans Lewy et Kurt Friedrichs. En topologie, mes maîtres étaient Alexandroff, Kuratowski et Kneser ; j'ai également étudié avec une grande admiration les travaux d'Alexander. J'ai appris la théorie algébrique des nombres principalement grâce au livre de Hecke et au célèbre "*Zahlbericht*" de Hilbert. En géométrie algébrique, les travaux de Max Noether et ceux des grands géomètres italiens Severi, Castelnuovo et Enriques ont été une source inépuisable d'inspiration.

En 1925, je retournai aux Pays-Bas pour un an. En 1926, j'obtins mon doctorat avec une thèse dans laquelle fut développé un programme pour les fondements de la géométrie algébrique. Je me rendis ensuite à Hambourg, en tant que boursier Rockefeller, pour étudier avec Hecke, Artin et Schreier. Artin donna un cours d'algèbre à l'été 1926. Il avait promis d'écrire un livre sur l'algèbre pour la "Série Jaune" de Springer. Nous décidâmes que je prendrais des notes de cours et que nous écririons le livre ensemble. Courant, l'éditeur de la série, accepta. Les cours d'Artin étaient merveilleux. Je révisai mes notes et les lui montrai chapitre après chapitre. Il fut parfaitement satisfait et me dit : "Pourquoi n'écris-tu pas le livre en entier ?"

Les principaux sujets des cours d'Artin étaient les corps et la théorie de Galois. En théorie des corps, Artin suivait principalement Steinitz, et je me contentai de réviser mes notes. Il en va de même pour la théorie de Galois : la présentation donnée dans mon livre est celle d'Artin.

Bien sûr, Artin a dû expliquer, dès le début de son cours, des notions fondamentales telles que groupe, diviseur normal, groupe de facteurs, anneau, idéal, corps et polynôme, et démontrer des théorèmes tels que l'homomorphisme et les théorèmes de factorisation unique pour les entiers et les polynômes. Ces notions étaient généralement connues. Dans la plupart des cas, je me suis contenté de reproduire les démonstrations d'Artin à partir de mes notes.

J'ai rencontré Artin et Schreier presque quotidiennement pendant deux ou trois semestres. J'ai eu le grand plaisir de les voir découvrir la théorie des "corps réels" et comment Artin a démontré son

célèbre théorème sur la représentation des fonctions définies comme sommes de carrés. J'ai inclus tout cela dans mon livre (chapitre 10). Mes sources étaient, bien sûr, les deux articles d'Artin et Schreier dans "*Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar Hamburg*" 5 (1926), p. 83 et 100.

Les chapitres d'introduction du volume 1

Le chapitre 1, "Destinations et biens", a été écrit comme chapitre d'introduction à une époque où le reste du volume 1 était presque terminé. Le contenu des chapitres 1-2 et 4-5 était alors généralement connu. L'histoire du § 3 a été présentée plus haut dans cet article.

Dans les chapitres 2 et 3, j'ai principalement suivi les cours d'Artin et de Noether.

Le chapitre 4, sur les polynômes, contient du matériel classique, mais je suis le seul auteur du § 18, sur la différenciation. Dans le § 22 ("*Irreduzibilitätskriterien*"), j'ai utilisé les sources indiquées dans la note de bas de page de la page 79 de la première édition : Schönemann, Netto, Dumas, Ore, etc.

L'article 23 ("*Durchführung der Faktorzerlegung in endlich vielen Schritten*") est basé sur les idées de Kronecker.

Chapitres 5 à 10 du volume 1

Dans la première partie de cet article, j'ai déjà donné quelques explications concernant les chapitres 6 ("*Fortsetzung der Gruppen-theorie*") et 8 ("*Ordnung und Wohlordnung von Mengen*"). Les chapitres 5, 7 et 9-10 restants du volume 1 traitent tous de la théorie des champs.

Au chapitre 5 ("*Körpertheorie*"), j'ai principalement suivi Artin et Steinitz. Pour le paragraphe § 35, j'ai utilisé le cours de Noether sur les systèmes hypercomplexes.

Le paragraphe 37 est nouveau. Grete Herrmann, élève d'Emmy Noether, avait traité le même problème dans sa thèse. Son traitement présentait une lacune, que j'ai soulignée dans un article intitulé "*Eine Bemerkung über die Unzerlegbarkeit von Polynomen*", *Mathematische Annalen* 102 (1930), p. 738. Grete Herrmann n'avait pas suivi de formation en mathématiques intuitionnistes, contrairement à moi, car j'avais étudié sous la direction de L.E.J. Brouwer à Amsterdam. J'ai donc immédiatement remarqué son erreur et, en utilisant les méthodes de Brouwer, j'ai construit un contre-exemple à l'une de ses affirmations.

Le chapitre 7 sur la théorie de Galois s'appuyait sur le cours d'Artin (voir mon article "*Die Galois-Theorie von Heinrich Weber bis Emil Artin*", *Archives pour l'histoire des sciences exactes*, 1972, p. 240). Seuls les § 54 et § 56 (§ 65 et § 66 dans l'édition de poche) ont été ajoutés par moi-même.

Le chapitre 9 est entièrement tiré de l'article classique d'E. Steinitz, "*Algebraische Theorie der Körper*", *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 137 (1910).

Dans le chapitre 10, deux sujets ont été combinés, qui dans les éditions ultérieures ont été traités dans des chapitres séparés, à savoir :

- (a) la théorie d'Artin-Schreier des corps réels et la représentation des fonctions rationnelles positives comme sommes de carrés (§ 81-83 de l'édition de poche, § 68-70 de la première édition).
- (b) les corps à valuations et les corps p -adiques (§ 65 de la première édition, § 18 de l'édition de poche).

Pour le sujet (a), j'ai suivi de près les articles d'Artin et Schreier cités précédemment. J'ai également utilisé un article de R. Baer, "*Ueber nichtarchimedisch geordnete Körper*", *Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie, Abhandlung* 8 (1927). En introduction, j'ai ajouté la définition du § 64, "Définition des nombres réels". Cette définition du § 64 s'inspire de la construction cantorienne des nombres réels comme "*Fundamentalfolgen*", mais elle est rédigée de manière à ce que la généralisation aux corps à valuations devienne évidente. Cette généralisation a été présentée dans le paragraphe 65.

Pour la partie (b), c'est-à-dire pour le § 65, les principales sources étaient les articles de Hensel, Kürschak et Ostrowski sur les corps p -adiques et les corps avec valuations, cités p. 220 (Vol. 1 de la première édition). Notez qu'Ostrowski était à Göttingen lorsque j'ai écrit le Volume 1, et Hasse, le meilleur de Hensel et un grand propagandiste des méthodes p -adiques, venait souvent à Göttingen. D'autres articles sur les valuations sont cités p. 206 de l'édition de poche du Volume 2, et dans mon article "*Algebra seit Galois*", *Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung* 68 (1966), p. 155.

Dans les éditions ultérieures, lorsque l'importance des valuations devint de plus en plus évidente, un chapitre distinct fut consacré aux corps avec valuations (chapitre 18 de l'édition de poche). La principale source était l'article le plus important d'Ostrowski sur les valuations, paru dans *Mathematische Zeitschrift* 39 (1934), p. 296-404.

Plus tard encore, un chapitre sur l'algèbre topologique a été ajouté, contenant la théorie des groupes, anneaux et corps topologiques. Le premier à développer ces théories de manière systématique fut mon ami D. van Dantzig à Amsterdam. Dans la quatrième édition et les suivantes, je me suis principalement basé sur l'article fondamental de van Dantzig "*Zur topologischen Algebra I : Kompletierungstheorie*", *Mathematische Annalen* 107 (1933), p. 587. J'ai également utilisé les articles de Kaplanski, Kowalski et Pontryagin cités à la page 292 de l'édition de poche du volume 2.

Un autre ajout ultérieur au volume 2 (premier de la quatrième édition, 1959) était le chapitre "*Algebraische Funktionen einer Variablen*" (chapitre 19 de l'édition de poche). Ce chapitre se termine par une démonstration du théorème de Riemann-Roch basée sur les idées de Dedekind et Weber, Emmy Noether, F.K. Schmidt, Severi et André Weil. Pour l'historique de cette démonstration, voir l'introduction du chapitre 19 de l'édition de poche.

Également dans la quatrième édition, le chapitre sur les algèbres (chapitre 13 de l'édition de poche) a été considérablement augmenté, et les démonstrations ont été simplifiées en combinant les méthodes originales d'Emmy Noether avec celles de Jacobson. Dans l'édition de poche, des sous-paragraphes sur les algèbres de Grassmann et Clifford ont été ajoutées. Les sources de ces sous-paragraphes sont listées à la fin de l'édition de poche (vol. 2, p. 42).