Symétries interdites

Monsieur Roger Penrose

(20 premières minutes de la conférence)

Eh bien, merci beaucoup pour cette introduction, j'espère que je pourrai être à la hauteur. Tout d'abord, laissez-moi... En fait, la principale chose dont je veux parler est quelque chose qui n'est pas tout à fait terminé, à savoir, eh bien, vous voyez, ce que vous voyez ici devant vous, c'est en fait un dessin ou quoi que ce soit d'autre. faire ces jours-ci avec des ordinateurs, je suppose, du nouveau bâtiment de mathématiques, c'est la seule chose qui est en couleur, qui n'est pas tout à fait terminée. C'est assez fini pour que j'aie un bureau quelque part là-bas, je ne peux pas vraiment entrer dedans, il n'y a qu'une chaise et deux bureaux et tout un tas de caisses. Ce n'est donc pas encore très accueillant, mais c'est en partie ma faute, car j'ai récupéré trop de choses dans mon autre bureau.

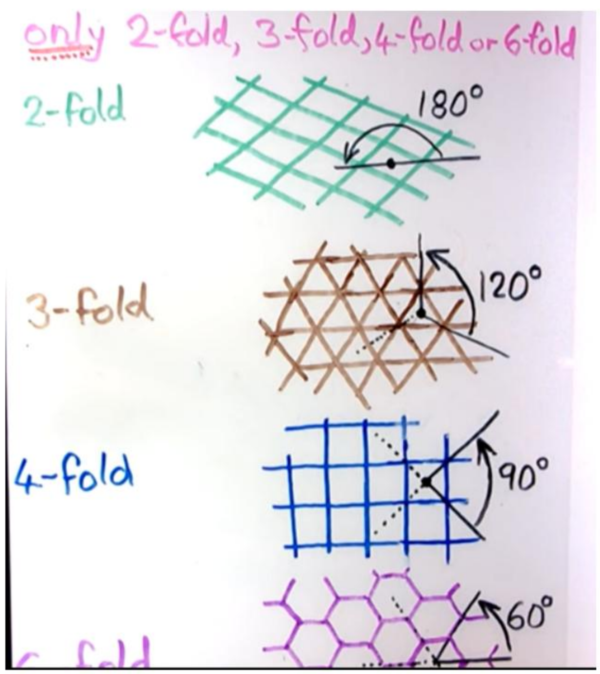
Mais ici, il y aura des tuiles de zone avec un arrangement particulier qui est basé sur des choses que j'ai faites. Je veux donc expliquer cela. C'est vraiment le but de cette conversation. Je reviendrai à l'explication détaillée de ce qui se passe là-bas vers la fin de l'exposé. Je dirai beaucoup de choses sur d'autres utilisations architecturales de ces pavages dans d'autres parties du monde, mais avant cela, je veux expliquer les pavages eux-mêmes.

Transcription par Denise Vella-Chemla, octobre 2022, de la vidéo Symétrie cristalline interdite en mathématiques et architecture visionnable ici : https://www.youtube-nocookie.com/embed/th3YMEamzmw, Royal Institution (RI) Événement, 2013.

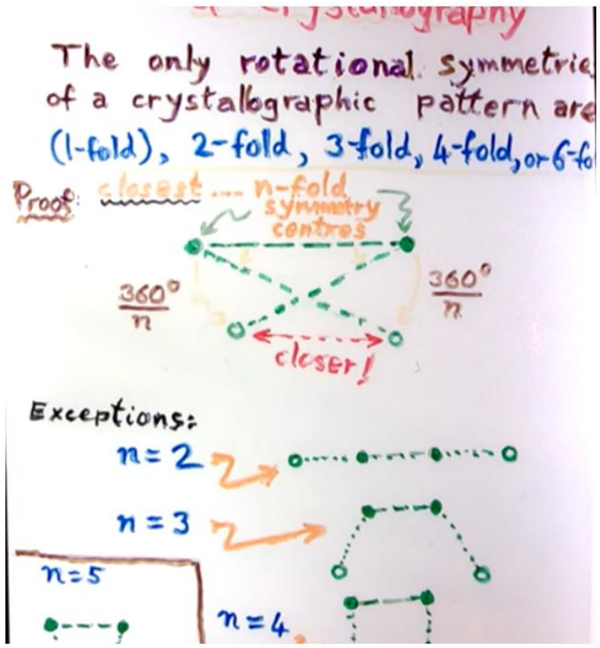
Greg Jenkins, Education Media Services,
University of Oxford.

The Royal Institution
Science Lives Here

Alors laissez-moi... eh bien, je dois passer à la photo suivante, je pense. Ce que vous pouvez voir ici, l'entrée principale est juste ici et vous devez marcher sur mes tuiles pour entrer dans le bâtiment. Et ce n'est pas tout à fait fini, vous pourriez voir des événements là-bas où ce n'est pas fini, il y en a d'autres que des événements à l'arrière qui ne sont pas sur la photo très commodément où ce n'est pas fini non plus. Ce n'est clairement pas fini . (Rires). Ah mais alors et celle du milieu n'est pas finie je pense que ça va être la dernière tuile qui est placée dans son certain sens, c'est central dans toute la conception mais vous pouvez voir certaines sortes de régularités en la regardant. Mais pas tout à fait évident quelles sont ces régularités.

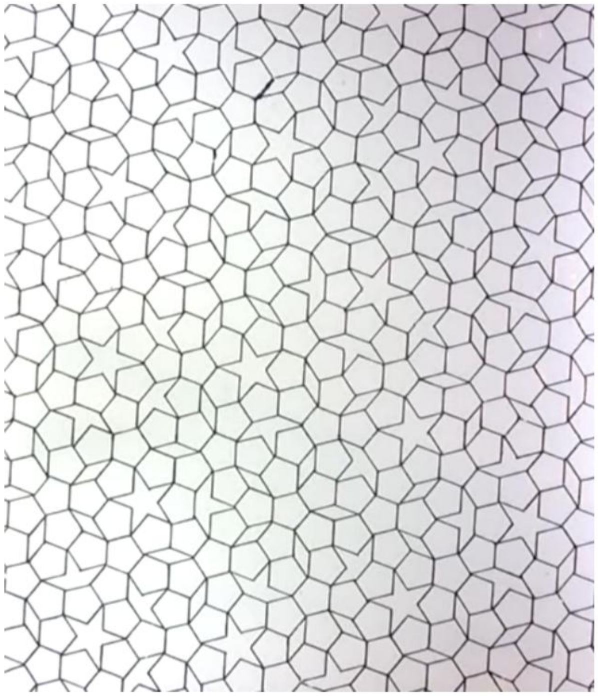


Je vais donc vous expliquer de quoi il s'agit. Mais avant cela, permettez-moi d'expliquer l'idée générale des symétries cristallines autorisées et de celles qui ne le sont pas. Et puis-je passer au visualiseur s'il vous plaît... Merci tu. J'utilise ce genre de technologie à l'ancienne parce que c'est la seule que je comprends. Ce sont les symétries cristallographiques. Nous avons donc des symétries doubles, un motif régulier de parallélogrammes aura une symétrie double autour du centre de chaque parallélogramme. Triple si vous avez des triangles équilatéraux, alors autour du centre de n'importe quel triangle, vous aurez l'ensemble du motif a une symétrie triple, vous faites pivoter 120 degrés, et l'ensemble du motif revient sur lui-même. Carrés quadruples qui sont les plus familiers. Et six fois, nous avons le motif familier des hexagones. Et c'est un théorème de la théorie mathématique que ces symétries sont les seules que vous puissiez avoir. Quand je dis cela, je veux dire en plus de la symétrie translationnelle, vous devez donc avoir une symétrie translationnelle qui signifie que vous faites glisser l'ensemble de l'image parallèlement à elle-même dans certaines directions et que le motif se replie sur lui-même.



Donc, vous voulez avoir une symétrie de rotation et, avec cela, une symétrie de translation. Et je veux vous donner un argument rapide pour montrer que c'est le cas : ce sont vraiment les seules symétries que vous pouvez avoir ; et c'est une sorte de théorème standard. Supposons que vous ayez un motif de points ou quelque chose qui ne ressemble pas à une fractale. Ils sont donc discrets et ont une sorte de distances minimales finies entre les points et les choses que vous êtes... Vous pouvez juste imaginer un modèle. Et ce motif a une symétrie de translation pour que vous puissiez le faire glisser et il entre en lui-même, mais aussi une symétrie de rotation pour que vous tourniez à 360 degrés sur n où n est votre degré de symétrie et le motif entre en lui-même. Alors ce que je vais proposer, c'est que vous ayez de tels points de symétrie. Voici donc un point de symétrie n fois et il y a un autre point d'intérêt : s'il y en a un, il doit y en avoir un autre car si tout le motif glisse, alors celui-ci ira dans un autre. Il doit s'agir d'un autre point de symétrie n fois. Il doit donc en avoir plus d'un. S'il doit en avoir plus d'un, il y en aura quelque part dans le motif, deux d'entre eux aussi proches que possible. Donc je vais choisir ceux-là, tant que ce n'est pas une fractale ou quelque chose de stupide comme ça, choisir une paire de points qui sont aussi proches que possible, et ce sont ceux là-haut. Maintenant, vous voyez, je vais faire pivoter celui-ci de 360 degrés sur n jusqu'à ce point, et celui-ci dans l'autre sens de 360 degrés sur n jusqu'à ce point, et ces deux seront alors plus proches, ce qui contredit que c'est le plus proche . C'est donc une contradiction, à moins que n ne soit égal à deux, quand ils ne sont pas plus proches, ils sont beaucoup plus éloignés. Lorsque n est égal à trois, ils ne sont pas plus proches, ils sont plus éloignés.

Lorsque n est égal à six, c'est au-dessus. Lorsque n = 5, ils coïncident donc vous vous en sortez. Dans le cas où n est égal à quatre, bien sûr, ils sont à la même distance qu'avant, donc ça va. Mais n est égal à cinq par exemple, ils sont plus proches et tout ce qui est supérieur à six ils se croiseront comme ici et ils seront certainement plus proches ;

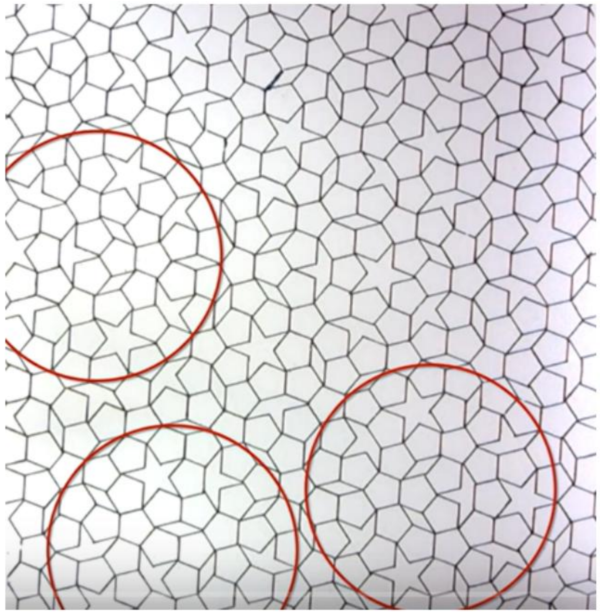


Cela vous indique donc que les seules symétries cristallines que vous pouvez avoir sont celles données : deux, trois, quatre et six. D'accord, direct, d'accord.

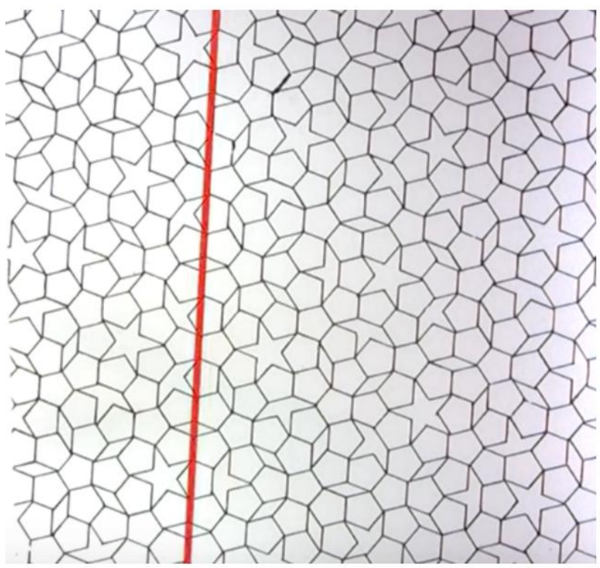
Eh bien, qu'en est-il de ce modèle, eh bien, il a beaucoup de régularité et il a une sorte de quintuple Ness également en fait, vous pouvez voir diverses régions qui sont quintuples de symétrie jusqu'à un certain point et qui ont une symétrie de translation vers le haut jusqu'à un certain point, en fait, laissez-moi vous dire que si vous me donnez un pourcentage inférieur à 100 %, donc à 99,9 %, je pourrais faire glisser cette image sur elle-même afin que le motif corresponde à ce que vous aviez avant à ce pourcentage de 99,9 % de tout ce qu'il était et a aussi la symétrie de rotation quintuple symétrie deux quatre-vingt-dix-neuf points quoi qu'il en soit et vous pourriez bien dire pourquoi le théorème ne fonctionne pas et l'argument est bien vous revenez à la preuve ici[1] et vous voyez si ce point ici était ce n'est pas parfait, vous voyez, supposons que ce ne soit que quatre-vingt-dix-neuf virgule neuf points et que c'est quatre-vingt-dix-neuf virgule neuf points, alors cela risque de perdre un peu de précision, ce sera probablement neuf neuf virgule huit, et celui-là est probablement quatre-vingt-dix-neuf virgule huit s o que bien qu'ils soient plus proches, ils ne sont pas aussi bons. Vous perdez donc un peu de symétrie. Mais chaque fois que vous effectuez cet argument ici, mais les points peuvent être plus proches. Il y a donc un compromis entre ces deux choses. Et c'est exactement ce qui se passe avec ce modèle.

Bref, je vais juste vous montrer ça. Je pense qu'il vaut la peine de souligner un certain nombre de caractéristiques de ce modèle... Mmmm, par exemple, eh bien, j'ai en fait ces bagues ici. Je parlerai de ceux-là plus tard.

1Voir photo 4.



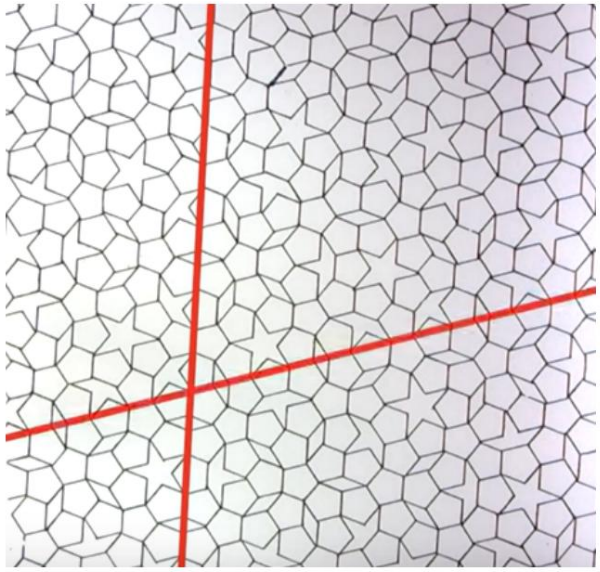
C'est un décagone régulier multiplié par 10. Et chaque fois que vous trouvez un de ces décagones réguliers, il y a toujours dix pentagones qui l'entourent. C'est toujours le cas, partout où vous en trouvez un, il y en a un autre ici.
Parfois, vous les trouvez qui se chevauchent, comme celui-ci et celui-ci,



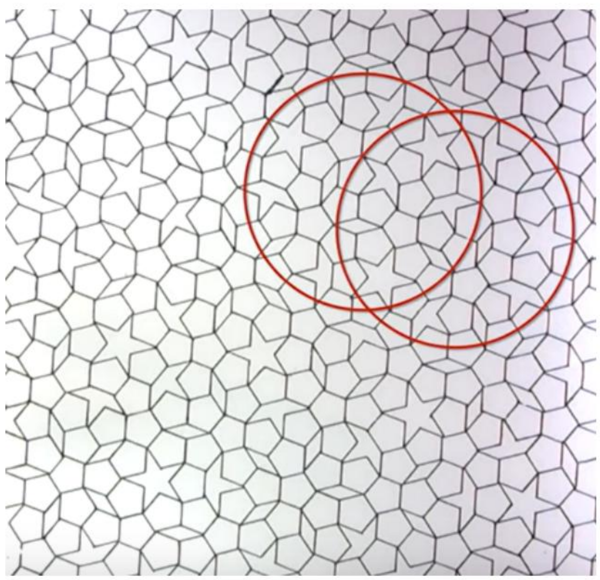
et vous obtenez toujours des anneaux de dix pentagones, ils se croisent, c'est tout, c'est donc une caractéristique générale.

Une autre caractéristique par exemple, qui est peut-être un peu plus évidente d'où je suis, eh bien, cela dépend de l'endroit où vous êtes assis, si vous êtes assis sur le bord, c'est probablement assez évident, que vous voyez ces lignes ligne

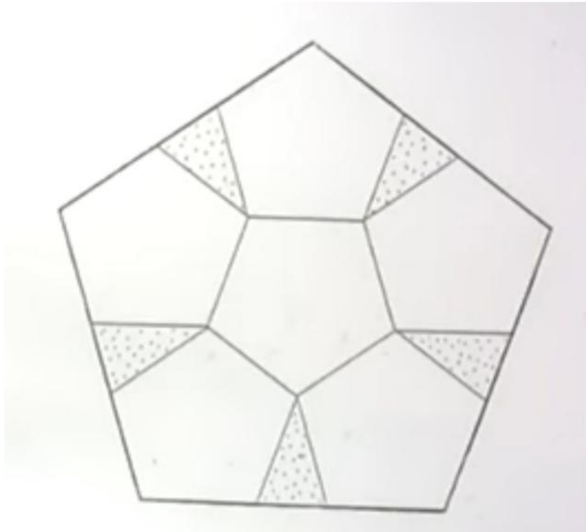
en haut.



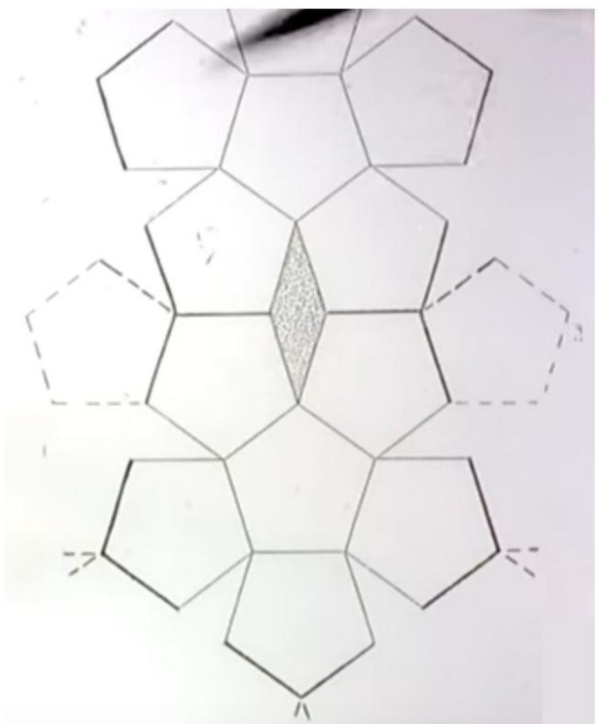
Ici, j'ai partout où vous trouvez une ligne dans l'image et vous placez votre règle le long de laquelle vous trouvez simplement d'autres lignes qui s'y trouvent et leur densité ne diminue pas, peu importe où vous le faites.



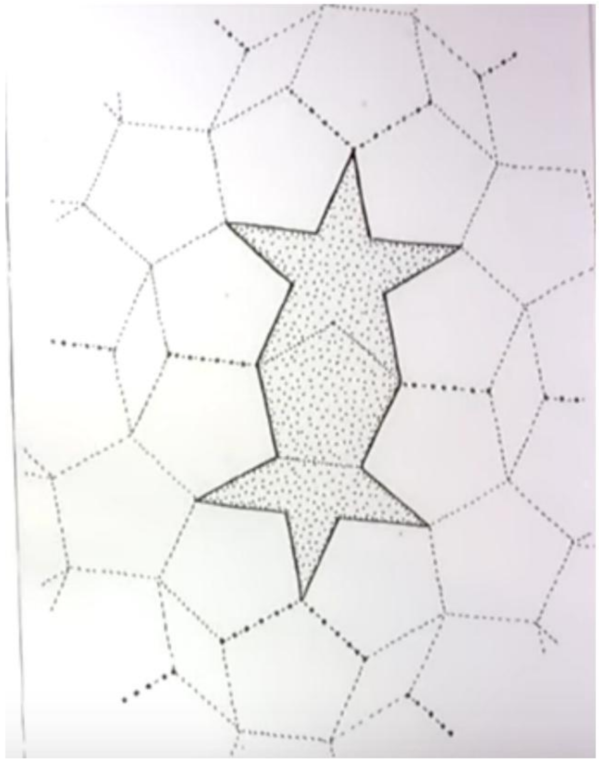
Donc le motif a beaucoup de régularité et cette régularité, bon, ce n'est pas tout à fait évident à la manière... Bon, je vais d'abord vous dire comment il a été construit. C'est construit à partir de quelque chose de très simple : ici nous avons un pentagone régulier, subdivisé en six plus petits je pense que c'est facile si je le fais juste ici pentagone régulier six plus petits avec quelques petits trous ici.



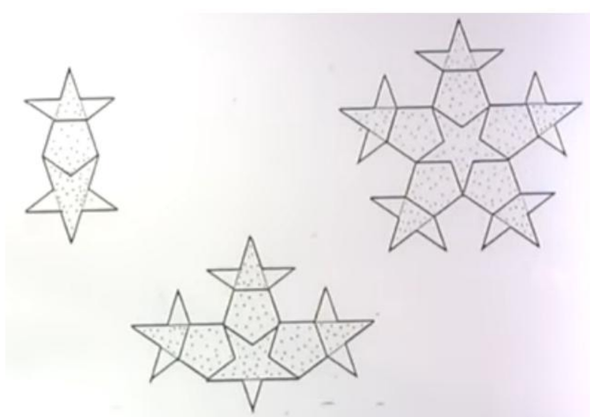
Maintenant, ce que je vais faire, c'est agrandir ça pour que les plus petits pentagones aient la même taille que celui d'origine, puis subdiviser chacun de ceux-ci, exploser, subdiviser, agrandir, subdiviser... Maintenant, si je fais ça ça ne marche pas tout à fait : et j'imagine juste que je l'ai maintenant fait exploser donc c'était un plus grand pentagone, en quelque sorte ici et cela a été subdivisé, puis j'ai recommencé à diviser, et vous remarquez qu'il y avait un petit espace ici et ce petit espace rejoint un autre petit espace de sorte que nous avons une petite forme de losange, un trou dans le motif.

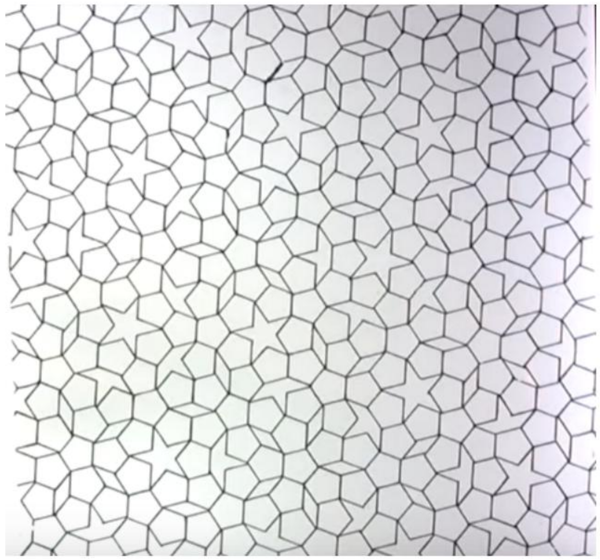


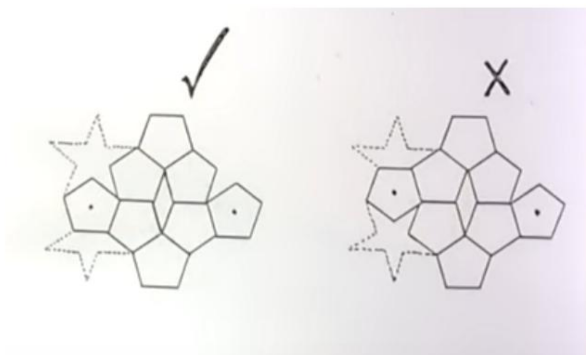
D'accord. Maintenant, je vais le refaire. Et quand je recommencerai, si je subdivise cela, il y aura un petit espace là-bas, donc ce losange fera pousser des pointes. Et ça ressemblera à ça.



Maintenant, quand il fait ça, j'ai trouvé qu'il y avait juste de la place pour mettre un autre pentagone à l'intérieur . (Rires). D'accord et ensuite la prochaine étape, cela va faire pousser des pointes et vous obtenez quelque chose qui ressemble à... Eh bien, vous voyez, je dois souligner que les formes que j'ai, le pentagone d'origine, cette étoile maintenant que j'appelle un pentacore c'est un pentacore, et ce truc que j'appelle la casquette de la justice, eh bien c'est plus comme une casquette de la justice, de cette façon. Ce sont donc des casquettes de justice, des pentacores et des losanges, nous avions les petits losanges auparavant lorsque vous faites pousser des pointes pour chacune de ces formes que vous passez à l'étape suivante de la hiérarchie, vous pouvez toujours trouver que vous pouvez combler les lacunes avec des formes qui que vous aviez avant, pour que vous puissiez le gonfler, le remplir avec ces formes, le gonfler, le remplir. Et cela se terminera par quelque chose comme ça, eh bien, si vous avez fait juste un peu attention à cette petite subtilité que je dois mentionner.



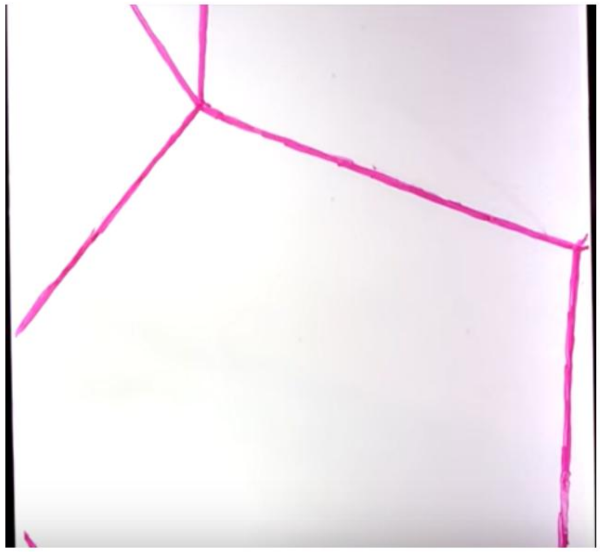




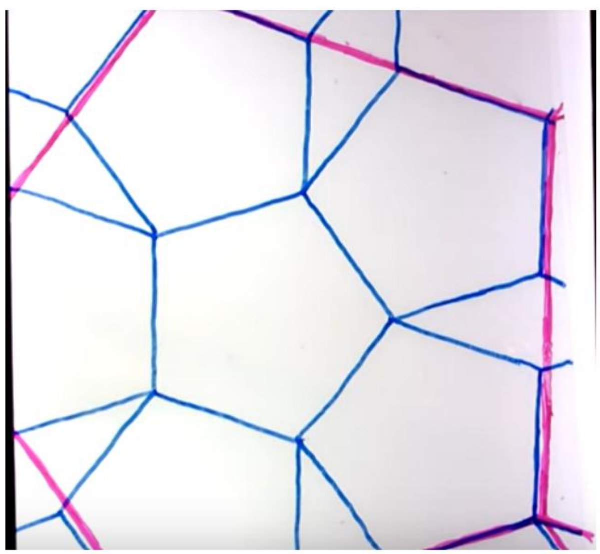
C'est intéressant parce que j'ai découvert après avoir fait cela parce qu'un Japonais avait fait exactement la même chose sauf qu'il avait fait le mauvais choix ici, et cela ne mène pas à ce que vous obtenez.

L'autre chose que je voulais dire : maintenant j'ai mis une coche dessus, et une croix dessus, alors voici le losange avec ses pointes et j'y ai mis un pentagone comme ça, rappelez-vous, vous voyez ça, c'est le losange, avec ses pointes, et je peux mettre un pentagone ici ou là-bas, il y a le choix. Maintenant, ce que je veux faire, c'est forcer l'un de ces deux choix. Et si vous regardez ce losange hérissé ici, est-ce qu'il descend ou dépasse ? Eh bien, ce que vous faites, c'est que vous regardez d'un côté ou de l'autre et je vous dis juste ceci, mais il arrive que vous trouviez toujours un motif de pentagones comme celui-ci, sauf celui-ci peut -être (pointant le pentagone à droite de l'image, dans la "bonne" image de gauche) en bas ou en haut, tu réfléchis ensuite dans le losange du milieu pour qu'on y aille si c'est en bas, si c'est en bas, ça doit être dessus le fond ; si celui-ci est en haut, celui-là sera en haut. Si vous faites le choix que l'homme japonais a pris, celui-ci, alors vous trouvez que la prochaine étape, ça va mal, alors que celui-ci continue pour toujours et donc le modèle avec la subdivision qui explose, subdivise, explose, deviendra juste plus grand et de plus en plus gros, et couvrir autant de l'avion que vous le souhaitez, couvrira en fait tout l'avion.

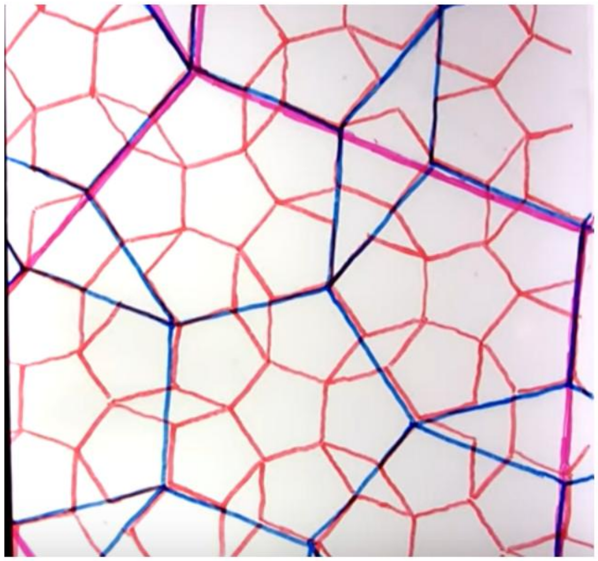
Bon maintenant, je veux montrer que de l'arrière maintenant. Supposons que nous ayons un grand pentagone ici.

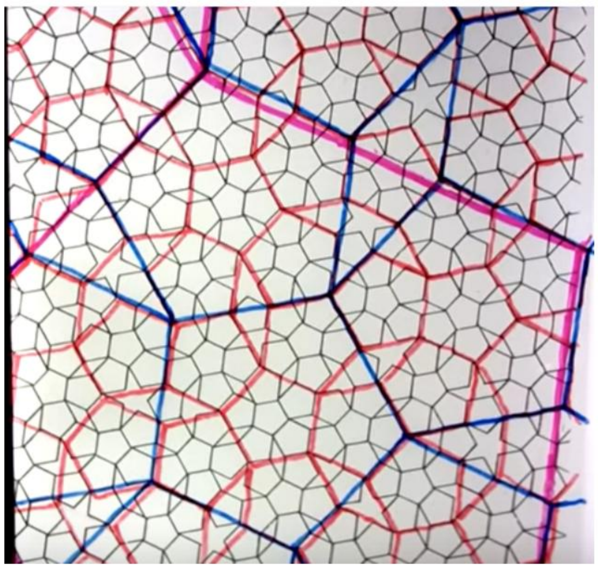


J'espère que la majeure partie de ce Pentagone est à l'écran, il y en a un autre assis ici, et un autre assis ici, et un assis là, et assis ici, et ainsi de suite. Mais il y a un grand pentagone et ce que je veux faire de ce grand pentagone est subdiviser de la manière que j'ai décrite, c'est parti.



Et puis je subdivise à nouveau là ouais, puis je subdivise à nouveau et vous obtenez le modèle que je viens de vous montrer. D'accord.

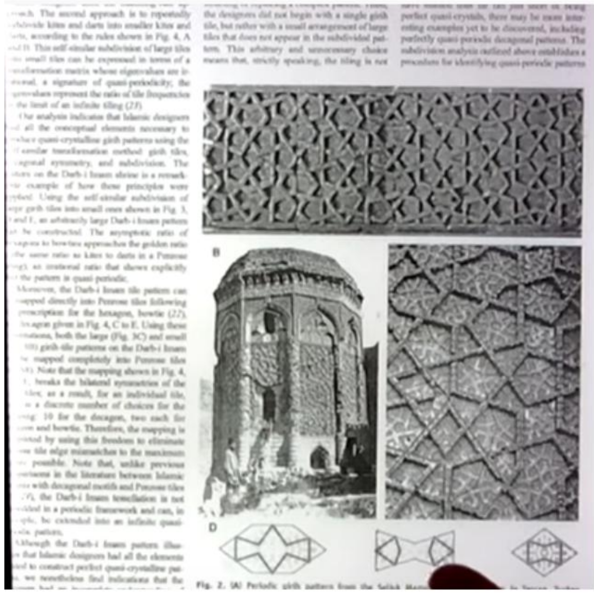




Maintenant, où est ce grand Pentagone ?

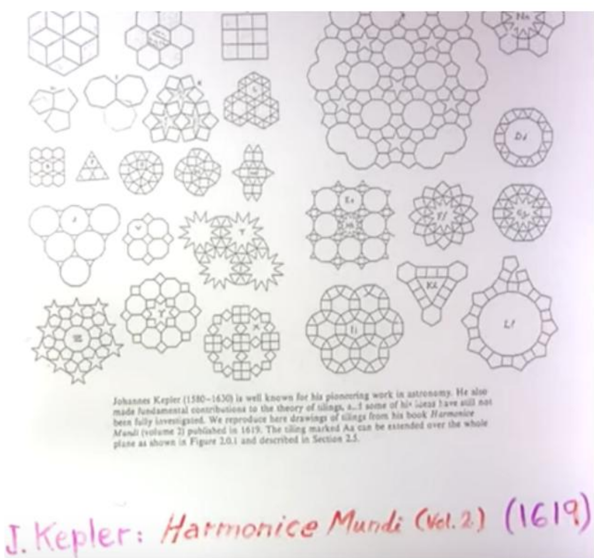
(Des rires)

Maintenant, vous voyez, il y a quelque chose d'intéressant à ce sujet, que le modèle a une plus grande uniformité, que ce que vous auriez pu penser à partir de la construction hiérarchique. En fait, vous savez que je dois le trouver, je peux probablement le trouver, mais je n'essaierai même pas. Elle présente une plus grande uniformité que ne semble le suggérer l'organisation hiérarchique. Mais pourtant, leur hiérarchie est cachée là-dedans tout le temps. Maintenant, parfois, les gens font remarquer que ce genre de chose était dans l'art islamique ancien. Et il y a un article ici que je vais vous montrer.

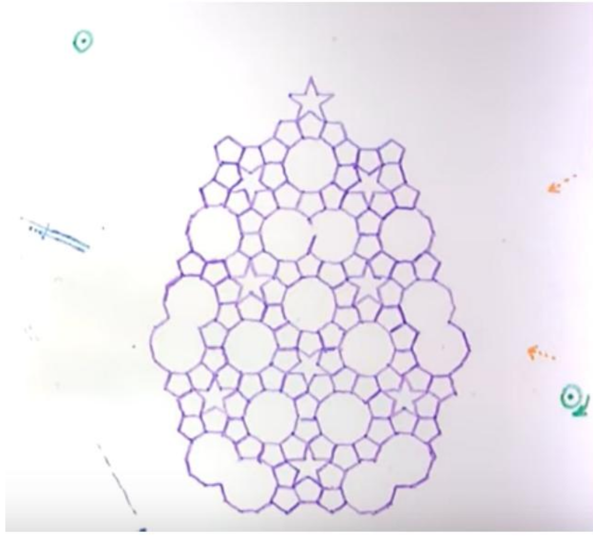


Et il y a beaucoup d'art islamique ancien très intéressant, où vous voyez des régions de symétrie quintuple et décuple, des choses fascinantes, mais je n'ai vu aucune indication du type même de structure stricte qui sous-tend l'arrangement hiérarchique dans ce sens strict, ou quelque chose comme ça. Néanmoins, ils sont fascinants, mais ce n'est pas si clair quel est le lien profond avec les choses que je viens de vous montrer.

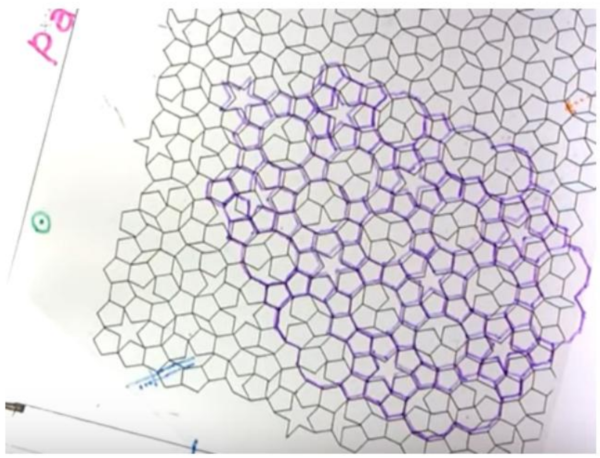
Cependant, si vous allez un peu plus récemment que ces anciennes choses islamiques, à savoir à 1619, alors nous trouvons dans les travaux de Johannes Kepler, le célèbre astronome, dans un livre qu'il a écrit intitulé Harmonice Mundi.
Et dans ce livre, vous trouverez ces images fascinantes.



Maintenant, je dois dire que mon père possédait un exemplaire de ce livre, et j'avais vu cette photo. Je l'avais vu même si ce n'était pas dans mon esprit quand j'ai commencé à faire ça, sauf que d'une manière ou d'une autre, j'étais sans aucun doute influencé de penser que les pentagones réduisaient une perte sèche (?) Vous voyez ce qu'il a fait, des choses fascinantes avec les pentagones et d'autres choses avec des pentagones. Mais cette conception en particulier, je tiens à le souligner. Et comme je l'ai découvert plus tard à ma grande surprise : ici, nous avons cette image dessinée en plus grand, c'est exactement la même image dans Kepler

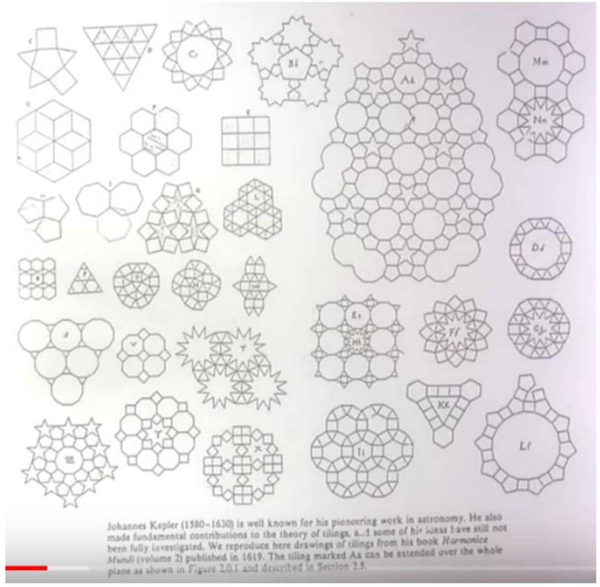


y compris une petite ligne ici[2] , ce que je ne sais pas trop pourquoi il l'a mis là, mais il l'a fait.

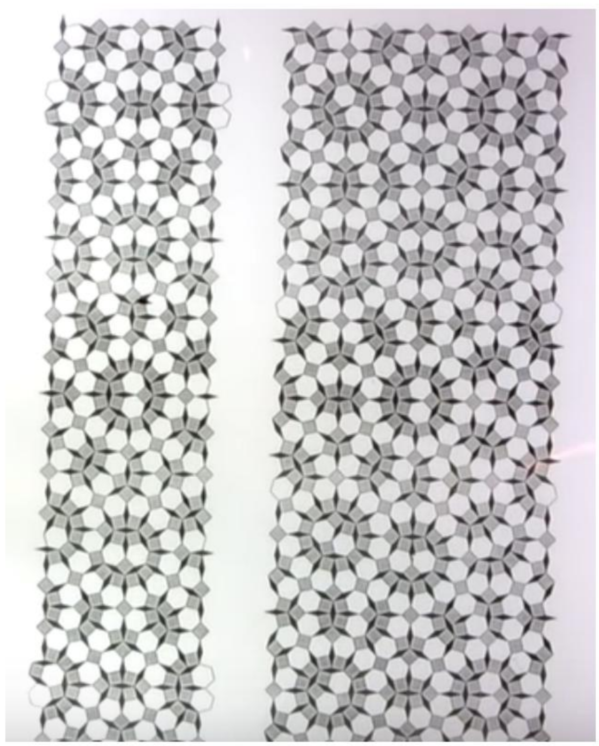


Voici maintenant mon modèle du Pentagone. Maintenant, j'ai mis quelques marques ici si je peux trouver exactement où. Vous verrez que le modèle de Kepler correspond exactement à cela, y compris cette petite ligne là. Et donc .. Qu'est ce qu'il faisait ? Je ne sais pas ; Je soupçonne qu'il pensait probablement, je veux dire, ils ne connaissaient même pas les atomes et ainsi de suite, et les cristaux, je soupçonne qu'il était peut-être intéressé par une sorte d'arrangement atomique et peut-être qu'il connaissait les cristaux et il se demandait peut-être où les choses biologiques. Parce que vous voyez souvent une symétrie quintuple et ainsi de suite en biologie, c'est peut-être quelque chose qui sous-tend cela. Je n'en ai aucune idée, et je n'ai aucune idée de la façon dont il avait l'intention de poursuivre ce schéma. Il y a des gens qui ont essayé d'autres suites auxquelles je ne crois pas. Je pense que sa suite ressemblait probablement beaucoup plus à ce que je faisais ici, je ne serais pas du tout surpris. Mais il est fascinant qu'il l'ait effectivement fait, qu'il ait eu ce grand intérêt pour ces choses. Il s'intéressait à cette chose appelée le problème de Kepler qui consiste à regrouper les sphères aussi étroitement que possible dans un espace tridimensionnel, et ce problème n'a pas été résolu pendant longtemps et ce n'est que récemment qu'il a été trié à l'aide d'un ordinateur, je peux dire, et il s'est avéré que Kepler avait raison et ce qu'il a suggéré.

[2] Montrant une petite ligne en deux grands décagones, en haut au milieu de la figure.



Vous voyez aussi d'autres symétries affichées comme celles-ci3 et en fait vous trouvez ces choses aussi dans des quasi-cristaux ; Je n'allais pas vous montrer trop de ces autres, ça prend juste trop de temps,



Je viens de vous montrer ici 12-4-1. C'est par certaines personnes (Galen et H.-U.Nissen4) et c'est une conception (Nisssen est une personne expérimentale et il avait en fait repéré des symétries d'ordre douze dans certains matériaux apparemment cristallins et il m'a montré le diagramme de diffraction qu'il a un histoire curieuse montrant le motif de diffraction et j'ai vu ce motif de petites taches où les électrons de diffraction rebondissent vraiment dans certaines directions. Et où ai-je déjà vu ce motif auparavant ? Je ne pouvais pas penser, je l'ai déjà vu, de

[3] (pointant F)
4 ?

où, je l'ai déjà vu et je me rends compte que c'est juste ici. Ce sont ces petites[5] petites pointes qui se trouvent aux coins de ce petit motif en Kepler. Que faisait-il ? Je n'ai pas le plus de brouillard, mais c'est fascinant de voir tout ce qu'il y avait dans ce petit ensemble de photos de Kepler.

En voici un autre avec cette symétrie 12 fois. Les 12 volets sont plutôt sympas. Il y en a aussi des octuples que Robert Ammann et quelqu'un d'autre6 produisent. Ils ne les ont jamais trouvés aussi attirants. Je pense que les quintuples et les douze volets sont aussi particulièrement beaux. Donc, mais je ne montre plus de version pour in donc je ne pense pas qu'ils aient été suffisamment utilisés dans les architectures. Bon, c'est l'idée de base.

[5] (montrant la figure F dans Kepler Harmonice Mundi)
6Beenker ?