

Opérateur sphéroïdal prolata et Zeta

Alain Connes, Henri Moscovici

Résumé : Dans cet article, nous décrivons une nouvelle propriété remarquable de l’extension auto-adjointe W_{sa} de l’opérateur sphéroïdal prolata introduite dans [1], [3]. La restriction de cet opérateur à l’intervalle J dont la fonction caractéristique commute avec lui est bien connue, a un spectre positif discret et est bien comprise ([14], [15], [16], [9]). Ce que nous avons découvert, c’est que la restriction de W_{sa} au complémentaire de J admet (outre une réplique du spectre positif ci-dessus) des valeurs propres négatives dont le comportement ultraviolet reproduit celui des carrés des zéros de la fonction zeta de Riemann. De plus, les fonctions propres leur correspondant appartiennent à l’espace de Sonin. Cette caractéristique s’accorde avec la preuve [4] de la positivité de Weil à la place archimédienne, qui utilise la compression de l’action de mise à l’échelle à l’espace de Sonin. Comme sous-produit, nous construisons une famille isospectrale d’opérateurs de Dirac dont les spectres ont le même comportement ultraviolet que les zéros de la fonction zeta de Riemann.

1. Introduction

Les fonctions d’onde sphéroïdales prolata jouent un rôle central dans [2] [4] [5] en relation avec la fonction zeta de Riemann. Dans toutes ces applications, elles apparaissent comme les fonctions propres d’un opérateur d’angle entre deux projections orthogonales dans l’espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R})^{ev}$ de fonctions de carrés intégrables sur \mathbb{R} . Ces projections dépendent d’un paramètre $\lambda > 0$, la projection P_λ est donnée par la multiplication par la fonction caractéristique de l’intervalle $[-\lambda, \lambda] \subset \mathbb{R}$. La projection \widehat{P}_λ est sa conjuguée par transformation de Fourier $\mathbb{F}_{e_{\mathbb{R}}}$ qui est l’opérateur unitaire dans $L^2(\mathbb{R})^{ev}$ défini par

$$\mathbb{F}_{e_{\mathbb{R}}}(\xi)(y) = \int \xi(x) \exp(-2\pi ixy) dx.$$

Dans toutes les applications ci-dessus des fonctions sphéroïdales prolata, l’existence miraculeuse, découverte par le groupe des laboratoires Bell ([14], [15], [16]), d’un opérateur différentiel W_λ commutant avec l’opérateur d’angle, joue seulement un rôle auxiliaire. Dans le présent article, nous découvrons un autre “miracle”: une étude minutieuse de l’extension naturelle auto-adjointe de W_λ introduite dans le lemme 6 de [1] (voir également le paragraphe 3.3 de [3]) à $L^2(\mathbb{R})$ montre que celle-ci a encore un spectre discret et que ses valeurs propres négatives reproduisent le comportement ultraviolet des carrés des zéros de la fonction zeta de Riemann. De façon similaire, le spectre positif correspond, dans le régime ultraviolet, aux zéros triviaux¹. Cette coïncidence est vérifiée pour deux valeurs $\lambda = 1$ et $\lambda = \sqrt{2}$. La raison conceptuelle de cette coïncidence est le lien entre l’opérateur

$$(W_\lambda \xi)(x) = -\partial_x(\lambda^2 - x^2)\partial_x \xi(x) + (2\pi\lambda)^2 x^2 \xi(x) \quad (1)$$

et le carré de l’opérateur de mise à l’échelle $S := x\partial_x$. Dans [4], la compression de $f(S)$ à l’espace de Sonin (pour $\lambda = 1$) s’est avérée être (cela a été montré) la racine de la positivité de Weil à la

A. Connes :
Collège de France, 3, rue d’Ulm , Paris, F-75005 France,
I.H.E.S. et The Ohio State University,
email : alain@connes.org

H. Moscovici :
Département de mathématiques, The Ohio State University, Columbus, OH 43210, USA
email : henri@math.ohio-state.edu

Le travail d’H. M. a été partiellement financé par la subvention NSF 1600541.

Traduction de l’article <https://alainconnes.org/wp-content/uploads/draft4.pdf>, Denise vella-Chemla, mars 2022.

¹non triviaux ?

place archimédienne sur des fonctions de test à support dans l'intervalle $[2^{-1/2}, 2^{1/2}]$, mais puisque l'espace de Sonin n'est pas préservé par la mise à l'échelle, on ne pouvait pas réduire la mise à l'échelle à cet espace. Il s'est avéré que W_λ commute avec la projection orthogonale de l'espace de Sonin. Donc on peut restreindre W_λ à l'espace de Sonin et la similarité spectrale ultraviolette avec les carrés des zéros non triviaux de la fonction zeta suggère qu'on a capturé spectralement la contribution de la place archimédienne au spectre mystérieux de zeta. En fait, en utilisant le procédé de Darboux, on construit une racine carrée du Dirac de W_λ dépendant d'un paramètre de déformation, et dont le spectre a le même comportement ultraviolet que les zéros de la fonction zeta de Riemann.

Notre article s'organise comme suit : dans le paragraphe 2, nous montrons qu'il existe une unique extension auto-adjointe W_{sa} de l'opérateur symétrique W_{min} défini sur l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ par (1). De plus, W_{sa} commute avec la transformation de Fourier et a un spectre discret non borné dans les deux directions. Dans le paragraphe 3, nous montrons que les vecteurs propres pour les valeurs propres négatives de W_{sa} appartiennent à l'espace de Sonin. Dans le paragraphe 4, nous calculons l'approximation semi-classique du nombre de valeurs propres négatives de W_{sa} dont la valeur absolue est inférieure à E^2 . Dans le paragraphe 5, nous utilisons la méthode de Darboux combinée avec les solutions d'une équation de Riccati pour construire une famille isospectrale d'opérateurs de Dirac \mathcal{D} dont les carrés sont les sommes directes de deux copies de W_{sa} . Dans le paragraphe 6, nous spécialisons cela au cas $\lambda = \sqrt{2}$ et nous montrons que l'opérateur $2\mathcal{D}$ a un spectre discret simple contenu dans $\mathbb{R} \cup i\mathbb{R}$ avec des valeurs propres imaginaires selon la conjugaison complexe et la fonction de comptage $N(E)$ (qui compte ceux dont la partie imaginaire positive est moindre que E) respecte la même condition que la formule de Riemann

$$N(E) \sim \frac{E}{2\pi} \left(\log \left(\frac{E}{2\pi} \right) - 1 \right) + O(1) \quad (2)$$

Nous montrons également l'évidence numérique pour la similarité spectrale ultraviolette entre les valeurs propres de $2\mathcal{D}$ et les zéros de la fonction zeta de Riemann. Finalement, le paragraphe 7 contient des remarques finales plus spéculatives, en particulier sur une géométrie naturelle de trous noirs 2-dimensionnelle intrinsèquement liée à l'opérateur $2\mathcal{D}$.

2. L'opérateur auto-adjoint d'onde sphéroïdal prolate

L'opérateur sphéroïdal prolate (1) est un opérateur de type Sturm-Liouville,

$$\begin{aligned} (W_\lambda \xi)(x) &= -\partial_x \left(p(x) \partial_x \xi(x) \right) + q(x) \xi(x), & x \in \mathbb{R} \\ \text{où } p(x) &= \lambda^2 - x^2, & q(x) = (2\pi\lambda)^2 x^2, \end{aligned} \quad (3)$$

mais ayant deux points singuliers intérieurs, il n'est pas directement traitable par la théorie habituelle de Sturm-Liouville. Pourtant, ses restrictions à chacun des intervalles $(-\infty, -\lambda)$, $(-\lambda, \lambda)$ et (λ, ∞) sont des opérateurs de Sturm-Liouville standards, en fait quasi-réguliers.

Dans la suite W_λ sera simplement noté W à chaque fois que λ est un paramètre général. Pour commencer, on regarde W comme un opérateur non borné sur $L^2(\mathbb{R})$ avec comme centre l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Ainsi, W est réel, symétrique et invariant selon l'échange de parité $x \mapsto -x$. Ces caractéristiques sont héritées de sa fermeture dans la norme de graphe W_{min} , aussi bien que

par $W_{\max} = W_{\min}^*$, ce dernier ayant pour domaine

$$\text{Dom}(W_{\max}) = \{\xi \in L^2(\mathbb{R}) \mid W\xi \in L^2(\mathbb{R})\}, \quad (4)$$

avec $W\xi$ vu comme une distribution tempérée. De plus, W a la remarquable propriété de commuter avec la transformation de Fourier

$$\mathbb{F}_{e_{\mathbb{R}}}(f)(y) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(-2\pi ixy) dx. \quad (5)$$

Puisqu'à la fois l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ et son dual sont globalement invariants par la transformation de Fourier, les domaines $\text{Dom}W_{\min}$ et $\text{Dom}W_{\max}$ sont également invariants, et par conséquent à la fois W_{\min} et W_{\max} commutent avec $\mathbb{F}_{e_{\mathbb{R}}}$.

LEMME 2.1. *Les indices de déficience de W_{\min} sont $(4, 4)$.*

Preuve. N'importe quel $\xi \in \text{Dom}(W_{\max})$ satisfaisant $W\xi = \pm i\xi$ est une fonction analytique réelle par morceaux et est uniquement déterminée par six paramètres dans le complémentaire des deux points singuliers réguliers $\pm\lambda$. La forme connue des solutions (cf. [13]) avec le fait que $W\xi \in L^2(\mathbb{R})$ implique que les singularités logarithmiques de ξ sur la gauche et sur la droite de $\pm\lambda$ doivent concorder. Cela réduit le nombre de paramètres à 4. Inversement, puisque tous les 4 points singuliers sont LC (dans le cas limite du cercle), toute solution de $W\xi = \pm i\xi$ appartient à $\text{Dom}(W_{\max})$, par conséquent $\dim \text{Ker}(W_{\max} \pm iI) = 4$.

LEMME 2.2. *Soit $\xi \in \text{Dom}W_{\max}$ et dénotons par $a = \pm\lambda$. La distribution $p(x)\partial_x\xi$ coïncide avec une fonction continue f dans un voisinage de a et la fonction d'évaluation $L(\xi) := f(a)$ définit une forme linéaire continue non nulle sur $\text{Dom}W_{\max}$ qui s'évanouit sur le sous-espace fermé $\text{Dom}W_{\min}$.*

Preuve. Soit $V = [b, c]$ un voisinage intervalle compact de $a = \pm\lambda$ où a est le seul zéro de $p(x)$. Soit ψ la distribution $\psi = p(x)\partial_x\xi(x)$, on a par définition,

$$\langle \psi \mid \phi \rangle = - \int_{\mathbb{R}} \xi(x) \partial_x(p(x)\phi(x)) dx, \quad \forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$$

Soit $\eta = W_{\max}\xi$, on a par définition,

$$\langle \eta \mid \phi \rangle = \langle \xi \mid W_{\min}\phi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \xi(x) (\partial_x(p(x)\partial_x\phi(x)) + q(x)\phi(x)) dx, \quad \forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$$

Soit $\xi_1 \in L^2(\mathbb{R})$ qui coïncide avec $q(x)\xi(x)$ sur V . Alors pour toute fonction continue ϕ à support dans V ,

$$\langle \psi \mid \partial_x\phi \rangle = - \int_{\mathbb{R}} \xi(x) \partial_x(p(x)\partial_x\phi(x)) dx = \langle \xi_1 - \eta \mid \phi \rangle$$

La restriction de $\xi_1 - \eta$ à V appartient à $L^2(V) \subset L^1(V)$ et la fonction $f_1(x) = - \int_b^x (\xi_1 - \eta)(t) dt$ est continue et vérifie

$$\int_V f_1(x) \partial_x\phi(x) dx = \langle \xi_1 - \eta \mid \phi \rangle$$

Il s'ensuit que $\langle \psi - f_1 \mid \partial_x\phi \rangle = 0$ pour toutes les fonctions continues ϕ à support dans V et en choisissant une fonction continue positive ϕ_1 à support dans V et d'intégrale 1, on obtient

$$\langle \psi \mid \phi \rangle = \langle f_1 + s \mid \phi \rangle, \quad \forall \phi \in C_c^\infty(V), \quad s = \langle (\psi - f_1) \mid \phi_1 \rangle.$$

Par conséquent, la distribution $p(x)\partial_x\xi$ coïncide avec la fonction $f(x) := f_1(x) + s$ sur V . On a

$$f(a) = s + f_1(a) = \langle (\psi - f_1) \mid \phi_1 \rangle - \int_b^a (\xi_1 - \eta)(x)dx$$

De plus $\langle \psi \mid \phi_1 \rangle = \int p(x)\partial_x\xi(x)\phi_1(x)dx = - \int \xi(x)\partial_x(p(x)\phi_1(x))dx = \langle \xi \mid \eta_1 \rangle$ où $\eta_1 \in C_c^\infty(V)$. On a également,

$$\begin{aligned} -\langle f_1 \mid \phi_1 \rangle - \int_b^a (\xi_1 - \eta)(x)dx &= \int_b^c \int_b^x (\xi_1 - \eta)(t)\phi_1(x)dt dx - \int_b^a (\xi_1 - \eta)(x)dx \\ &= \langle \xi \mid \eta_2 \rangle + \langle \eta \mid \eta_3 \rangle \end{aligned}$$

où les vecteurs $\eta_j \in L^2(\mathbb{R})$. Par conséquent la forme linéaire $L(\xi) := f(a)$ est continue dans la norme de graphe de $\text{Dom}W_{\max}$. Pour $\xi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ la distribution $\psi = p(x)\partial_x\xi(x)$ est une fonction qui s'évanouit en $x = a$ et donc $L(\xi) = 0$. Par la densité de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ dans $\text{Dom}W_{\min}$ pour la norme de graphe, il s'ensuit que L s'évanouit sur le sous-espace fermé $\text{Dom}W_{\min}$. \square

Soit P_λ la projection cutoff associée à l'intervalle $[-\lambda, \lambda]$, *i.e.* l'opérateur de multiplication par la fonction caractéristique $1_{[-\lambda, \lambda]}$, et si $\widehat{P}_\lambda = \mathbb{F}_{e_{\mathbb{R}}} P_\lambda \mathbb{F}_{e_{\mathbb{R}}}^{-1}$ dénote son conjugué par la transformation de Fourier.

LEMME 2.3. *Si $\xi \in \text{Dom}W_{\min}$ alors $P_\lambda\xi \in \text{Dom}W_{\max}$ et $WP_\lambda\xi = P_\lambda W\xi$. La même chose est vérifiée par rapport à \widehat{P}_λ .*

Preuve. Soit $f \in C^\infty(V)$ où V est un voisinage de l'intervalle $[-\lambda, \lambda]$. Alors $P_\lambda f \in \text{Dom}W_{\max}$ et en voyant $W(P_\lambda f)$ comme une distribution, on obtient pour tout $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} \langle W(P_\lambda f), \phi \rangle &= \int_{-\lambda}^\lambda f(x)(W\phi)(x)dx = \int_{-\lambda}^\lambda -f(x)\partial_x(\lambda^2 - x^2)\partial_x\phi(x)dx \\ &\quad + \int_{-\lambda}^\lambda f(x)(2\pi\lambda)^2 x^2\phi(x)dx. \end{aligned}$$

En utilisant deux fois l'intégration par parties, ainsi que le fait que $(\lambda^2 - x^2)\phi'(x)$ et $(\lambda^2 - x^2)f'(x)$ s'évanouissent sur la frontière, on obtient

$$\begin{aligned} \langle W(P_\lambda f), \phi \rangle &= \int_{-\lambda}^\lambda f'(x)((\lambda^2 - x^2)\phi'(x))dx + \int_{-\lambda}^\lambda f(x)(2\pi\lambda)^2 x^2\phi(x)dx \\ &= - \int_{-\lambda}^\lambda (\partial_x((\lambda^2 - x^2)f'(x)))\phi(x)dx + \int_{-\lambda}^\lambda f(x)(2\pi\lambda)^2 x^2\phi(x)dx \\ &= \int_{-\lambda}^\lambda Wf(x)\phi(x)dx, \end{aligned}$$

ce qui montre que $W(P_\lambda f) = P_\lambda Wf$. En particulier, la même chose est vraie pour tout $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, et par la densité de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ dans $\text{Dom}W_{\min}$ pour la norme de graphe, il s'ensuit que

$$\xi \in \text{Dom}W_{\min} \implies P_\lambda\xi \in \text{Dom}W_{\max} \quad \text{et} \quad W_{\max}P_\lambda\xi = P_\lambda W\xi.$$

L'assertion découle maintenant du fait que W commute avec $\mathbb{F}_{e_{\mathbb{R}}}$.

Les extensions auto-adjointes de W_{\min} sont paramétrées par les sous-espaces auto-orthogonaux de $\mathcal{E} := \text{Dom}(W_{\max})/\text{Dom}(W_{\min})$ selon la forme sesquilinéaire anti-symétrique donnée par l'appariement

$$\Omega(\xi, \eta) := \frac{1}{i} \left(\langle W_{\max} \xi \mid \eta \rangle - \langle \xi \mid W_{\max} \eta \rangle \right), \quad \xi, \eta \in \text{Dom}(W_{\max}) \quad (6)$$

qui descend vers une forme non-dégénérée sur \mathcal{E} .

L'appariement Ω peut être exprimé en fonction des valeurs sur la frontière comme habituellement. On commence avec l'identité de Lagrange

$$\frac{d}{dx} [\xi, \eta] = \xi W \eta - \eta W \xi, \quad (7)$$

où $\xi, \eta \in C^1(\mathbb{R}) \cap \text{Dom} W_{\max}$, et

$$[\xi, \eta] := p \left(\xi \frac{d\eta}{dx} - \eta \frac{d\xi}{dx} \right), \quad p(x) = \lambda^2 - x^2, \quad (8)$$

est le Wronskien généralisé. En l'intégrant sur des sous-intervalles compacts $[a, b] \subset \mathbb{R} \setminus \{\pm\lambda\}$, on obtient la formule de Green

$$\int_a^b (W(\xi)\bar{\eta} - \xi W(\bar{\eta})) (x) dx = [\xi, \bar{\eta}]_a^b := \lim_{x \rightarrow b} [\xi, \bar{\eta}](x) - \lim_{x \rightarrow a} [\xi, \bar{\eta}](x). \quad (9)$$

Le passage aux limites latérales vers les extrémités des trois sous-intervalles partitionnant $\mathbb{R} \setminus \{\pm\lambda\}$, étend cette identité à la ligne temporelle complète, permettant d'exprimer Ω en fonction des crochets de Lagrange comme suit :

$$i\Omega(\xi, \eta) = [\xi, \bar{\eta}]|_{-\infty}^{-\lambda} + [\xi, \bar{\eta}]|_{-\lambda}^{\lambda} + [\xi, \bar{\eta}]|_{\lambda}^{\infty} \quad (10)$$

pour toutes les paires $\xi, \eta \in \text{Dom} W_{\max}$.

Puisque W est invariant par l'échange de parité, il préserve la décomposition orthogonale $L^2(\mathbb{R}) = L^2_+(\mathbb{R}) \oplus L^2_-(\mathbb{R})$ en des fonctions paires, resp. impaires, ce qui en retour induit les séparations correspondantes $W = W^+ \oplus W^-$, $\Omega = \Omega_+ \oplus \Omega_-$ et $\mathcal{E} = \mathcal{E}_+ \oplus \mathcal{E}_-$. Notons aussi que les \mathcal{E}_{\pm} sont invariants par transformée de Fourier.

Le lemme auxiliaire suivant sera utilisé dans la discussion à venir.

LEMME 2.4. (i) Soit $f(x) = \frac{1}{2} \log((\lambda^2 - x^2)^{-2})$ vue comme une distribution tempérée. Alors, la transformation de Fourier $\mathbb{F}_{e_{\mathbb{R}}} f$ est une distribution qui coïncide en dehors de 0 avec la fonction

$$\tilde{f}(y) = \frac{\cos(2\pi\lambda y)}{|y|}.$$

(ii) Soit 1_I la fonction caractéristique de l'intervalle $I = [-\lambda, \lambda]$ alors

$$\mathbb{F}_{e_{\mathbb{R}}} 1_I(y) = \frac{\sin(2\pi\lambda y)}{\pi y}.$$

Preuve. (i) On a $f(x) = \frac{1}{2} \log((\lambda - x)^{-2}) + \frac{1}{2} \log((\lambda + x)^{-2})$, alors on commence par calculer la transformation de Fourier de la distribution $\ell = -\log(x^2)$. On a $x\partial_x \ell = -2$. Alors on obtient $\partial_y y \widehat{\ell} = 2$. Par conséquent, $y \widehat{\ell}$ est égal à $\text{sign}(y)$ et $\widehat{\ell}$ est la valeur principale de Weil $1/|y|$. Translater la variable signifie multiplier par une exponentielle imaginaire dans Fourier et cela donne l'égalité requise.

(ii) On a $\partial_x 1_I = \delta_{-\lambda} - \delta_\lambda$ et en général, $\mathbb{F}_{e_{\mathbb{R}}} f(y) = 2\pi i y \mathbb{F}_{e_{\mathbb{R}}} f(y)$.

Nous procédons maintenant à la construction d'une base de \mathcal{E} . D'abord, pour \mathcal{E}_+ nous prenons une fonction paire $\alpha_+ \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\alpha_+(x) = \log|\lambda^2 - x^2|$ pour $x \in [\frac{3}{4}\lambda, \frac{5}{4}\lambda]$ et à support dans $(\frac{1}{2}\lambda, \frac{3}{2}\lambda)$. Alors nous prenons $\beta_+(x) = 1_I$, la fonction caractéristique de l'intervalle $I = [-\lambda, \lambda]$, qui appartient à $P_\lambda \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et par conséquent à $\text{Dom} W_{\max}$. Ensuite, pour \mathcal{E}_- on pose $\alpha_-(x) := x\alpha_+(x)$ et $\beta_-(x) := x\beta_+(x)$.

LEMME 2.5. *Le quadruplet $\{\alpha_\pm, \beta_\pm, \widehat{\alpha}_\pm, \widehat{\beta}_\pm\}$ forme une base de \mathcal{E}_\pm .*

Preuve. On vérifie en utilisant l'expression (10) de l'appariement Ω ainsi que le lemme 2.4 que la représentation matricielle de Ω selon le quadruplet fourni a une entrée non nulle unique dans chaque ligne et chaque colonne.

Dans le cas impair, on note que d'un côté $[\alpha_-, \beta_-](x) = x^2[\alpha_+, \beta_+](x)$, et de l'autre côté, les dérivées impliquées dans leurs transformées de Fourier $\widehat{\alpha}_-(x) = \frac{i}{2\pi} \partial_x \widehat{\alpha}_+(x)$, resp. $\widehat{\beta}_-(x) = \frac{i}{2\pi} \partial_x \widehat{\beta}_+(x)$ échantillent les deux fonctions *cos* et *sin* dans les termes principaux à l'infini. Avec cette observation, le calcul devient semblable à celui pour le cas pair, et on a ainsi le résultat.

Les appariements Ω avec les éléments de la base ci-dessus amènent des conditions aux bornes de type Sturm-Liouville. En utilisant les notations, pour $\xi \in \text{Dom}(W_{\max}^\pm)$,

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{\alpha_\pm}(\xi) &:= i\Omega_\pm(\xi, \alpha_+), & \mathbf{L}_{\widehat{\alpha}_\pm}(\xi) &:= i\Omega_\pm(\xi, \widehat{\alpha}_+), \\ \mathbf{L}_{\beta_\pm}(\xi) &:= i\Omega_\pm(\xi, \beta_+), & \mathbf{L}_{\widehat{\beta}_\pm}(\xi) &:= i\Omega_\pm(\xi, \widehat{\beta}_+), \end{aligned} \tag{11}$$

les domaines minimaux sont caractérisés en ces termes comme étant l'intersection

$$\text{Dom}(W_{\min}^\pm) = \text{Ker } \mathbf{L}_{\alpha_\pm} \cap \text{Ker } \mathbf{L}_{\beta_\pm} \cap \text{Ker } \mathbf{L}_{\widehat{\alpha}_\pm} \cap \text{Ker } \mathbf{L}_{\widehat{\beta}_\pm} \tag{12}$$

et les fonctionnelles induites sur $\mathcal{E}_\pm = \text{Dom}(W_{\max}^\pm)/\text{Dom}(W_{\min}^\pm)$ forment une base de \mathcal{E}_\pm^* .

Par des calculs évidents, en utilisant le fait qu'on peut toujours restreindre le calcul à \mathbb{R}^+ , on obtient des expressions explicites pour les fonctionnelles aux bornes. À un facteur constant non nul près,

ils sont comme suit. Dans le cas pair,

$$\begin{aligned}
\mathbf{L}_{\alpha_+}(\xi) &= \lim_{x \nearrow \lambda} ((x - \lambda) \log(\lambda - x) \partial_x \xi(x) - \xi(x)) \\
&\quad - \lim_{x \searrow \lambda} ((x - \lambda) \log(x - \lambda) \partial_x \xi(x) - \xi(x)); \\
\mathbf{L}_{\beta_+}(\xi) &:= \lim_{x \nearrow \lambda} ((\lambda - x) \partial_x \xi(x)) = \lim_{x \searrow \lambda} ((\lambda - x) \partial_x \xi(x)); \\
\mathbf{L}_{\widehat{\alpha}_+}(\xi) &:= \frac{2}{\pi} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x \cos(2\pi \lambda x) \partial_x \xi(x) + (2\pi \lambda x \sin(2\pi \lambda x) + \cos(2\pi \lambda x)) \xi(x) \right); \\
\mathbf{L}_{\widehat{\beta}_+}(\xi) &:= -\frac{2}{\pi} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x \sin(2\pi \lambda x) \partial_x \xi(x) - (2\pi \lambda x \cos(2\pi \lambda x) - \sin(2\pi \lambda x)) \xi(x) \right).
\end{aligned} \tag{13}$$

On remarque que l'existence de la limite définissant $\mathbf{L}_{\beta_+}(\xi)$, *i.e.* l'égalité des limites latérales, est assurée par le lemme 2.2.

Des formules similaires définissent les fonctionnelles $\mathbf{L}_{\alpha_-}, \mathbf{L}_{\beta_-}, \mathbf{L}_{\widehat{\alpha}_-}, \mathbf{L}_{\widehat{\beta}_-}$ dans le cas impair.

Puisqu'à la fois $\text{Dom}(W_{\min})$ et $\text{Dom}(W_{\max})$, ainsi que la forme symplectique Ω , sont globalement invariants par transformation de Fourier, le quotient hérite des transformations induites $f_{e_{\mathbb{R}}}^{\pm} : \mathcal{E}_{\pm} \rightarrow \mathcal{E}_{\pm}$ qui relie les fonctionnelles aux bornes comme suit :

$$\mathbf{L}_{\widehat{\beta}_{\pm}} = \mathbf{L}_{\beta_{\pm}} \circ f_{e_{\mathbb{R}}} \quad \text{and} \quad \mathbf{L}_{\widehat{\alpha}_{\pm}} = \mathbf{L}_{\alpha_{\pm}} \circ f_{e_{\mathbb{R}}}. \tag{14}$$

Cette association donne naissance à deux sous-espaces auto-orthogonaux distincts, notamment

$$\mathcal{L}_{\beta} = \bigcap_{\pm} \text{Ker} \mathbf{L}_{\beta_{\pm}} \cap \bigcap_{\pm} \text{Ker} \mathbf{L}_{\widehat{\beta}_{\pm}} \quad \text{and} \quad \mathcal{L}_{\alpha} = \bigcap_{\pm} \text{Ker} \mathbf{L}_{\alpha_{\pm}} \cap \bigcap_{\pm} \text{Ker} \mathbf{L}_{\widehat{\alpha}_{\pm}} \tag{15}$$

Définition : On note W_{sa} la restriction de l'opérateur W_{\max} au sous-espace $\mathcal{L}_{\beta} = \bigcap_{\pm} \text{Ker} \mathbf{L}_{\beta_{\pm}} \cap \bigcap_{\pm} \text{Ker} \mathbf{L}_{\widehat{\beta}_{\pm}}$. Explicitement, son domaine $\text{Dom} W_{\text{sa}}$ consiste en les éléments $\xi \in \text{Dom}(W_{\max})$ satisfaisant les conditions aux limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow \pm \lambda} (\lambda^2 - x^2) \partial_x \xi(x) = 0, \tag{16}$$

et en $\pm \infty$, en écrivant $\xi = \xi^+ + \xi^-$ avec $\xi^{\pm} \in \text{Dom}(W_{\max}^{\pm})$,

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \left(x \sin(2\pi \lambda x) \partial_x \xi^+(x) - (2\pi \lambda x \cos(2\pi \lambda x) - \sin(2\pi \lambda x)) \xi^+(x) \right) = 0, \tag{17}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \left(x \cos(2\pi \lambda x) \partial_x \xi^-(x) + (2\pi \lambda x \sin(2\pi \lambda x) + \cos(2\pi \lambda x)) \xi^-(x) \right) = 0. \tag{18}$$

Nous sommes maintenant en mesure d'établir le résultat principal de ce paragraphe.

THÉORÈME 2.6. (i) W_{sa} est auto-adjoint et commute avec la transformation de Fourier.

(ii) W_{sa} commute avec les projections P_{λ} et \widehat{P}_{λ} .

(iii) W_{sa} est la seule extension auto-adjointe de W_{\min} commutant avec P_{λ} et \widehat{P}_{λ} .

(iv) Le spectre de W_{sa} est discret et non borné des deux côtés ; ses valeurs propres négatives sont simples, alors que ses valeurs propres positives (avec possiblement un nombre fini d'exceptions) ont pour multiplicité 2.

Preuve. (i) W_{sa} est auto-adjoint par construction, et son domaine \mathcal{L}_β est invariant par transformation de Fourier également par construction.

(ii) Puisque $\text{Dom}W_{\text{min}}$ est donné par (12), tout élément de \mathcal{L}_β est une combinaison linéaire d'un élément $\xi \in \text{Dom}W_{\text{min}}$ et des 4 vecteurs $\beta_\pm, \widehat{\beta}_\pm$ du lemme 2.1. Chaque β_\pm est de la forme $P_\lambda f_\pm$ avec f_\pm continue à support compact et ainsi on a en utilisant le lemme 2.3,

$$P_\lambda \beta_\pm = \beta_\pm \in \mathcal{S}, \quad W_{\text{sa}} P_\lambda \beta_\pm = W_{\text{sa}} P_\lambda f_\pm = P_\lambda W f_\pm,$$

qui montre que $W_{\text{sa}} P_\lambda \beta_\pm = P_\lambda W_{\text{sa}} P_\lambda \beta_\pm = P_\lambda W_{\text{sa}} \beta_\pm$ fournissant la commutation requise pour le β_\pm .

(iii) Le domaine d'une extension auto-adjointe de W_{min} commutant avec P_λ et \widehat{P}_λ doit être contenu dans $\text{Dom}W_{\text{max}}$ et contient également à la fois $P_\lambda \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et $\widehat{P}_\lambda \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Ainsi, il doit contenir \mathcal{L}_β , et ne peut être plus grand du fait de l'auto-adjonction.

(iv) [...]

COROLLAIRE 2.7. *Si ϕ est une fonction propre de W_{sa}^\pm alors*

- (i) ϕ est régulier sur $[\lambda, \lambda + \epsilon)$ et sur $(\lambda - \epsilon, \lambda]$ pour un certain $\epsilon > 0$, avec une discontinuité possible en λ ;
- (ii) le terme dominant de l'expansion asymptotique de ϕ at ∞ est proportionnel à $\frac{\sin(2\pi\lambda x)}{x}$ si ϕ est pair et à $\frac{\cos(2\pi\lambda x)}{x}$ si ϕ est impair.

Preuve. Cela découle des caractérisations ci-dessus (16), (17), (18) du domaine de W_{sa} combinées avec les bases connues des solutions formelles de l'équation $W\xi = \mu\xi$, $\mu \in \mathbb{R}$, près de $\pm\lambda$ et $\pm\infty$ (cf.[13]). \square

3. Espace de Sonin et valeurs propres négatives

Nous traduisons la contrainte que la transformation de Fourier $\mathbb{F}_{e_{\mathbb{R}}} f$ d'une $f \in \text{Dom}W_{\text{max}}$ n'a aucune singularité logarithmique en les points singuliers en une condition sur le comportement asymptotique de f en $l'\infty$. Pour simplifier, nous ne traitons que les fonctions paires, et pour des raisons de commodité de notation, on prend $\lambda = 1$.

On peut alors trouver l'expansion asymptotique en $l'\infty$ en utilisant la condition aux limites que le terme dominant à cet endroit est $\frac{\sin(2\pi\lambda y)}{y}$. On prend pour des raisons de simplicité $\lambda = 1$ et on utilise [13] pour vecteur propre potentiel pour la fonction propre μ l'expansion à $l'\infty$

$$\xi_\mu(x) \sim \frac{\sin(2\pi x)}{x} + \frac{(\mu - 4\pi^2)\cos(2\pi x)}{4\pi x^2} + \frac{-\mu^2 + 8\pi^2\mu + 2\mu - 16\pi^4 + 8\pi^2}{32\pi^2 x^3} \sin(2\pi x) + 0(x^{-4})$$

En fait, comme cela est montré dans la proposition 14 de [13], les coefficients de cette expansion sont directement reliés aux coefficients de l'expansion de la solution finie en λ et en prenant pour simplifier $\lambda = 1$, si ce dernier est de la forme

$$f_\mu(x) = \sum U_n(\mu)(x-1)^n, \quad U_0(\mu) = 1, \quad U_1(\mu) = \frac{\mu - 4\pi^2}{2}$$

$$U_2(\mu) = \frac{\mu^2 - 8\pi^2\mu - 2\mu + 16\pi^4 - 8\pi^2}{16}, \dots$$

alors la série asymptotique à l'infini qui gouverne la solution qui a un terme dominant en $\exp(-2\pi ix)/x$ est égale à $v(x) \exp(-2\pi ix)/x$ où

$$v(x) \sim \sum n! U_n(\mu) (2\pi ix)^{-n}$$

Quand on applique une sommation de Borel à cette série, la première étape consiste à la remplacer par sa transformée de Borel qui est, à normalisation près,

$$B(y) := \sum U_n(\mu) y^n$$

et est reliée à $v(x)$ par $\int_0^\infty t^n \exp(-zt) dt = z^{-n-1} \Gamma(n+1)$ i.e. la transformée de Laplace

$$\frac{v(x)}{2\pi ix} = \int_0^\infty \exp(-2\pi ixt) B(t) dt$$

LEMME 3.1. *Pour tout $\mu \in \mathbb{R}$ l'expansion asymptotique de l'unique solution ξ_μ qui en l'_∞ est asymptotiquement $\sim -\frac{\sin(2\pi x)}{\pi x}$ est sommable au sens de Borel et est égale à la transformée de Fourier de l'unique solution paire ϕ_μ qui est nulle sur $[-1, 1]$ et est en accord avec $f_\mu(x)$ pour $x > 1$.*

Preuve. On a l'égalité

$$\begin{aligned} \frac{v(x)}{2\pi ix} &= \int_0^\infty \exp(-2\pi ixt) B(t) dt = \int_0^\infty \exp(-2\pi ixt) f_\mu(t+1) dt = \\ &= \int_1^\infty \exp(-2\pi ix(y-1)) f_\mu(y) dy \end{aligned}$$

Ainsi on obtient

$$v(x) \exp(-2\pi ix)/(2\pi ix) = \int_1^\infty \exp(-2\pi ixy) f_\mu(y) dy$$

La fonction ϕ_μ est paire et s'évanouit sur $[-1, 1]$ de telle façon que

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^\infty \exp(-2\pi ixy) \phi_\mu(y) dy &= \int_1^\infty \exp(-2\pi ixy) f_\mu(y) dy + \overline{\int_1^\infty \exp(-2\pi ixy) f_\mu(y) dy} = \\ &= v(x) \exp(-2\pi ix)/(2\pi ix) + \overline{v(x) \exp(-2\pi ix)/(2\pi ix)} \end{aligned}$$

Maintenant ces deux termes sont des solutions asymptotiques puisque μ est réelle et $v(x) \exp(-2\pi ix)/(2\pi ix)$ est une solution asymptotique. De plus, le comportement dominant à l'_∞ est en

$$\exp(-2\pi ix)/(2\pi ix) - \exp(2\pi ix)/(2\pi ix) = -\frac{\sin(2\pi x)}{\pi x}$$

Donc il en découle que la transformée de Fourier $\mathbb{F}_{c_{\mathbb{R}}} \phi_\mu = \xi_\mu$. □

COROLLAIRE 3.2. *Avec les notations ci-dessus, supposons que μ est une valeur propre négative. Alors ϕ_μ appartient à l'espace de Sonin.*

Preuve. En fait, l'espace de Sonin est l'orthogonal des espaces propres de W_{sa} associés aux fonctions prolates classiques et à leurs transformations de Fourier.

Nous devrions noter ici que nous ne prétendons pas (bien que cela soit corroboré par l'évidence numérique) que toutes les valeurs propres de la restriction de W_{sa} à l'espace de Sonin sont négatives, pourtant il ne pourrait y avoir seulement qu'un nombre fini d'exceptions.

4. Approximation semi-classique et fonction de comptage

Dans ce paragraphe, nous utilisons l'estimée semi-classique pour la fonction comptant le nombre de valeurs propres et recherchons les valeurs propres négatives de l'opérateur W_{sa} . Nous considérons l'hamiltonien classique

$$H_\lambda(p, q) = (p^2 - \lambda^2)(q^2 - \lambda^2) \quad (19)$$

et nous l'utilisons comme une approximation semi-classique de W_{sa} à travers la relation formelle

$$W_\lambda \sim -4\pi^2 H_\lambda + 4\pi^2 \lambda^4 \quad (20)$$

en utilisant la correspondance $q \rightarrow x$ et $p \rightarrow \frac{1}{2\pi i} \partial_x$ associée au choix de la transformée de Fourier $\mathbb{F}_{e_{\mathbb{R}}}$. L'espace de Sonin correspond aux conditions $p^2 - \lambda^2 \geq 0$ et $q^2 - \lambda^2 \geq 0$ et la région intéressante pour le comptage des valeurs propres est par conséquent

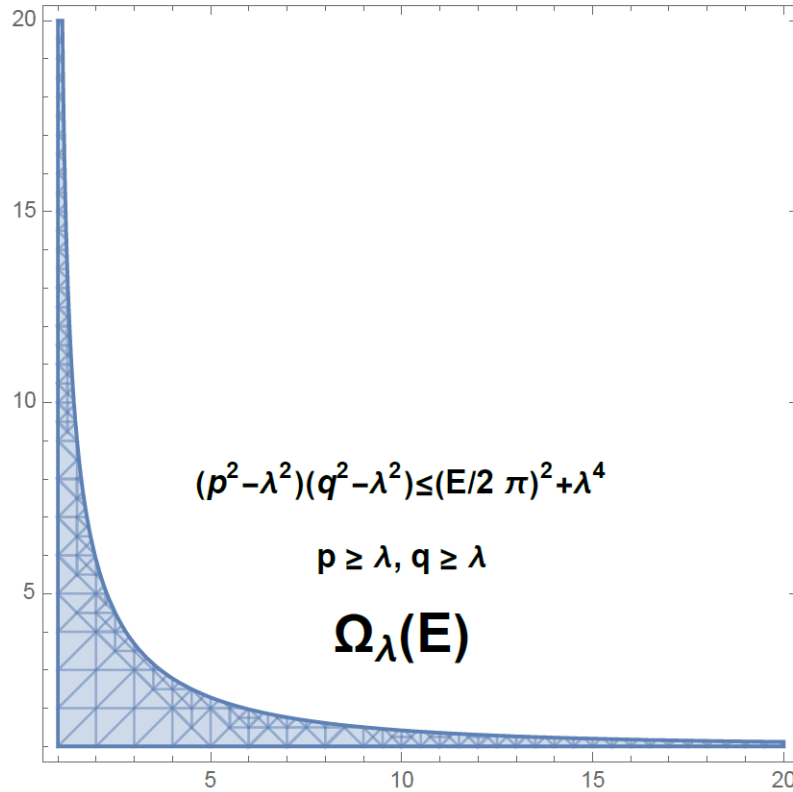


FIGURE 1 : Le sous-ensemble $\Omega_\lambda(E)$ dans le premier quadrant

$$\Omega_\lambda(E) := \{(q, p) \mid q \geq \lambda, p \geq \lambda, H_\lambda(p, q) \leq \left(\frac{E}{2\pi}\right)^2 + \lambda^4\}$$

L'aire de $\Omega_\lambda(E)$ est donnée, avec $a = \left(\frac{E}{2\pi}\right)^2 + \lambda^4$, par l'intégrale convergente

$$I_\lambda(a) = \int_\lambda^\infty \left(\frac{\sqrt{a + \lambda^2 x^2 - \lambda^4}}{\sqrt{x^2 - \lambda^2}} - \lambda \right) dx$$

On a, avec $x = \lambda y$, l'égalité

$$I_\lambda(a) = \lambda \int_1^\infty \left(\frac{\sqrt{a + \lambda^4 y^2 - \lambda^4}}{\sqrt{\lambda^2 y^2 - \lambda^2}} - \lambda \right) dy = \lambda^2 \int_1^\infty \left(\frac{\sqrt{a \lambda^{-4} + y^2 - 1}}{\sqrt{y^2 - 1}} - 1 \right) dy$$

Ainsi, on obtient l'égalité

$$I_\lambda(a) = \lambda^2 I_1(a \lambda^{-4}) \quad (21)$$

On rappelle que les intégrales elliptiques $E(m)$ et $K(m)$ sont définies par

$$E(m) := \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - m \sin^2 \theta} d\theta, \quad K(m) := \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1 - m \sin^2 \theta}} d\theta$$

LEMME 4.1. *L'intégrale $I(a) = I_1(a)$ est donnée par la somme des intégrales elliptiques*

$$I(a) = aK(1 - a) - E(1 - a) + 1 \quad (22)$$

Preuve. On a, avec $m = 1 - a$, $x = 1/t$

$$I(a) = \int_0^1 \left(\frac{\sqrt{1 - mt^2}}{\sqrt{1 - t^2}} - 1 \right) \frac{dt}{t^2}$$

Appelons

$$g(t) := -\frac{\sqrt{1 - t^2} (mt^2 + \sqrt{1 - t^2} \sqrt{1 - mt^2} - 1)}{t \sqrt{1 - mt^2}}$$

On a $g(0) = 0$, $g(1) = 0$ et la dérivée de g est égale à

$$g'(t) = -\left(\frac{\sqrt{1 - mt^2}}{\sqrt{1 - t^2}} - 1 \right) t^{-2} + \frac{1 - m}{\sqrt{1 - t^2} \sqrt{1 - mt^2}} - \frac{\sqrt{1 - mt^2}}{\sqrt{1 - t^2}} + 1$$

de telle façon que l'égalité $\int_0^1 g'(t) dt = 0$ donne (22).

Ainsi on obtient la

PROPOSITION 4.2 : *L'approximation semi-classique du nombre de valeurs propres négatives ξ de W_{sa} avec $-\xi \leq E^2$ sur les fonctions paires est la même que sur les fonctions impaires et est égale à $2\sigma(E, \lambda)$ où*

$$\sigma(E, \lambda) \sim \frac{E}{2\pi} \left(\log \left(\frac{E}{2\pi} \right) - 1 + \log(4) - 2 \log(\lambda) \right) + \lambda^2 + o(1) \quad (23)$$

Preuve. L'approximation semi-classique correspond, pour la restriction aux fonctions paires (ou aux fonctions impaires), à deux fois l'aire de $\Omega_\lambda(E)$ et par conséquent à $I_\lambda(a) = \lambda^2 I(a \lambda^{-4})$, pour $a = \left(\frac{E}{2\pi}\right)^2 + \lambda^4$. On a l'expansion asymptotique pour $a \rightarrow \infty$

$$I(a) \sim \frac{1}{2} \sqrt{a} (\log(a) - 2 + 4 \log(2)) + 1 + \frac{1}{8} \sqrt{\frac{1}{a}} (-\log(a) - 4 \log(2)) + o\left(\frac{1}{a}\right) \quad (24)$$

de telle façon que

$$I_\lambda(a) \sim \frac{1}{2}\sqrt{a} (\log(a) - 2 + 4 \log(2) - 4 \log \lambda) + \lambda^2 + o(1) \quad (25)$$

Nous utilisons alors les expansions

$$\sqrt{a} = \frac{E}{2\pi} + O(1/E), \quad \log(a) = 2 \log\left(\frac{E}{2\pi}\right) + O(1/E^2)$$

et obtenons (23).

5. Opérateurs de Dirac

Les résultats du paragraphe 4 montrent que pour des valeurs adéquates de λ , le spectre négatif de W_{sa} a le même comportement ultraviolet que les carrés des zéros de la fonction zeta de Riemann. Puisque W_{sa} est un opérateur différentiel du second ordre, on le compare à l'opérateur de Klein-Gordon et on construit l'analogie de l'opérateur de Dirac. D'abord, on utilise le processus de Darboux (voir [7], [8]) pour factoriser W_{sa} comme un produit de deux opérateurs différentiels du premier ordre.

LEMME 5.1. *Soit $p(x) = x^2 - \lambda^2$, $V(x) = 4\pi^2\lambda^2x^2$, $L = \partial(p(x)\partial) + V(x)$, $(\nabla f)(x) := p(x)^{1/2}\partial f(x)$ et U l'opérateur unitaire*

$$U : L^2([\lambda, \infty), dx) \rightarrow L^2([\lambda, \infty), p(x)^{-1/2}dx), \quad U(\xi)(x) := p(x)^{1/4}\xi(x).$$

Soit $w(x)$ une solution de l'équation

$$\nabla w(x) + w(x)^2 = -V(x) + \left(\frac{p''(x)}{4} - \frac{p'(x)^2}{16p(x)}\right), \quad \forall x \in [\lambda, \infty) \quad (26)$$

alors on a $L = U^*(\nabla + w)(\nabla - w)U$.

Preuve. Soit f une fonction continue sur \mathbb{R} et considérons les opérateurs différentiels $T_1 := f\partial_x f$ et $T_2 := \partial_x f^4 \partial_x$. Montrons que $T_1^2 - T_2$ est un opérateur d'ordre zéro : on a

$$\begin{aligned} T_1^2 &= f\partial_x f^2 \partial_x f = -f' f^2 \partial_x f + \partial_x f^3 \partial_x f \\ -f' f^2 \partial_x f &= -f'^2 f^2 - f' f^3 \partial_x, \quad \partial_x f^3 \partial_x f = \partial_x f^4 \partial_x + \partial_x f^3 f' \end{aligned}$$

de telle façon que $T_1^2 - T_2$ est la multiplication par $2f'^2 f^2 + f^3 f''$. Appliquer cela pour $f(x) = p(x)^{1/4}$ donne

$$(U^*\nabla U)^2 = \partial_x p(x) \partial_x + \frac{p''(x)}{4} - \frac{p'(x)^2}{16p(x)}$$

pour lequel la conclusion découle de l'utilisation de (26).

Nous déterminons maintenant toutes les solutions de l'équation de Riccati (26) qui donne

$$\sqrt{x^2 - \lambda^2} w'(x) + w(x)^2 = -4\pi^2\lambda^2x^2 - \frac{1}{4} \frac{x^2}{x^2 - \lambda^2} + \frac{1}{2} \quad (27)$$

Le prochain lemme est standard en utilisant la réduction d'une équation de Riccati à une équation de Bernoulli.

LEMME 5.2. *Soit u_j deux solutions à valeurs réelles de $Lu = 0$ qui engendrent l'espace linéaire des solutions dans (λ, ∞) .*

(i) *Pour $z \in \mathbb{C}$ et $u = u_1 + zu_2$, la solution u n'a pas de zéro dans (λ, ∞) si $z \notin \mathbb{R}$ et une infinité de zéros sinon.*

(ii) *Toutes les solutions de l'équation de Riccati (27) sont données par*

$$w_z(x) = \frac{(x^2 - \lambda^2)^{1/4} \partial \left((x^2 - \lambda^2)^{1/4} u(x) \right)}{u(x)} \quad (28)$$

où $u = u_1 + zu_2$ et $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

(iii) *L'application $z \mapsto w_z$ de $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ vers l'espace des solutions de (27) est un homéomorphisme.*

Preuve. (i) Soit $x \in (\lambda, \infty)$ et $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $u = u_1 + zu_2$. Supposons que $u(x) = 0$. Alors $u_1(x) + zu_2(x) = 0$ et puisque $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, cela implique $u_1(x) = 0$ et $u_2(x) = 0$. Le Wronskien $p(x)(u_1'(x)u_2(x) - u_2'(x)u_1(x))$ est constant et non nul puisque les u_j sont des solutions indépendantes. Par conséquent, nous obtenons une contradiction et u n'a aucun zéro. De plus, puisque l'équation $Lu = 0$ est dans le cas LCO, n'importe quelle solution de valeur réelle a une infinité de zéros.

(ii) La solution standard de l'équation de Riccati (26) est de la forme

$$w(x) = \frac{p(x)^{1/4} \partial \left(p(x)^{1/4} u(x) \right)}{u(x)} \quad (29)$$

ce qui donne

$$\nabla w(x) + w(x)^2 = \frac{p''(x)}{4} + \frac{p'(x)u'(x)}{u(x)} - \frac{p'(x)^2}{16p(x)} + \frac{p(x)u''(x)}{u(x)}$$

de telle façon que

$$Lu = 0 \Rightarrow \nabla w(x) + w(x)^2 = -V(x) + \left(\frac{p''(x)}{4} - \frac{p'(x)^2}{16p(x)} \right)$$

Par conséquent, par (i), n'importe quel w_z , $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ est une solution de (27). En utilisant les trois valeurs $\{i, -i, j\}$ pour z et la réduction à une équation de Bernoulli, on peut exprimer la solution générale de (27) selon la forme

$$w = w_i + \frac{(w_{-i} - w_i)(w_j - w_i)}{(1-t)(w_j - w_i) + t(w_{-i} - w_i)} = w_{z(t)} \quad (30)$$

où

$$z(t) = \frac{i(i(t-1) + j(t+1))}{i(t+1) + j(t-1)} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$$

(iii) La formule (30) établit un homéomorphisme entre l'espace des solutions de l'équation de Riccati et le complémentaire dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ du cercle

$$\{t \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \mid z(t) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})\}$$

et ainsi l'application $z \mapsto w_z$ de $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ dans l'espace des solutions de (27) est un homéomorphisme.

PROPOSITION 5.3 : Soit w une solution de l'équation de Riccati (27) et \mathcal{D} la matrice d'ordre un d'opérateurs

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} 0 & \nabla + w(x) \\ \nabla - w(x) & 0 \end{pmatrix} \quad (31)$$

Alors le carré de \mathcal{D} est diagonal avec chaque terme de la diagonale spectralement équivalent à L ,

$$U^* \mathcal{D}^2 U = \begin{pmatrix} L & 0 \\ 0 & L + 2\nabla w(x) \end{pmatrix}$$

La preuve est évidente. L'utilisation du procédé de Darboux dans cette construction est relié à la théorie des déformations spectrales [7], [8].

6. Comportement ultraviolet du spectre de Dirac, dans le cas $\lambda = \sqrt{2}$

Dans cette section on prend $\lambda = \sqrt{2}$, et on considère l'opérateur $2\mathcal{D}$ où \mathcal{D} est comme défini dans la Proposition 5.3.

THÉORÈME 6.1 : *L'opérateur $2\mathcal{D}$ a un spectre simple discret contenu dans $\mathbb{R} \cup i\mathbb{R}$. Ses valeurs propres imaginaires sont symétriques selon la conjugaison complexe et la fonction de comptage $N(E)$ comptant ceux de partie imaginaire positive moindre que E est telle que*

$$N(E) \sim \frac{E}{2\pi} \left(\log \left(\frac{E}{2\pi} \right) - 1 \right) + O(1) \quad (32)$$

Preuve. Par la Proposition 5.3, le spectre de $2\mathcal{D}$ est constitué des nombres complexes de la forme $\xi = \pm 2\sqrt{\alpha}$ où α varie dans le spectre de L . Ce dernier est réel et le nombre des valeurs propres négatives $\alpha \geq -E^2$ est donné par la Proposition 4.2 comme étant égal à $2\sigma(E, \lambda)$, par conséquent en sélectionnant la racine de partie imaginaire positive on obtient

$$0 < \Im(\xi) \leq E \iff \alpha \geq -(E/2)^2$$

et le nombre $N(E)$ de tels ξ est donc

$$\begin{aligned} 2\sigma(E/2, \sqrt{2}) &= \frac{E}{2\pi} \left(\log \left(\frac{E/2}{2\pi} \right) - 1 + \log(4) - 2\log(\sqrt{2}) \right) + O(1) = \\ &= \frac{E}{2\pi} \left(\log \left(\frac{E}{2\pi} \right) - 1 \right) + O(1) \end{aligned}$$

qui fournit l'estimation requise. □

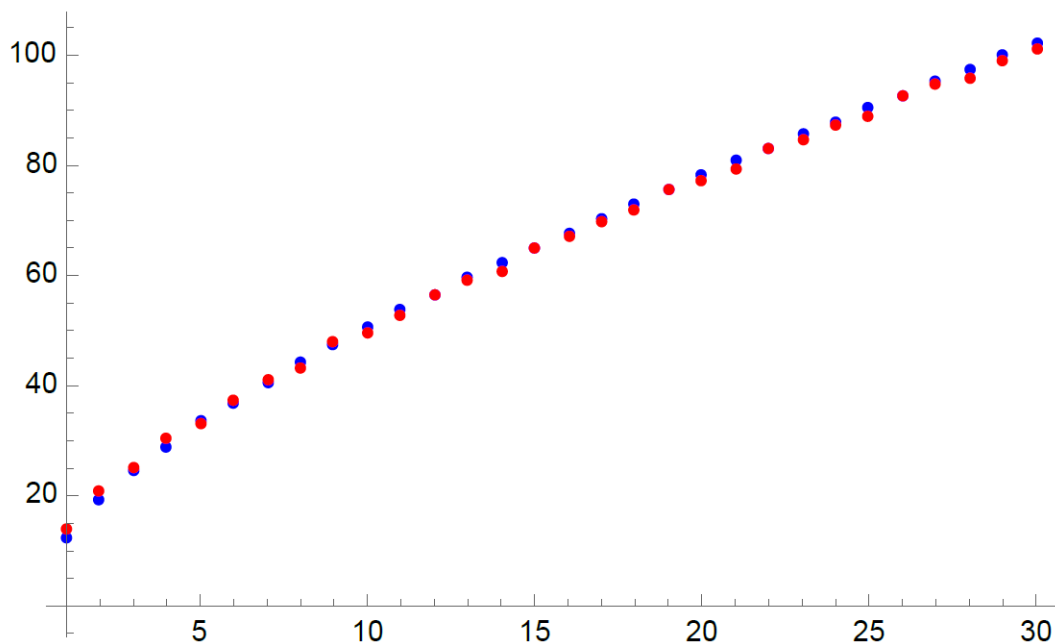


FIGURE 2 : Graphique de la (partie imaginaire de la) $n^{\text{ième}}$ valeur propre (en bleu) et du $n^{\text{ième}}$ zéro de zeta (en rouge). Quand le point rouge cache le point bleu, les deux valeurs sont trop proches l'une de l'autre pour être distinguées.

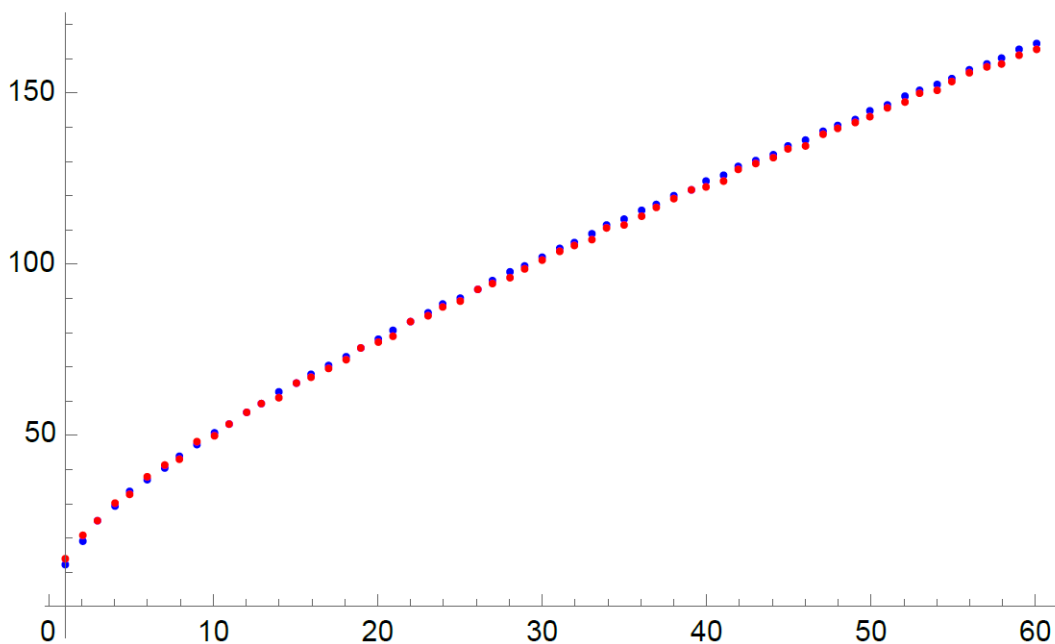


FIGURE 3 : Le spectre comparé aux zéros de zeta

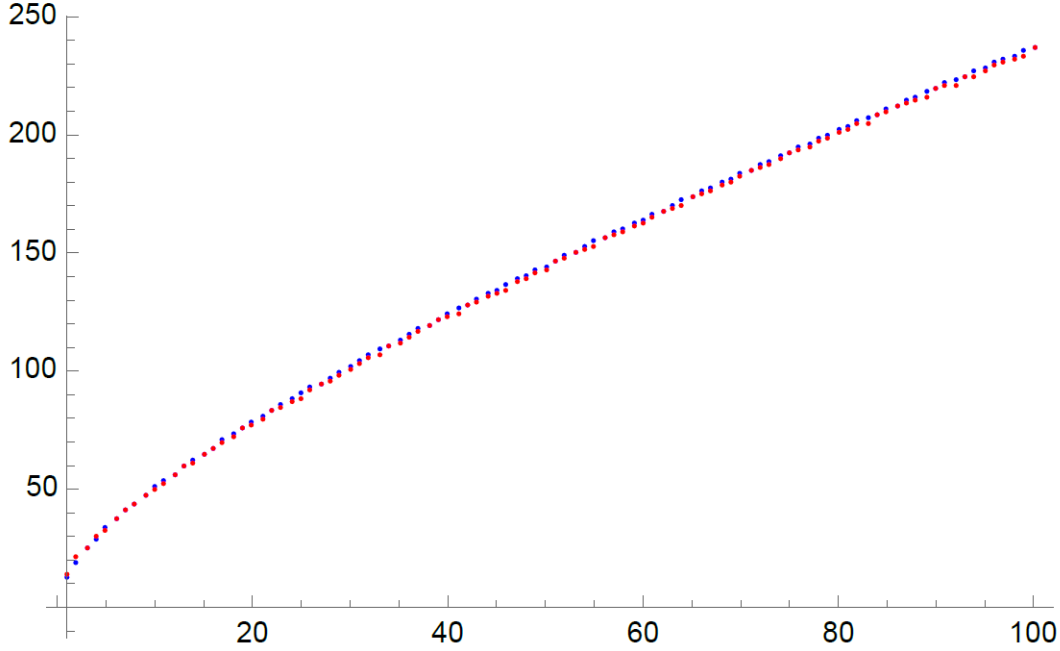


FIGURE 4 : Le spectre comparé aux zéros de zeta

7. Remarques finales

Nous rassemblons dans ce dernier paragraphe un certain nombre de remarques spéculatives.

7.1. Signification géométrique du théorème 6.1

L'opérateur $2\mathcal{D}$ du théorème 6.1 avec l'action par multiplication des fonctions continues sur l'intervalle $[\sqrt{2}, \infty)$ définirait un triplet spectral si $2\mathcal{D}$ était self-adjoint (ou adjoint oblique) mais son spectre contient à la fois des éléments imaginaires et des éléments réels. Toujours, la propriété clef que le résolvant est compact est satisfaite et de plus, puisque le terme dominant $\nabla = (2\sqrt{x^2 - 2}) \partial_x$ est équivalent à $2x\partial_x$ pour $x \rightarrow \infty$, l'algèbre des fonctions ayant un commutateur borné avec $2\mathcal{D}$ contient des fonctions continues qui sont Lipchitz pour la métrique d'invariance d'échelle dx/x . La métrique classique associée à $2\mathcal{D}$ est

$$ds^2 = -\frac{1}{4}dx^2/(x^2 - 2) = \frac{1}{\alpha(x)}dx^2, \quad \alpha(x) = -4(x^2 - 2)$$

Cette ds^2 change de signe quand il y a traversée de la frontière $x = \sqrt{2}$ et cela suggère, dans le but de gérer toutes les fonctions paires sur \mathbb{R} et de prendre en compte les valeurs propres réelles et imaginaires du carré de $2\mathcal{D}$, de chercher une métrique deux-dimensionnelle avec signature $(-1, 1)$ de la forme

$$ds^2 = -\alpha(x)dt^2 + \frac{1}{\alpha(x)}dx^2$$

Cette géométrie correspond à un trou noir en deux dimensions d'espace-temps avec horizon en $x = \pm\sqrt{2}$. Il respecte l'analogie 2-dimensionnel de l'équation d'Einstein avec constante cosmologique

= 8 et pas de source [10]. On peut regarder les courbes nulles ce qui signifie $\frac{dx}{dt} = \pm\alpha(x)$ et utiliser

$$\frac{dx}{dt} = \alpha(x) = -4(x^2 - 2) \Rightarrow t(x) = \frac{1}{8\sqrt{2}} \log \left(\frac{(\sqrt{2} + x)}{(x - \sqrt{2})} \right) + c$$

pour passer aux nouvelles coordonnées $v = t - t(x)$, et x inchangé. Dans ces nouvelles coordonnées, on réexprime la métrique sous la forme continue

$$ds^2 = 4(x^2 - 2) dv^2 - 2dvdx$$

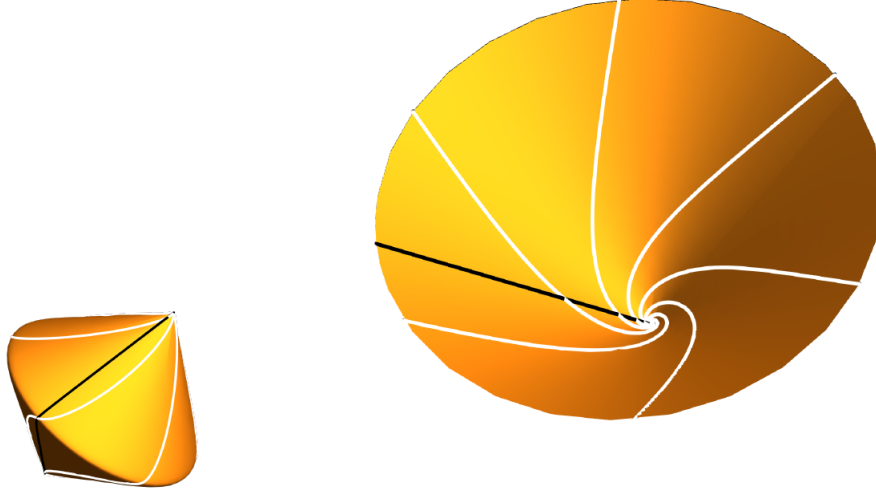


FIGURE 5 : Rayons lumineux dans la géométrie deux dimensionnelle, et en noir la courbe originale. Les lignes verticales sont les horizons en $x = \pm\sqrt{2}$.

Dans cette métrique, les rayons lumineux sont donnés par $v = v_0$ (*i.e.* les lignes d'horizon de la Figure 5) et par les courbes

$$v(x) = \frac{1}{4\sqrt{2}} \log \left| \frac{x - \sqrt{2}}{x + \sqrt{2}} \right| + c$$

i.e. les solutions de l'équation $dv = \frac{dx}{2(x^2-2)}$. La courbe originale donnée par $t = 0$ correspond au graphe de $v = -t(x)$ comme montré en noir dans la Figure 5.

7.2. Valeurs propres positives de W_{sa} et zéros triviaux de Zeta

Les valeurs propres $\chi(n)$ de la restriction de W_{sa} aux fonctions paires dans l'intervalle $[-\lambda, \lambda]$ ont une forme asymptotique bien comprise qui par le théorème 3.11 de [12] implique que, indépendamment de la valeur de λ , (notons que nous ne considérons que les fonctions paires de telle façon que l'index n de *op.cit.* est remplacé par $2n$)

$$\chi(n) = \left(2n + \frac{1}{2}\right)^2 + O(1), \quad n \rightarrow \infty$$

Ce comportement est le même que celui des carrés des zéros triviaux² de la fonction zeta de Riemann avec le même décalage de $\frac{1}{2}$ comme pour la ligne critique. Pour obtenir une relation convaincante,

²non triviaux ?

on devrait analyser l'extension de $2\mathcal{D}$ à (deux copies) des fonctions paires sur \mathbb{R} ainsi qu'aux conditions que doit respecter l'espace de Hilbert pour éliminer les racines carrées positives de $\chi(n)$.

7.3. Troncature spectrale

Pour éliminer les valeurs propres réelles de $2\mathcal{D}$ provenant des valeurs propres positives de W_{sa} on peut effectuer une troncature spectrale [6], l'algèbre des fonctions agissant par multiplication est alors remplacée par le système d'opérateurs obtenu par compression sur l'espace de Sonin. De façon similaire, on peut utiliser la troncature spectrale pour éliminer les racines carrées positives avec les notations du paragraphe 7.2.

Bibliographie

- [1] A. Connes, *Formules explicites, formules de trace et réalisation spectrale des zéros de la fonction zêta*. Cours au Collège de France (1998). https://alainconnes.org/wp-content/uploads/UPL8550790458066685627_AN_99_connes.pdf
- [2] A. Connes, *Trace formula in noncommutative geometry and the zeros of the Riemann zeta function*. *Selecta Math.* (N.S.) **5** (1999), no. 1, 29–106.
- [3] A. Connes, M. Marcolli, *Noncommutative Geometry, Quantum Fields, and Motives*, Colloquium Publications, Vol.55, American Mathematical Society, 2008.
- [4] A. Connes, C. Consani, *Weil positivity and trace formula, the archimedean place*. *Selecta Math.* (N.S.) **27** (2021) no 4.
- [5] A. Connes, C. Consani, *Spectral triples and ζ -cycles*. Preprint (2021). Available at <https://arxiv.org/pdf/2106.01715.pdf>
- [6] A. Connes, W. van Suijlekom, *Spectral truncations in noncommutative geometry and operator systems*. *Comm. Math. Phys.* **383** (2021), no. 3, 2021–2067.
- [7] P. A. Deift, *Applications of a commutation formula*. *Duke Math. J.* **45** (1978), no. 2, 267–310.
- [8] F. A. Grünbaum, *Commuting integral and differential operators and the master symmetries of the Korteweg–de Vries equation*. *Inverse Problems* **37** (2021), no 8.

- [9] V. Katsnelson, *Self-adjoint boundary conditions for the prolate spheroid differential operator*, in: Indefinite inner product spaces, Schur analysis and differential equations, pp. 357-386, Oper. Theory Adv. Appl. **263**, Birkhäuser-Springer, 2018.
- [10] R. B. Mann, A. Shiekh, L. Tarasov, *Classical and Quantum properties of two-dimensional black holes*. Nuclear Physics B341 (1990), 134–154.
- [11] M. A. Naimark, *Linear Differential Operators, Part II*, Ungar Publishing Company, New York, 1968.
- [12] A. Osipov, V. Rokhlin, H. Xiao, *Prolate spheroidal wave functions of order zero. Mathematical tools for bandlimited approximation*. Applied Mathematical Sciences, 187. Springer, New York, 2013. xii + 379 pp.
- [13] F. Richard-Jung, J.-P. Ramis, J. Thomann, F. Fauvet, *New characterization for the eigenvalues of the prolate spheroidal wave equation*. Stud. Appl. Math. **138** (2017), 3–42.
- [14] D. Slepian, H. Pollak, *Prolate Spheroidal Wave Functions, Fourier Analysis and Uncertainty*, The Bell System technical Journal (1961), 43–63.
- [15] D. Slepian, *Some asymptotic expansions for prolate spheroidal wave functions*, J. Math. Phys. Vol. **44** (1965), 99–140.
- [16] D. Slepian, *Some comments on Fourier analysis, uncertainty and modeling*, Siam Review. Vol. 23 (1983), 379–393.
- [17] J. Weidmann, *Spectral theory of ordinary differential operators*, Lecture Notes in Mathematics **1258**, Springer, Berlin, 1987.
- [18] A. Zettl, *Sturm-Liouville Theory*, AMS Surv. Mono. **121**, American Mathematical Society, 2005.