Zéros de Riemann obtenus en appliquant l'ingénierie de Floquet à un qubit à ions piégés

Ran He, Ming-Zhong Ai, Jin-Ming Cui, Yun-Feng Huang, Yong-Jian Han, Chuan-Feng Li, Guang-Can Guo, G. Sierra and C. E. Creffield

Résumé

Les zéros non triviaux de la fonction zeta de Riemann sont des objets centraux en théorie des nombres. En particulier, ils permettent de reproduire les nombres premiers. Ils ont aussi attiré l'attention des physiciens travaillant dans le domaine de la théorie des matrices aléatoires et du chaos quantique depuis des décennies. Nous présentons ici une observation expérimentale des plus bas zéros non triviaux de Riemann en utilisant un qubit à ions piégés dans un piège de Paul, périodiquement dirigé par des champs de micro-ondes. La forme d'onde de l'oscillation du qubit est réalisée de telle façon que la dynamique de l'ion soit gelée quand les paramètres d'oscillation coïncident avec un zéro de la partie réelle de la fonction zeta. Scruter l'amplitude de l'oscillation permet de alors de mesurer expérimentalement les zéros avec un haut degré de précision, fournissant une incarnation physique dans le paradigme quantique de ces objets mathématiques fascinants.

Introduction

La fonction zeta de Riemann $\zeta(s)$ est la pierre de Rosette en théorie des nombres. Cette pierre, trouvée par les troupes de Napoléon en Egypte contient le même texte écrit en 3 langues différentes, ce qui a permis de déchiffrer les hiéroglyphes egyptiennes. La fonction ζ est aussi exprimée en trois "langages" différents : comme série $\sum_n n^{-s}$ sur les entiers positifs n, comme produit $\prod_p 1/(1-p^s)$ sur les nombres premiers p, et comme produit $\infty \prod_n (1-s/\rho_n)e^{s/\rho_n}$ sur les zéros de Riemann ρ_n [1]. Notons que les deux premières définitions de $\zeta(s)$ ne convergent que dans le demi-plan Re $[s] > 1$, alors que la troisième définition est valide sur le s-plan complexe dans son intégralité. Riemann conjectura en 1859 que ces zéros devaient avoir une partie réelle égale à un demi, $\rho_n = \frac{1}{2} + iE_n$, où E_n est un nombre réel [2]. C'est la célèbre hypothèse de Riemann (RH), un des six problèmes non résolus du Millennium (https://www.claymath.org/millennium-problems), dont la résolution augmenterait notre connaissance de la distribution des nombres premiers et aurait des conséquences en théorie des nombres et sur les modèles de factorisation [3]. Plus poétiquement, selon les mots de M. Berry, la preuve de RH signifierait qu'"il y a une musique dans les nombres premiers" [4].

Une des idées les plus intéressantes pour attaquer RH est de montrer que les E_n sont les valeurs propres de l'hamiltonien d'un système quantique. Cette idée, suggérée par Pólya et Hilbert aux environs de 1912 [5], a commencé à être prise au sérieux dans les années 70 lors de l'observation par Montgomery [6] du fait que les zéros de Riemann étaient près de satisfaire les statistiques de l'ensemble unitaire Gaussien (GUE). Dans les années 80, Odlyzko [7] testa cette prédiction numériquement pour les 10^5 zéros autour du 10^{20}ème zéro, ne trouvant que des déviations mineures par rapport à GUE. Ces résultats furent expliqués ultérieurement par Berry et ses collaborateurs [8-10]

R.H., M.Z., J.M.C., Y.J.H., C.F.L., G.C.G., 1. et 2. : 1 : CAS Laboratoire d'information quantique, Université de science et technologie de Chine, Hefei, Chine. 2 : CAS Centre d'excellence en Information quantique et Physique quantique, Université de Science et Technologie de Chine, Hefei, Chine. G.S. : 3 : Institut de Physique théorique, UAM-CSIC, Madrid, Espagne. C.E.C. : 4 : Département de physique des matériaux, Université avancée de Madrid, Madrid, Espagne.

Référence de l'article : npj Quantum Information (http://www.nature.com/npjqi, 2021) 7 :109 ; https://doi.org/10.1038/s41534-021-00446-7 .
Reçu : 10 Mars 2021 ; Accepté : 17 Juin 2021 ;
Publié en partenariat avec l'Université de Nouvelle-Galles du Sud.
Traduction : Denise Vella-Chemla, août 2021.

en utilisant la théorie du chaos quantique, et l'a amené à proposer que les E_n soient les valeurs propres d'un hamiltonien de chaos quantique dont la version classique contient des orbites périodiques isolées dont les périodes sont les logarithmes des nombres premiers. Beaucoup de travail a été mené [11-17] pour trouver un tel hamiltonien, mais jusque-là sans réponse définitive.

Nous présentons ici une observation expérimentale des zéros de Riemann les plus bas, qui est assez différente de la réalisation spectrale décrite ci-dessus. Notre intention n'est pas de démontrer RH, mais plutôt de fournir une incarnation physique de ces objets mathématiques en utilisant la technologie quantique avancée.

Le système physique que nous considérons est un qubit à ions piégés. L'ion est sujet à un champ dirigé temporellement périodique, et par conséquent, son comportement est décrit par la théorie de Floquet, dans laquelle les valeurs propres habituelles de l'énergie des systèmes quantiques sont généralisées à des "quasi-énergies". Ces quasi-énergies peuvent être régulées par les paramètres d'oscillation, en utilisant une technique appelé ingénierie de Floquet. En particulier, quand les quasi-énergies sont dégénérées (ou croisées), l'oscillation de l'ion est gelée, ce qui peut être observé expérimentalement. La fonction zeta de Riemann intervient dans cette construction dans la conception du champ directeur, qui est spécifié pour produire le gel de l'oscillation quand la partie réelle de $\zeta(s)/s$, avec $s = \frac{1}{2} + iE$, s'évanouit. Ainsi, observer le gel de l'oscillation du qubit lorsque les paramètres d'oscillation varient fournit une mesure expérimentale de haute précision de la localisation des zéros de Riemann.

Résultats

Théorie de Floquet

Nous considérons un système à deux niveaux sujet à une oscillation périodique dans le temps, décrit par l'hamiltonien $H(t) = J(\sigma_x + \frac{f(t)}{2}\sigma_z)$, où les $\sigma_{x,z}$ sont les matrices de Pauli standard et J représente l'effet tunnel entre les deux niveaux d'énergie. Par conséquent, nous poserons $\hbar = 1$, et mesurons tous les (temps) d'énergie en unités de $J \quad (J^{-1})$. Comme $H(t)$ est temporellement périodique, $H(t) = H(t+T)$, où T est la période d'oscillation, le système est naturellement décrit dans la théorie de Floquet, en utilisant une base de modes de Floquet et des quasi-énergies qui peuvent être extraites de l'opérateur d'évolution temporelle pour une période d'oscillation $U = \mathcal{T}\exp[-i\int_0^T H(t')dt']$ (où $\mathcal{T}$ dénote l'opérateur d'ordonnancement temporel). Les modes de Floquet, $\Theta_j(t)\rangle$, sont les états propres de U, et les quasi-énergies, ϵ_j, sont reliées aux valeurs propres de U via $\lambda_j = \exp[-iT\epsilon_j]$.

Les modes de Floquet fournissent une base complète pour décrire l'évolution temporelle du système, et les quasi-énergies jouent un rôle analogue aux valeurs propres de l'énergie d'un système indépendant du temps. L'état du qubit peut ainsi être exprimé par $|\psi(t) = \sum_j a_j \exp[-i\epsilon_j t]|\Theta_j(t)$, où les coefficients d'expansion α_j sont indépendants du temps, et les modes de Floquet sont des fonctions T-périodiques du temps. À partir de cette expression, il est clair que si deux quasi-énergies approchent la dégénérescence, l'échelle de temps pour l'effet tunnel entre elles deux divergera comme $1/\Delta\epsilon$. Bien qu'en général il soit difficile d'obtenir des formes explicites pour les quasi-énergies, même dans le cas d'un système à deux niveaux, d'excellentes approximations peuvent être obtenues dans la limite des hautes fréquences, quand $\Omega = 2\pi/T$ est le plus grand niveau d'énergie du problème, c'est-à-dire quand $\Omega \gg J$. Dans ce cas, on peut dériver de [18] un hamiltonien statique effectif, $H_{\text{eff}} = J_{\text{eff}}\sigma_x$, où l'effet tunnel effectif est fourni par

(1) $$J_{\text{eff}} = \frac{J}{T}\int_0^T dt e^{-iF(t)}.$$

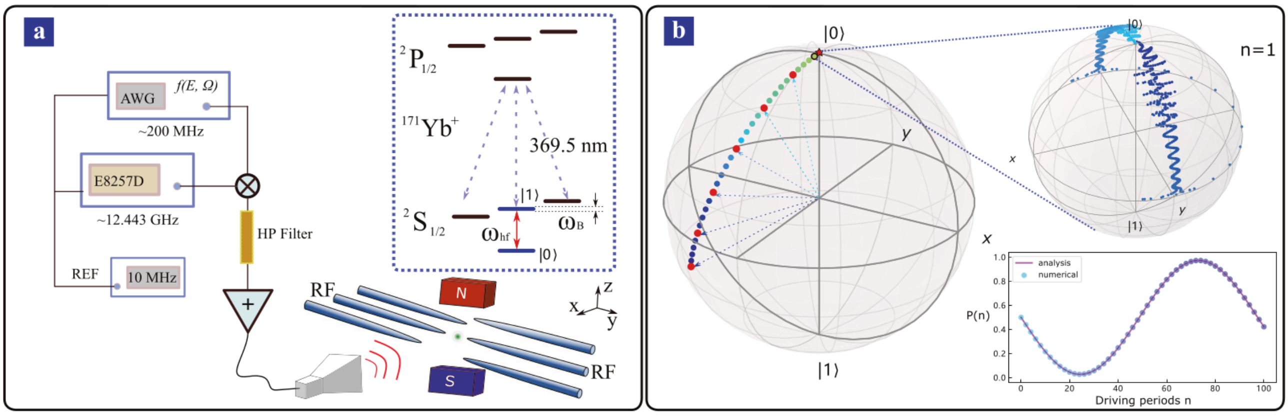

FIGURE 1 : **Procédure expérimentale pour mesurer la dynamique de Floquet dans un système à ions piégés. a** Le qubit est codé dans la transition d'horloge d'un seul ion $^{171}Yb^{+}$ piégé. Le qubit est périodiquement dirigé par un champ de micro-ondes généré par un AWG et un signal source de fréquence fixe, qui sont tous les deux référencés par un rubidium de fréquence standard à 10 MHz. **b** Sur la sphère de Bloch à droite, le qubit est initialisé à $|0\rangle$ et il évolue vers $U(T)|0\rangle$ après une période d'oscillation par la fonction $f(E = 16, \Omega = 5)$. La dynamique rapide ("micro-oscillation") du qubit pendant cette période élémentaire est montrée sur la sphère de Bloch, et provient de la dépendance au temps intrinsèque des états de Floquet $|\Phi_j(t)$. Sur la sphère de Bloch de gauche, le qubit commence à partir de $|0\rangle$ (le pôle Nord) et évolue vers $U(nT)|0\rangle$ pour les périodes multiples $n = 1, 2, 3, \ldots, 30$. Les points rouges sont les points mesurés pour $n = 5, 10, 15, 20, 25, 30$. L'encart montre la probabilité $P(n)$ de projeter le qubit sur $|y_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + i|1\rangle)$ après n périodes. $P(n)$ est une fonction sinusoïdale de n, de fréquence proportionnelle à la quasi-énergie $\epsilon_j(E)$. Pour les valeurs de E satisfaisant $\epsilon_j(E) = 0$, l'état est gelé pour $|0\rangle$ et $P(n) = 1/2$ pour tout n. Puisque $\epsilon_j(E)$ est proportionnel à la partie réelle de $-\zeta(1/2 + iE)/(1/2 + iE)$, nous pouvons par conséquent identifier les zéros de Riemann en observant le gel de l'oscillation, i.e., $P = 1/2$.

Ici $F(t)$ est la primitive de la fonction d'oscillation, $F(t) = \int_0^t dt' f(t')$, et les quasi-énergies sont données par $\epsilon_\pm = \pm|J_{\text{eff}}|$. Les valeurs propres deviennent ainsi dégénérées quand elles sont nulles, ceci correspondant à l'évanouissement de J_{eff} et au gel de la dynamique. Cette expression est précise au premier ordre en $1/\Omega$, et bien qu'en principe les termes d'ordres supérieurs puissent être calculés en utilisant l'expansion de Magnus [19], nous travaillerons à des fréquences suffisamment élevées pour que cette expression fournisse des résultats d'une précision excellente.

L'équation (1) est la clef de notre approche. En altérant la forme de l'oscillation, $f(t)$, nous sommes capables de manipuler l'effet tunnel effectif et les quasi-énergies du système oscillant. Notre but est d'obtenir une fonction d'oscillation telle que $J_{\text{eff}}(E)$ soit proportionnel à la partie réelle de $g(E)$ avec $g(E) = -\zeta(1/2 + E)/(1/2 + E)$, produisant un hamiltonien effectif dont la dynamique est intimement reliée aux propriétés de la fonction ζ. En particulier, l'effet tunnel effectif s'évanouira, un effet appelé "destruction cohérente de l'effet tunnel" (CDT) [20], quand E coïncide avec l'un des zéros de Riemann. Dans la section Méthodes, nous fournissons les détails de la dérivation mathématique de la fonction d'oscillation, qui nous permet d'obtenir des séries de Fourier pour $f(t)$ et $F(t)$ (voir Figure 4) et qui peut être programmée directement pour fournir l'oscillation expérimentale. Nous choisissons de nous focaliser sur la fonction $-\zeta(s)/s$ pour deux raisons fondamentales. La première est qu'elle a une transformée de Fourier remarquablement simple. Cela a également motivé van der Pol [21] et Berry [22] à utiliser cette fonction comme base de leurs implémentations physiques des zéros de Riemann dans des expériences de diffraction (respectivement en optique de Fourier et dans les modèles de radiation d'antennes). La seconde raison est que cette fonction décroît lentement lorsque E croît (voir Figure 4a). Dans un précédent travail [23,24], nous proposions d'utiliser l'ingénierie de Floquet pour simuler la fonction Ξ de Riemann [1]. Bien qu'on y soit parvenu, la décroissance extrêmement rapide de la fonction Ξ signifiait que seuls les deux premiers zéros de Riemann pouvaient être obtenus ainsi. Au contraire, la décroissance lente de $\zeta(s)/s$ devrait permettre de détecter beaucoup plus de croisements de quasi-énergie, et ainsi davantage de zéros devraient pouvoir être identifiés.

Expérience

Les résultats expérimentaux ont été obtenus en faisant oscillerpériodiquement un seul ion piégé par des champs de micro-ondes. Le système à deux niveaux est codé dans la transition hyperfine d'une horloge $|0\rangle \equiv^2 S_{1/2}|F=0, m_F=0\rangle$ et $|1\rangle \equiv^2 2S_{1/2}|F=1, m_F=0\rangle$ dans un unique ion d'ytterbium ($^{171}Yb^+$) confiné dans un piège à ion de Paul [25], comme montré dans la Figure 1a. Ce qubit d'horloge présente comme avantages une grande fiabilité pour les opérations quantiques et un long temps de cohérence [26,27]. L'effet tunnel, J, dans ce système est de l'ordre de 10 kHz, permettant d'obtenir un temps de résonance de Rabi d'environ $\sim 100\mu s$.

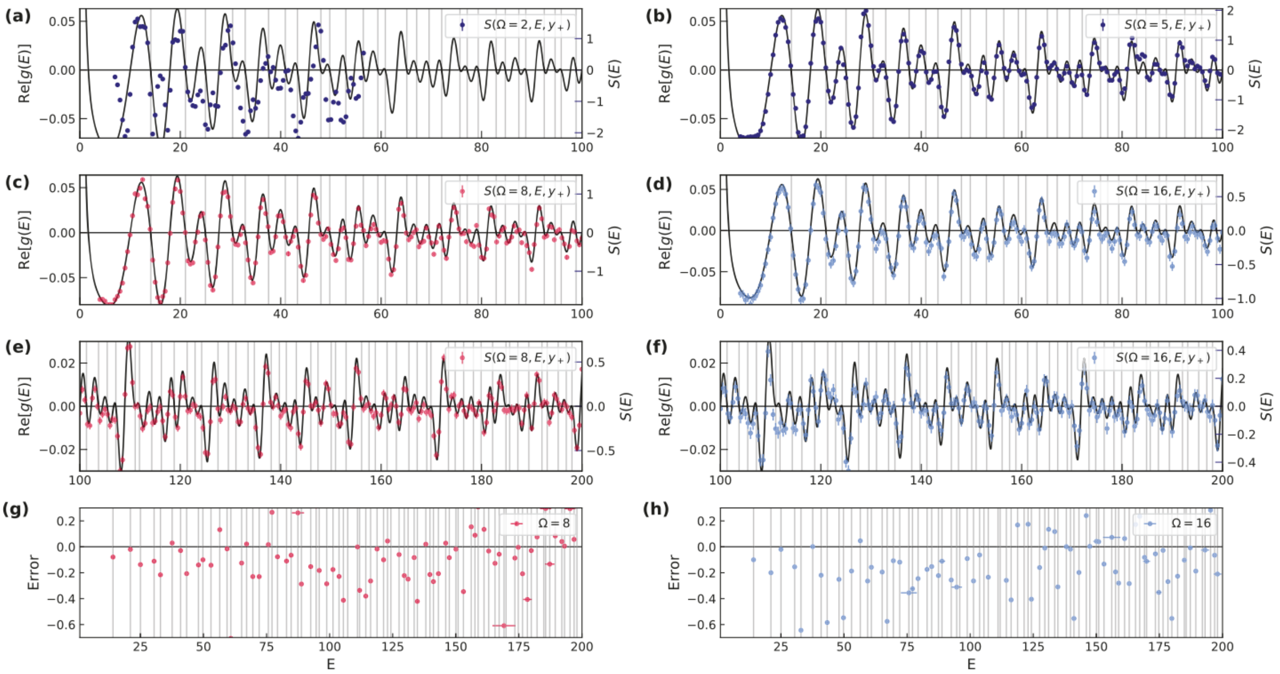

FIGURE 2 : **Identifier les zéros de Riemann en observant l'état où l'oscillation se fige**. Sur les graphiques (**a–f**) la courbe noire est la partie réelle de $g(E)$. Les lignes verticales grises indiquent les zéros de Riemann, $\{14.1347, 21.022, 25.0109, 30.4249, 32.9351, ...\}$; les autres points où $g(E)$ croise l'axe correspondent aux Re$[g(E)]$ s'évanouissant alors que Im$[g(E)]$ ne s'évanouit pas, et ainsi ne représentent pas des zéros de Riemann. Les points sont le paramètre S qui est défini par $S(\Omega, E, y_+) = \sum_n [P(n, \Omega, E)1/2]$, où $n = \{5, 10, 15, 20, 25, 30\}$. $S(\Omega, E, y_+)$ est utilisé pour identifier les zéros de Riemann en observant $S = 0$. **a** Quand $\Omega = 2$, la limite de haute fréquence n'est pas bien satisfaite, et donc le comportement de $S(\Omega, E, y_+)$ ne coïncide pas avec $g(E)$. **b** Par contraste, $\Omega = 5$ fournit un bon accord pour $E \leq 100$. **c** Augmenter davantage Ω jusqu'à 8 fournit un accord encore meilleur avec $g(E)$. **e** Nous avons implémenté la mesure de E jusqu'à 200 et avons identifié les 80 premiers zéros de Riemann avec une grande précision. **d, f** Les résultats de $\Omega = 16$. Les points associés à des données avec $E \leq 100$ $(E \geq 100)$ ont été obtenus par 2000 (5000) mesures. La marge d'erreur δS de $S(\Omega, E, y_+)$ est la somme des erreurs statistiques correspondant à $P(n, \Omega, E)$, où $n = \{5, 10, 15, 20, 25, 30\}$, dans une déviation standard. **g, h** Les zéros ont été extraits en interpolant $S(\Omega, E, y_+)$ en utilisant un polynôme cubique 4000 fois. Chaque fois, S est échantillonné au hasard dans $[S - \delta S, S + \delta S]$. L'erreur (notée par un point) est la différence entre les zéros extraits et les zéros exacts (voir l'information supplémentaire), avec les marges d'erreur indiquant les déviations standard des zéros extraits. Une ligne verticale sans point rouge a une erreur tombant en dehors de la plage tracée.

Après 1 ms de refroidissement Doppler et 50 μs de pompage optique, l'ion est initialisé dans l'état de base $|0\rangle$ avec une probabilité $\geq 99.5\%$. Le qubit est alors dirigé par un champ de micro-ondes de périodes multiples. La fonction d'oscillation a été engendrée à partir d'un générateur de forme d'onde arbitraire programmable (AWG), qui engendre une micro-onde à modulation de phase avec une fréquence porteuse de 200 MHz et une fonction de modulation de phase $F(t)/2$ [24]. Elle est alors mélangée avec un signal de fréquence fixée 12.443 GHz et filtrée par un filtre de bande passante haute. Les champs micro-ondes amplifiés proches de 12.643 GHz ont été envoyés à l'ion piégé à partir d'une antenne cornet située en dehors de la chambre vide. À la fin des multiples périodes, l'état est projeté sur le vecteur propre de σ_y avec valeur propre $+1, |y_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + i|1\rangle)$, en appliquant une rotation de $\pi/4$ et une détection de fluorescence normale. Quand plus d'un photon est détecté, le résultat de la mesure est noté comme valant 1 ; sinon, il est noté comme valant 0. L'évolution temporelle de la population d'états est enregistrée comme une fonction du nombre de périodes.

Dans la Figure 1b, nous montrons le protocole expérimental, dessiné sur la sphère de Bloch. Comme noté précédemment, les modes de Floquet $|\Theta_1(E,\Omega,t)\rangle = a(t)|0\rangle + b(t)|1\rangle$ et $|\Theta_2(E,\Omega,t)\rangle = b^*(t)|0\rangle - a^*(t)|1\rangle$ sont les états propres de l'opérateur d'évolution temporelle d'une période $U(E,\Omega)$, où Ω est la fréquence du mouvement, et E est un paramètre d'oscillation relié à la fonction zeta $\zeta(1/2+iE)$. En partant de l'état initial $|0\rangle$, la population de l'état projeté sur $|y_+\rangle$ après n périodes de mouvement est $P(n,E,\Omega) = 1/2 - A\sin(2nT\epsilon_j(E,\Omega))$, où $A = \mathrm{Re}\{a(0)b^*(0)\}$, et $\epsilon_j(E,\Omega)$ est la quasi-énergie. Il est clair que si E est égal aux zéros de $\epsilon_j(E,\Omega), \epsilon_j(E,\Omega)$ s'évanouit et $P(n,E,\Omega) = 1/2$ pour tout n. Alors que si $\epsilon_j(E,\Omega) \neq 0, P(n,\Omega,E)$ évolue de façon sinusoïdale avec une fréquence proportionnelle à la quasi-énergie $\epsilon_j(E,\Omega)$. Les zéros de Riemann peuvent ainsi être identifiés en observant le gel de l'oscillation de $P(n,E,\Omega)$ produit par CDT.

Pour donner une caractérisation quantitative de l'évolution d'état, nous définissons le paramètre S par $S(\Omega,E,\gamma_+) = \sum_n [P(n,\Omega,E)1/2]$, où $n = \{5,10,15,20,25,30\}$ sont les nombres de périodes d'oscillation dans l'expérience. On voit de manière évidente que les zéros des quasi-énergies sont également les zéros de $S(\Omega,E,\gamma_+)$. Par conséquent, une observation du paramètre E nous permet d'identifier les zéros en observant $S(\Omega,E,\gamma_+) = 0$. Pour donner une comparaison directe, nous montrons sur la Figure 2 les résultats expérimentaux de $S(\Omega,E,\gamma_+)$ et la partie réelle de $g(E)$ comme une fonction de E pour $\Omega = 2, 5, 8,$ et 16, respectivement. Pour $\Omega = 2$, on peut voir que $S(\Omega,E,\gamma_+)$ présente une distorsion significative par rapport à la fonction zeta théorique et ne permet pas de déterminer la position des zéros. Faire croître Ω, pourtant, améliore substantiellement les résultats, et fournit un accord excellent entre les données et la théorie sur le domaine $E \leq 200$, permettant d'identifier les 80 premiers zéros de Riemann. La mesure peut être étendue à des valeurs de E plus élevées sans perte d'efficacité ou de précision. Cette amélioratoin est permise parce que des valeurs plus grandes de Ω satisfont mieux l'approximation haute-fréquence, et ainsi l'équation (1) devient plus précise. La différence entre les zéros mesurés et les zéros exacts de Riemann est montrée en Figure 2g. La plupart des zéros peuvent être identifiés avec une précision meilleure de 1% ou plus. Dans la Table 1, nous présentons l'accord quantitatif pour quatre fréquences d'oscillation différentes sur un large domaine de E. Nous fournissons davantage de comparaisons et plus détaillées de l'accord dans la partie Information supplémentaire. Puisqu'augmenter davantage Ω devrait mieux satisfaire les bornes de haute-fréquence, on pourrait penser que la précision des résultats peut être améliorée en augmentant la fréquence de mouvement à des valeurs arbitrairement grandes. Ce n'est cependant pas le cas. Comme nous le montrons dans la section Méthodes, les meilleurs résultats seront obtenus quand la période de mouvement T est suffisamment petite pour satisfaire la limite de haute-fréquence, et quand, en plus de cela, T est suffisamment grand pour pouvoir remplacer la limite haute d'intégration dans l'équation (5). Comme conséquence de ces contraintes opposées, les meilleurs résultats seront effectivement obtenus pour les fréquences moyennes. Dans les Figures 2d, f et h, nous montrons les résultats pour $\Omega = 16$. Comparer ces résultats à ceux obtenus pour $\Omega = 8$ révèle qu'augmenter la fréquence n'a pas amélioré la précision de ces résultats.

Reconstruction des nombres premiers

En 1859, Riemann a trouvé une formule qui donne le nombre de nombres premiers $\pi(x)$ inférieurs ou égaux à x en fonction des zéros non triviaux $\rho_n = \frac{1}{2} + iE_n$ [2]. Une conséquence de ce résultat est un théorème dû à E. Landau en 1911 qui donnait le comportement asymptotique de la somme [3,28]

$$h(x) = -\sum_{|\rho|\leq T} x^{\rho} = \frac{T}{2\pi}\Lambda(x) + O(\log T) \tag{2}$$

où $\Lambda(x)$ est la fonction de von Mangoldt, qui est égale à $\log p$ quand $x = p^n$ et qui est nulle sinon. La fonction $h(x)$ par conséquent a des pics sur les premiers p et leurs puissances p^n. Nous dessinons la fonction $h(x)$ sur la Figure 3, ainsi que la fonction $J(x)$

$$J(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}\pi(x^{1/n}) \tag{3}$$

avec des sauts de hauteur 1 à chaque nombre premier et de hauteur $1/n$ aux puissances p^n. Noter que l'erreur expérimentale dans les zéros n'affecte pas notablement la localisation des pics.

	E_1	E_{10}	E_{30}	E_{50}	E_{70}
Exact	14.135	49.774	101.318	143.112	182.207
$\Omega = 5$	14.07 (1)	49.26 (19)			
$\Omega = 8$	14.06 (2)	49.67 (3)	101.13 (3)	142.90 (9)	182.28 (6)
$\Omega = 12$	13.99 (4)	49.36 (23)	101.31 (3)	142.72 (22)	182.14 (6)
$\Omega = 16$	14.03 (3)	49.23 (22)	101.33 (5)	142.91 (13)	181.98 (8)

TABLE 1 : **Comparaison des zéros de Riemann mesurés expérimentalement avec les valeurs réelles pour différentes fréquences d'oscillation** : Les zéros ont été extraits en interpolant $S(\Omega, E, y_+) \pm \delta S$ avec un polynôme cubique 4000 fois, où δS est la déviation standard $1-\sigma$ de S. À chaque temps, S est tiré au hasard dans $[S - \delta S, S + \delta S]$. Les zéros sont les moyennes des zéros obtenus par interpolation. Les valeurs entre parenthèses dénotent la déviation standard des moyennes en fonction des chiffres les moins significatifs.

Discussion

Nous avons présenté une méthode expérimentale pour mesurer la localisation des zéros de Riemann de la fonction ζ, en utilisant l'ingénierie de Floquet pour contrôler les niveaux de quasi-énergie d'un ion piégé oscillant périodiquement. Les valeurs des zéros mesurées expérimentalement sont en excellent accord avec les valeurs théoriques, et nous avons démontré comment elles peuvent être utilisées pour reconstruire les nombres premiers. Le haut degré de contrôle sur le système et l'implémentation de la fonction d'oscillation dérivée de la fonction complexe $g(E) = \zeta(s)/s$ (où $s = 1/2 + iE$), permet de trouver pas moins des 80 premiers zéros de zeta. Notre analyse indique qu'il y a un "joli spot" pour la fréquence d'oscillation, dans lequel Ω est suffisamment grand pour que le système soit en régime haute-fréquence alors que sa période est grande comparée à la largeur de la transformée de Fourier de $g(s)$. En utilisant les zéros mesurés expérimentalement, nous avons obtenu une bonne approximation des plus petits nombres premiers. Cette reconstruction suggère la possibilité d'une réalisation expérimentale directe des nombres premiers. La réalisation réussie des zéros de Riemann dans un système de mécanique quantique représente une étape importante le long de la route inspirée par la proposition d'Hilbert et Pólya, et pourrait amener à de meilleures connaissances au sujet de l'hypothèse de Riemann. Une autre direction de recherches intéressante serait d'utiliser des variations plus générales que la fonction zeta qui permettrait l'exploration de différents intervalles le long de la droite critique [29].

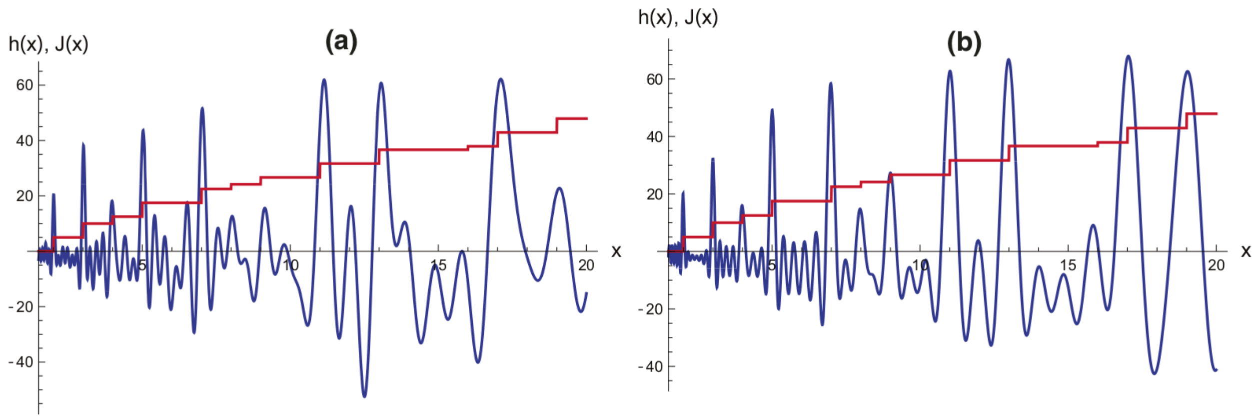

FIGURE 3 **Nombres premiers à partir des zéros**. La fonction dans l'Équation (2) avec la somme restreinte aux $E_n < 100$ (bleue) et la fonction $5J(x)$ fournie dans l'Équation (3) (rouge) sont calculées (**a**) en utilisant les valeurs exactes des E_n et (**b**) en utilisant les valeurs des E_n fournies dans la Table II (Données étendues) pour $\Omega = 16$. Dans les deux cas, on peut identifier les huit premiers zéros et leurs puissances.

Méthodes

Dérivation de la fonction d'oscillation

Notre point de départ est la fonction $g(E) = \dfrac{-\zeta(1/2+iE)}{1/2+iE}$ où $\zeta(s)$ est la fonction zeta de Riemann standard. Nous présentons le comportement de cette fonction sur la Figure 4a. Comme van der Pol l'a montré en 1947, sa transformée de Fourier (Figure 4b) peut s'écrire sous la forme simple surprenante [21]

$$\tilde{g}(t) = e^{t/2} - e^{-t/2}[e^t] \tag{4}$$

où $[x]$ est la partie entière de x. Comme on peut le voir sur la Figure 4b, cette fonction est située autour de l'origine, avec une enveloppe de la forme $\exp(-|t|/2)$.

En séparant le domaine d'intégration de la transformée de Fourier en deux moitiés, il est évident de montrer que la composante réelle de $g(E)$ est donnée par

$$\mathrm{Re}[g(E)] = \frac{2}{4E^2+1} + \int_0^\infty \tilde{g}(t)\cos Etdt. \tag{5}$$

Dans le but d'observer les positions des zéros de Riemann, notre intérêt est focalisé sur les valeurs de $E > 10$. De ce fait, nous pouvons simplement oublier le premier terme, puisque sur ce domaine, sa valeur est inférieure à l'incertitude expérimentale dans les mesures.

Notre but est d'obtenir une fonction d'oscillation $f(t)$ telle que l'effet tunnel effectif soit proportionnel à la composante réelle de $g(E)$, c'est-à-dire que $\mathrm{Re}[J_{\text{eff}}] = \alpha\mathrm{Re}[g(E)]$, où α est la constante de proportionnalité. En comparant l'équation (5) avec l'Équation (1), et en supposant que la période d'oscillation T est suffisamment grande pour remplacer la limite supérieure d'intégration dans l'Équation (5), on découvre que $F(t) = \cos^{-1}(\alpha T \tilde{g}(t))$. La condition limite $F(0) = 0$ nécessite de définir $\alpha = 1/T$, ce qui amène à la fonction d'oscillation finale $f(t) = \partial_t[\cos^{-1}(\tilde{g}(t)\cos Et)]$. Ce choix de α impose également la condition que l'argument de la fonction cosinus inverse soit borné par ± 1 comme nécessité, puisque $\tilde{g}(0)$ est le maximum global de $\tilde{g}(t)$. On peut noter que remplacer la limite supérieure d'intégration par T représente une restriction importante de la valeur de Ω. Ce remplacement signifie que T doit être grand comparativement à la valeur de $\tilde{g}(t)$, et ainsi la fréquence d'oscillation Ω doit de façon correspondante être basse. Pourtant, pour que l'Équation (1) soit une description précise de la dynamique du système, il faut une grande valeur de Ω, de telle façon que le système soit dans le régime haute-fréquence. Alors, de bons résultats seront obtenus dans un domaine intermédiaire de fréquence, lorsque ces deux conditions peuvent être à la fois satisfaites adéquatement.

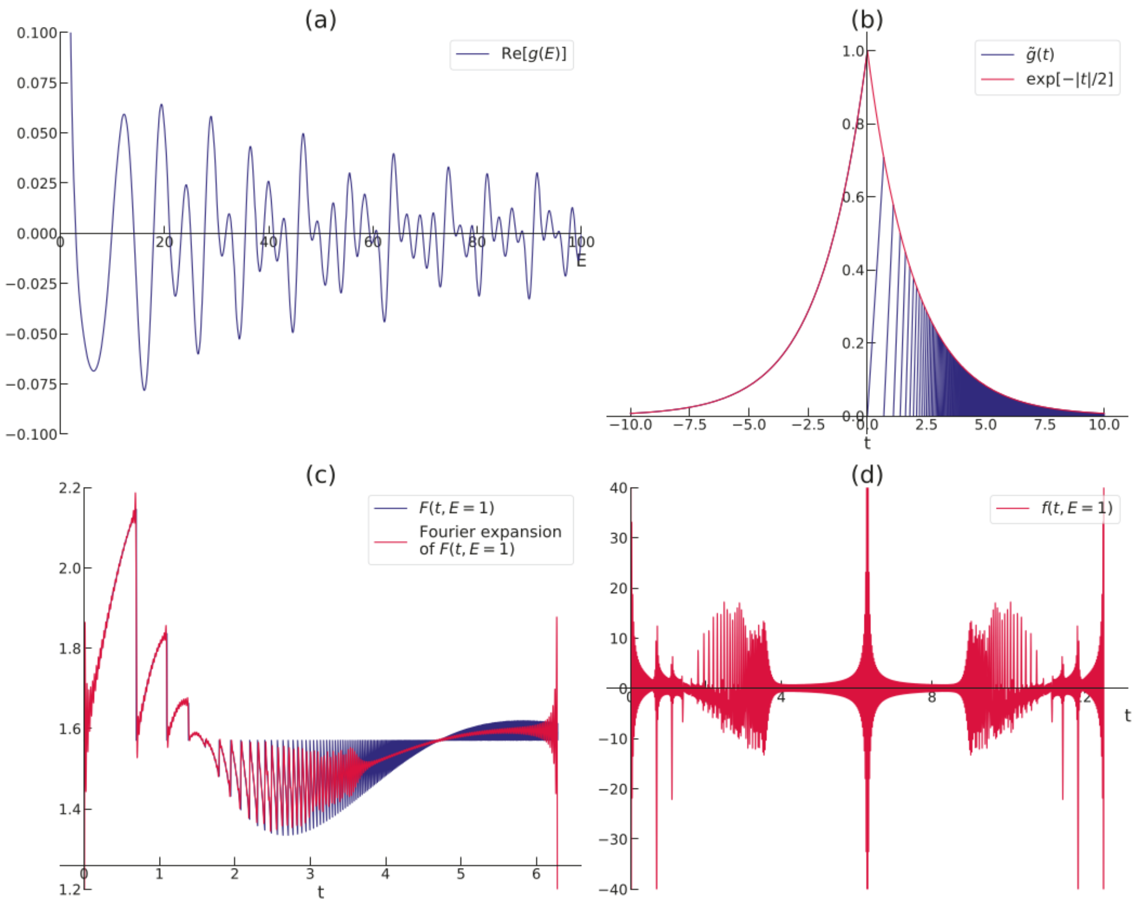

Figure 4 : **Dérivation de la fonction d'oscillation. a** La composante réelle de $g(E) = \zeta(1/2+iE)/(1/2+iE)$. **b** La fonction de Van der Pol est la transformée de Fourier, $\tilde{g}(t)$, de $g(E)$. La fonction est bornée par la courbe rouge $\exp[-|t|/2]$, et contient un nombre infini de discontinuités finies pour t positif, provenant de la fonction floor, i.e. partie entière (voir Équation (4)). **c** La courbe bleue montre $F(t) = \cos^{-1}(\tilde{g}(t)\cos Et)$ la primitive de la fonction d'oscillation, pour le paramètre d'oscillation $E = 1$. Les discontinuités dans $\tilde{g}(t)$ donnent naissance à des discontinuités dans cette fonction également. La courbe rouge montre le développement de Fourier de $F(t)$, tronqué aux 500 premiers termes. On peut noter comment le détail fin est progressivement effacé lorsque t croît. **d** La fonction d'oscillation, $f(t)$, pour $E = 1$, obtenue lorsque $f(t) = \partial_t F(t)$, dessinée pour $0 \leq t < T$. Les discontinuités en $F(t)$ produisent des pointes de la fonction δ dans la fonction d'oscillation. Par construction, $f(t)$ est une fonction paire de t, et ainsi la périodicité totale de cette fonction est $2T$.

Nous montrons la forme de $F(t)$ et la fonction d'oscillation pour une valeur particulière de E sur les Figures 4c et d. Les discontinuités finies présentes pour $g(E)$ produisent également des discontinuités pour $F(t)$, et par conséquent, la fonction δ pique $f(t)$. Une manière pratique d'obtenir $f(t)$ numériquement consiste à prolonger $F(t)$ en une série de Fourier, à différentier la série terme par terme, et alors à la ré-additionner. Comme dans ref. [23] , nous voulons que la fonction d'oscillation soit de parité définie, de façon à ce que les deux états de Floquet soient de parités opposées, et ainsi, puissent se croiser lorsqu'on fait varier le paramètre E. Si cette condition de parité n'était pas satisfaite, le théorème de von Neumann–Wigner empêcherait les quasi-énergies de devenir dégénérées, et ils ne pourraient alors qu'éviter plus largement les croisements à la place. Pour cette raison, nous choisissons de prolonger $F(t)$ en série sinusoïdale de Fourier, de telle façon que sa dérivée, $f(t)$ soit une série cosinusoïdale, et soit par conséquent une fonction paire du temps. Suffisamment de termes doivent être inclus dans la série pour assurer que la structure fine dans $f(t)$ est reproduite avec une résolution suffisante. Typiquement dans l'expérience, la série a été tronquée à 500 termes. De façon analogue, nous pourrions construire une fonction d'oscillation reliée à la composante imaginaire de $g(E)$. Malheureusement, pourtant, $\mathrm{Im}[g(E)]$ ne croise pas l'axe des x aussi nettement que ne le fait $\mathrm{Re}[g(E)]$, rendant la localisation précise des zéros plus difficile.

Détails expérimentaux

Un long temps de cohérence est vital dans l'expérience. La division hyperfine de l'ion ($^{171}Yb^{+}$), $\omega_{hf} = 12642812118.5 + \omega_B \mathrm{Hz}$, a un décalage de Zeeman du second ordre $\omega_B = 310.8B^2$, où B est le champ magnétique exprimé en Gauss (G). Nous avons utilisé des aimants permanents $\mathrm{Sm_2Co_{17}}$ pour engendrer un champ magnétique statique d'environ $B = 9.15$ G pour réduire le bruit de la ligne à courant alternatif à 50 Hz. La plateforme complète est produite dans une prison de μ-métal de 2-mm d'épaisseur pour réduire les champs magnétiques fluctuant résiduels [30]. Durant l'expérience, nous avons également observé une lente dérive de $\sim \pm 30$ Hz de la transition d'horloge en 10 h. Cela correspond à $\Delta B \sim \pm 0.005$ G, qui est principalement dû à la variation de température dans le laboratoire. Cette variation n'est pas négligeable. Par conséquent, la fréquence de la transition d'horloge était fréquemment mesurée par des mesures de type Ramsey et calibrée en mettant à jour la fréquence de l'onde AWG pendant l'expérience toutes les demi-heures.

Disponibilité des données

Les données source et toutes les autres données qui sous-tendent les graphiques de cet article et d'autres découvertes de cette étude sont disponibles et peuvent être obtenues par une demande raisonnable aux auteurs correspondant.

Remerciements

C.E.C. a été financé par le MINECO espagnol à travers la subvention FIS2017-84368-P, et G.S. par PGC2018-095862-B-C21, QUITEMAD+ S2013/ICE-2801, SEV-2016-0597 et la plateforme de recherche CSIC sur les technologies quantiques PTI-001. R.H., M.Z.A., J.M.C., Y.F.H., Y.J.H., C.F.L., et G.C.G. ont été financés par le programme national chinois de recherche et développement (Subventions Nos. 2017YFA0304100 et 2016YFA0302700), la Fondation nationale de sciences naturelles de Chine (Subventions Nos. 11874343, 61327901, 11774335, and 11734015), Programme de recherches interdisciplinaires des sciences, CAS (subvention No. QYZDY-SSW-SLH003), les fonds de recherche fondamentale pour les universités centrales (subventions Nos. WK2470000026, WK2470000027, et WK2470000028), et l'initiative Anhui en technologies de l'information quantique (subventions Nos. AHY020100 and AHY070000).

Contributions des auteurs

C.E.C. et G.S. ont développé la proposition technique. R.H., M.Z.A., J.M.C. et Y.F.H. ont conçu et réalisé l'expérience. Y.J.H., C.F.L. et G.C.G. ont supervisé les expériences. Tous les auteurs ont contribué à l'analyse des données, la progression du projet, la discussion des résultats et l'écriture du manuscrit.

Références

1. Edwards, H. M. *Riemann's zeta function* (Academic, New York, 1974).

2. Riemann, B. Ueber die anzahl der primzahlen unter einer gegebenen grosse. *Ges. Math. Werke und Wissenschaftlicher Nachlaß* **2**, 145–155 (1859).

3. Conrey, J. B. The Riemann hypothesis. *Not. Am. Math. Soc.* **50**, 341–353 (2003).

4. Berry, M. V. Hearing the music of the primes : auditory complementarity and the siren song of zeta. *J. Phys. A : Math. Theor.* **45**, 382001 (2012).

5. Montgomery, H. L. The pair correlation of the zeros of the zeta function. *Proc. Symp. Pure Math.* **24**, 181–193 (1973).

6. Montgomery, H. L. Distribution of the zeros of the Riemann zeta function. *Proc. Int. Cong. Math. Vanc.* **1**, 379–381 (1974).

7. Odlyzko, A. M. On the distribution of spacings between zeros of the zeta function. *Math. Comp.* **48**, 273–308 (1987).

8. Berry, M. V. Riemann's zeta function : a model for quantum chaos ?, In *Quantum Chaos and Statistical Nuclear Physics*, 1-17. (Lecture Notes in Physics, vol. 263. Springer, Berlin, Heidelberg, 1986).

9. Berry, M. V. Semiclassical formula for the number variance of the Riemann zeros. *Nonlinearity* **1**, 339 (1988).

10. Bogomolny, E. B. & Keating, J. P. Gutzwiller's trace formula and spectral statistics : beyond the diagonal approximation. *Phys. Rev. Lett.* **77**, 1472 (1996).

11. Berry, M. V. & Keating, J. P. The Riemann zeros and eigenvalue asymptotics. *SIAM Rev.* **41**, 236–266 (1999).

12. Connes, A. Trace formula in noncommutative geometry and the zeros of the Riemann zeta function. *Sel. Math. N. Ser.* 5, 29–106 (1999).

13. Sierra, G. & Rodriguez-Laguna, J. The $H = xp$ model revisited and the Riemann zeros. *Phys. Rev. Lett.* **106**, 200201 (2011).

14. Berry, M. V. & Keating, J. P. A compact hamiltonian with the same asymptotic mean spectral density as the Riemann zeros. *J. Phys. A : Math. Theor.* **44**, 285203 (2011).

15. Srednicki, M. The Berry-Keating hamiltonian and the local Riemann hypothesis. *J. Phys. A : Math. Theor.* **44**, 305202 (2011).

16. Bender, C. M., Brody, D. C. & Müller, M. P. Hamiltonian for the zeros of the Riemann zeta function. *Phys. Rev. Lett.* **118**, 130201 (2017).

17. Sierra, G. The Riemann zeros as spectrum and the Riemann hypothesis. *Symmetry* **11**, 494 (2019).

18. Creffield, C. E. Location of crossings in the Floquet spectrum of a driven two-level system. *Phys. Rev. B* **67**, 165301 (2003).

19. Bukov, M., D'Alession, L. D. & Polkovnikov, A. Universal high-frequency behavior of periodically driven systems : from dynamical stabilization to Floquet engineering. *Adv. Phys.* **64**, 139–226 (2015).

20. Grossmann, F., Dittrich, T., Jung, P. & Hänggi, P. Coherent destruction of tunneling. *Phys. Rev. Lett.* **67**, 516 (1991).

21. van der Pol, B. An electro-mechanical investigation of the Riemann zeta function in the critical strip. *Bull. Am. Math. Soc.* **53**, 976–981 (1947).

22. Berry, M. V. Riemann zeros in radiation patterns. *J. Phys. A : Math. Theor.* **45**, 302001 (2012).

23. Creffield, C. E. & Sierra, G. Finding zeros of the Riemann zeta function by periodic driving of cold atoms. *Phys. Rev. A* **91**, 063608 (2015).

24. He, R. et al. Identifying the Riemann zeros by periodically driving a single qubit. *Phys. Rev. A* **101**, 043402 (2020).

25. Cui, J. M. et al. Experimental trapped-ion quantum simulation of the Kibble-Zurek dynamics in momentum space. *Sci. Rep.* **6**, 33381 (2016).

26. Olmschenk, S. et al. Manipulation and detection of a trapped Yb. hyperfine qubit. *Phys. Rev. A* **76**, 052314 (2007).

27. Wang, Y. et al. Single-qubit quantum memory exceeding ten-minute coherence time. *Nat. Photon* **11**, 646–650 (2017).

28. Landau, E. Über die nullstellen der zetafunction. *Math. Ann.* **71**, 548 (1991).

29. Berry, M. V. Riemann zeros in radiation patterns : II. Fourier transform of zeta. *J. Phys. A* **48**, 385203 (2015).

30. Ruster, T. et al. A long-lived Zeeman trapped-ion qubit. *Appl. Phys. B* **122**, 254 (2016).