

Zéros de zêta et opérateurs d'ondes prolates
Opérateurs adéliques semi-locaux
Alain Connes, Caterina Consani, Henri Moscovici

Résumé : Nous intégrons dans le cadre de la formule de trace semi-locale deux découvertes récentes sur la réalisation spectrale des zéros de la fonction zêta de Riemann en introduisant un analogue semi-local de l'opérateur d'onde ellipsoïdal. Ce dernier joue un rôle clé à la fois dans la réalisation spectrale des premiers zéros de la fonction zêta - en utilisant la partie positive de son spectre - et de leur comportement ultraviolet - en utilisant l'espace de Sonin qui correspond à la partie négative du spectre. Dans le cas archimédien, l'opérateur d'onde ellipsoïdal est la somme du carré de l'opérateur d'échelle avec la mise à l'échelle des polynômes orthogonaux, et nous montrons que cette formulation s'étend au cas semi-local. Nous prouvons la stabilité de l'espace de Sonin semi-local et décrivons sa relation avec les espaces de Hilbert de fonctions entières. Enfin, nous relierons l'opérateur d'onde ellipsoïdal à la représentation métaplectique de $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$ dans le but d'obtenir un second candidat pour l'opérateur d'onde ellipsoïdal semi-local.

1 Introduction

La difficulté de résoudre l'hypothèse de Riemann (HR) est souvent attribuée principalement au nombre infini de termes du produit d'Euler.

$$\zeta(s) = \prod_p (1 - p^{-s})^{-1} \quad (1)$$

Cependant, contrairement à cette croyance répandue, il existe une propriété $P(n)$, impliquant uniquement les facteurs d'Euler pour les nombres premiers inférieurs à n , et dont la validité pour tout n est équivalente à HR. Ceci découle du critère de positivité de Weil qui implique la forme quadratique Q_n définie à l'aide des formules explicites de Riemann-Weil appliquées aux fonctions de test à support dans l'intervalle symétrique compact $[\frac{1}{n}, n]$. De plus, la formule de trace semi-locale de [6] donne, pour chaque n , un cadre théorique de l'espace de Hilbert dans lequel la forme quadratique de Weil Q_n devient la trace d'une expression simple de la théorie des opérateurs, offrant ainsi un terrain d'exploration naturel pour attaquer HR. Cet article approfondit le développement de l'approche en théorie des opérateurs de HR en fournissant un cadre unifié intégrant deux découvertes récentes relatives à la réalisation spectrale des zéros de la fonction zêta de Riemann.

D'une part, les résultats de [7,8] montrent que la formule de trace semi-locale de [6] fournit une explication conceptuelle de la positivité de Weil pour la place archimédienne, sa source étant la représentation du groupe de mise à l'échelle dans l'espace de Hilbert. De plus, dans le même esprit, [9] montre qu'il est possible d'accéder à la partie infrarouge (de basse altitude) des zéros de la fonction zêta de Riemann en utilisant l'opérateur de mise à l'échelle avec conditions aux limites périodiques, restreint à l'orthogonal du noyau de la forme quadratique de Weil. D'autre part, le comportement inhabituel des zéros de la fonction zêta de Riemann dans l'ultraviolet a trouvé une incarnation spectrale inattendue dans [10], en termes de valeurs propres négatives de l'opérateur d'onde prolata classique étendu à la droite réelle entière. Dans cet article, nous combinons ces développements et allons au-delà de la simple place archimédienne, en utilisant le cadre semi-local de [6], qui fournit une étape théorique canonique des opérateurs d'espaces de Hilbert, dans laquelle les principaux acteurs continuent d'avoir un sens, et où la formule explicite et le noyau de la forme

quadratique de Weil ont tous deux une signification conceptuelle.

Le rôle de l'opérateur prolate est crucial dans les accords observés avec les zéros de zêta (dans l'infrarouge et l'ultraviolet). Son importance dans [9] vient du fait que le noyau de la forme quadratique de Weil est donné par le domaine de l'application $\mathcal{E}$ définie sur l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})_0^{\text{pair}}$ par la formule $\mathcal{E}(f)(u) := u^{1/2} \sum f(nu)$. Appliqué aux fonctions propres φ_n de l'opérateur prolate pour des valeurs propres *positives*, on génère des valeurs propres extrêmement petites de la forme quadratique de Weil restreintes aux fonctions à support compact fixe. Les fonctions propres ψ_n correspondantes de la forme quadratique de Weil sont reconstruites dans [9] par orthogonalisation de Gram-Schmidt de $\mathcal{E}(\varphi_n)$. La forme semi-locale de l'application $\mathcal{E}$ concorde avec l'identification canonique des fonctions semi-locales aux fonctions sur les classes idéales. La signification conceptuelle de l'application $\mathcal{E}$ apparaîtra clairement dans le formalisme semi-local. Les fonctions propres ψ_n ont été utilisées dans [9] pour conditionner l'opérateur de mise à l'échelle avec des conditions aux limites périodiques. Grâce à ce processus, nous avons généré les zéros les plus bas de la fonction zêta, tandis que le comportement ultraviolet des zéros restait hors de portée. Ainsi, le fait que le comportement ultraviolet attendu soit réalisé par le spectre négatif de l'opérateur prolate suggère le programme tentant de trouver l'analogie semi-local de l'opérateur prolate. Nous espérons que l'utilisation de tels outils de théorie des opérateurs dans le cas semi-local ouvre une voie pour traiter la positivité de Weil comme dans [8]. En fait, l'aspect théorique des opérateurs du présent article fournit une stratégie plus précise pour aborder la positivité semi-locale de Weil en comparant la fonctionnelle de trace associée à l'opérateur - qui est automatiquement positive pour un opérateur auto-adjoint - avec la fonctionnelle de Weil. Le conditionnement, par le noyau de la forme quadratique de Weil, qui a fonctionné pour l'opérateur de mise à l'échelle dans le cas infrarouge sera implémenté automatiquement par l'orthogonalité de la partie positive et de la partie négative du spectre de l'opérateur prolate semi-local, dont l'espace propre négatif correspondant ¹ a été identifié dans [10] à l'espace de Sonin.

Notre approche consiste à réinterpréter l'opérateur prolate afin de proposer un candidat pour son homologue semi-local. Ceci est réalisé en plaçant au premier plan l'opérateur de mise à l'échelle, dont la version semi-locale est bien établie dans [6], ainsi que l'espace de Sonin.

L'opérateur de mise à l'échelle $\mathbb{S}$ est le générateur auto-adjoint du groupe des dilatations dans l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R})^{\text{pair}}$ des fonctions paires de carré intégrable sur la droite réelle. L'opérateur prolate admet une expression simple en termes de l'opérateur $\mathbb{S}$ et du vecteur donné par la fonction $\xi(x) := e^{-\pi x^2}$. Ce vecteur appartient au domaine de $\mathbb{S}^n$ pour tout n , et l'étendue de $\mathbb{S}^n \xi$ est $L^2(\mathbb{R})^{\text{pair}}$. Soit N la mise à l'échelle associée à la filtration issue du domaine linéaire de polynômes $p(\mathbb{S})\xi$, avec $\deg P \leq n$. En négligeant la définition délicate du domaine, nécessaire à l'obtention d'un opérateur auto-adjoint, l'opérateur prolate $\mathbf{W}_\lambda$ est donné par l'expression formelle.

$$\mathbf{W}_\lambda = -\mathbb{S}^2 + 2\pi\lambda^2(4N + 1) - \frac{1}{4}. \quad (2)$$

La formule (2) est significative pour toute *paire cyclique* (D, ξ) donnée par un opérateur auto-adjoint D agissant dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ et un vecteur unitaire $\xi \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \text{Dom} D^n$ qui est cyclique (c'est-à-dire tel que les vecteurs $p(D)\xi$ avec p un polynôme, soient denses dans $\mathcal{H}$). Pour

1. à un écart possible de dimension finie près

toute paire cyclique (D, ξ) , le théorème spectral fournit une *forme canonique* (ou diagonalisation) dans laquelle D est représenté par la multiplication par la variable $s \in \mathbb{R}$ dans l'espace de Hilbert $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}, d\mu)$ où $d\mu$ est la mesure spectrale définie par $\int f(s) d\mu(s) := \langle f(D)\xi | \xi \rangle$, et le vecteur cyclique ξ est la fonction constante 1. La théorie des polynômes orthogonaux pour la mesure $d\mu$ fournit alors la représentation de D comme une matrice de Jacobi et de l'opérateur de mise à l'échelle N comme une matrice diagonale. Nous rappelons ces faits fondamentaux dans la section 2. Il s'avère que l'on peut naturellement associer à une paire cyclique un triplet spectral $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$ où $\mathcal{H}$ et D sont inchangés tandis que l'algèbre $\mathcal{A} := c_0(\mathbb{N})$ agit via l'opérateur de mise à l'échelle N associé aux polynômes orthogonaux de la mesure spectrale. Le rôle du triplet spectral $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$ est de comprendre algébriquement l'opérateur prolate comme une perturbation de l'opérateur $-D^2$ par l'ajout d'un élément de l'algèbre $\mathcal{A}$. Le triplet spectral $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$ d'une paire cyclique est *pair* (au sens où il admet une $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -mise à l'échelle commutant avec l'algèbre et anticommuntant avec D) si et seulement si la mesure spectrale $d\mu$ est paire, c'est-à-dire invariante par $s \mapsto -s$. De plus, une telle $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -mise à l'échelle γ est unique si elle existe. Dans le cas pair, on obtient une représentation matricielle de Jacobi pour l'opérateur prolate (définition 2.2).

Dans la section 3, nous décrivons dans la section 3.1 la forme canonique de la paire cyclique paire associée à l'opérateur de mise à l'échelle $D = \mathbb{S}$ et au vecteur cyclique $\xi_\infty(x) = 2^{1/4} e^{-\pi x^2}$. La mise à l'échelle est donnée par la transformée de Fourier $\mathbb{F}_{e_{\mathbb{R}}}$ agissant dans $L^2(\mathbb{R})^{pair}$. L'isomorphisme avec la forme canonique est donné par l'unitaire.

$$\mathcal{V} = \mathcal{M} \circ \mathcal{U} : L^2(\mathbb{R})^{pair} \rightarrow L^2(\mathbb{R}, dm) \quad (3)$$

qui est la composition de la transformation unitaire $\mathcal{U} : L^2(\mathbb{R})^{pair} \rightarrow L^2(\mathbb{R})$

$$\mathcal{U}(f) = \pi^{-\frac{1}{2}} \int_0^\infty f(v) v^{\frac{1}{2}-is} d^*v.$$

avec l'opérateur de multiplication $\mathcal{M}(f)(s) := \mathcal{U}(\xi_\infty)^{-1}(s)f(s)$ qui est un isomorphisme unitaire $\mathcal{M} : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R}, dm)$ pour la mesure de probabilité $dm(s) := (2\pi)^{-\frac{3}{2}} |\Gamma(\frac{1}{4} + \frac{is}{2})|^2 ds$ sur $\mathbb{R}$. L'isomorphisme unitaire $\mathcal{V}$ de (3) est la transformée de Hardy-Titchmarsh qui, modulo les normalisations, apparaît déjà dans l'article [12], théorème 1, p. 201. Leur motivation initiale était de construire des fonctions auto-réciproques en conjuguant la transformée de Fourier avec la symétrie $s \mapsto -s$. Ceci met en évidence le rôle de la régularité, c'est-à-dire la $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -mise à l'échelle, de la paire cyclique. L'isomorphisme unitaire $\mathcal{V}$ transforme les fonctions de Hermite en les polynômes orthogonaux P_n pour la mesure dm et l'opérateur de mise à l'échelle $\mathbb{S}$ en la multiplication par s . De plus, l'opérateur d'onde prolate

$$(\mathbf{W}_\lambda \psi)(q) = -\partial((\lambda^2 - q^2)\partial) \psi(q) + (2\pi\lambda q)^2 \psi(q) \quad (4)$$

devient un cas particulier de (2) et, en fait, d'une construction générale pour les polynômes orthogonaux. Plus précisément, avec N l'opérateur de mise à l'échelle $N(P_n) := n P_n$ dans $L^2(\mathbb{R}, dm)$, on obtient

$$\mathcal{V} \circ \mathbf{W}_\lambda \circ \mathcal{V}^* = -s^2 + 2\pi\lambda^2(4N + 1) - \frac{1}{4} \quad (5)$$

où s^2 est l'opérateur de multiplication par le carré de la variable dans $L^2(\mathbb{R}, dm)$. Le membre de droite de (5) est significatif dans le contexte général des polynômes orthogonaux. Nous calculons

dans la section 3.4 la matrice de Jacobi hermitienne de l'opérateur de mise à l'échelle $\mathbb{S}$ dans la base des polynômes orthogonaux. Ses éléments diagonaux sont 0, tandis que les éléments non nuls au-dessus de la diagonale sont $\mathbb{S}_{n,n+1} = i\sqrt{(n+1/2)(n+1)}$. Dans la section 3.5, nous décrivons les deux matrices de Jacobi hermitiennes $J_{\pm}$ associées aux opérateurs $\mathbb{S}^2$ restreints aux espaces propres de $\mathbb{F}_{e_{\mathbb{R}}}$ pour les valeurs propres ± 1 . De même, nous obtenons les matrices de Jacobi de l'opérateur prolate $\mathbf{W}_{\lambda}$. Dans la section 3.6, nous montrons que les zéros de la fonction zêta résultent de l'action de l'opérateur de mise à l'échelle sur le quotient par l'étendue de l'application $\mathcal{E}$ appliquée à l'espace propre positif de $\mathbf{W}_{\lambda}$ lorsque $\lambda \rightarrow \infty$.

La section 4 est consacrée à l'extension de la transformée de Hardy-Titchmarsh au cas semi-local impliquant un ensemble fini S de places de $\mathbb{Q}$ contenant l'espace archimédien, et à l'analyse de l'espace semi-local de Sonin. La version semi-locale de la section 3.1 implique une nouvelle mesure qui, à normalisation près, est donnée par le carré de la valeur absolue de la restriction à la droite critique du produit des facteurs locaux pour les places de S .

Pour énoncer ce résultat, nous avons besoin de la notation suivante (voir la section 4.1). L'anneau des adèles semi-locaux est le produit $\mathbb{A}_S = \prod_S \mathbb{Q}_v$, l'espace de classes des adèles semi-locaux est le quotient $X_S := \mathbb{A}_S/\Gamma$, où

$$\Gamma = \{\pm p_1^{n_1} \cdots p_k^{n_k} : p_j \in S \setminus \{\infty\}, n_j \in \mathbb{Z}\} \subset \mathrm{GL}_1(\mathbb{A}_S) = \prod_{p \in S} \mathrm{GL}_1(\mathbb{Q}_p).$$

Le groupe de classes d'idèles semi-local $C_S := \mathrm{GL}_1(\mathbb{A}_S)/\Gamma$ agit sur X_S par multiplication et cette action se restreint à son sous-groupe compact maximal K_S . On a un isomorphisme canonique w_S de l'espace de Hilbert $L^2(X_S)^{K_S}$ avec $L^2(\mathbb{R}_+^*, d^*u)$, voir (42). Avec $\mathbb{F}_{\mu} : L^2(\mathbb{R}_+^*, d^*u) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ la transformée de Fourier pour le groupe multiplicatif $\mathbb{R}_+^*$, voir (17), on obtient la transformée unitaire $\mathcal{U}_S := \mathbb{F}_{\mu} \circ w_S$. Soit finalement $\mathcal{M}_S : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R}, dm_S)$ l'équation unitaire donnée par

$$\mathcal{M}_S(f)(s) := \left(\prod_{v \in S} L_v \left(\frac{1}{2} - is \right) \right)^{-1} f(s), \quad dm_S(s) := \left| \prod_{v \in S} L_v \left(\frac{1}{2} - is \right) \right|^2 ds. \quad (6)$$

où les L_v sont les facteurs d'Euler locaux.

Soit K_S le noyau du module $C_S \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ et désignons par $\mathbb{S}$ le générateur de l'action de mise à l'échelle de $\mathrm{GL}_1(\mathbb{R})_+ \subset \mathrm{GL}_1(\mathbb{A}_S) = \prod_{p \in S} \mathrm{GL}_1(\mathbb{Q}_p)$ sur $L^2(X_S)^{K_S}$.

On en déduit alors le résultat suivant :

Théorème 1 : (*Proposition 4.1 et Proposition 4.2*)

Soit S un ensemble fini de places avec $\infty \in S$, soit R_S le sous-anneau compact maximal de $\prod_{p \in S \setminus \{\infty\}} \mathbb{Q}_p$, et $f \in L^2(\mathbb{R})^{pair}$. Alors, soit $\eta_S(f)$ la classe de la fonction $1_{R_S} \otimes f$ dans $L^2(X_S)^{K_S}$.

(i) On a

$$\mathbb{F}_{\mu} w_S(\eta_S(f))(s) = \left(\prod_{p \in S \setminus \{\infty\}} L_p \left(\frac{1}{2} - is \right) \right) (\mathbb{F}_{\mu} w_{\infty} f)(s). \quad (7)$$

- (ii) Soit la transformée de Fourier pour $\mathbb{Q}_p$ normalisée de telle sorte que la fonction $1_{\mathbb{Z}_p}$ soit sa propre transformée de Fourier et soit $\mathbb{F}_S$, agissant dans $L^2(X_S)$, induit par le produit tensoriel des transformées de Fourier locales. On a

$$\mathbb{F}_S \circ \eta_S = \eta_S \circ \mathbb{F}_{e_{\mathbb{R}}}.$$

- (iii) La transformation unitaire $\mathcal{V}_S := \mathcal{M}_S \circ \mathcal{U}_S : L^2(X_S)^{K_S} \rightarrow L^2(\mathbb{R}, dm_S)$ donne la forme canonique de la paire cyclique (D, ξ) où $D := \mathbb{S}$ et $\xi = \xi_S := \eta_S(\xi_{\infty})$.
- (iv) La paire cyclique $(\mathbb{S}, \xi_S)$ est paire et la $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -mise à l'échelle est donnée par la transformée de Fourier $\mathbb{F}_S$ qui devient la symétrie $s \mapsto -s$ par la transformation unitaire $\mathcal{V}_S$.

Le calcul des coefficients de la matrice hermitienne de Jacobi de la paire cyclique pour un S général comme ci-dessus est reporté à un article à paraître. Afin d'analyser les espaces de Sonin semi-locaux, nous introduisons la transformée duale de Hardy-Titchmarsh dans la section 4.4. Dans le cas de la place archimédienne unique, cette transformée a été introduite par J-F. Burnol en lien avec les travaux de L. de Branges. Le principal résultat de cette section est la construction d'un isomorphisme hilbertien² $\theta_S : L^2(\mathbb{R})^{pair} \rightarrow L^2(X_S)^{K_S}$ qui relie les espaces de Sonin semi-locaux :

Théorème 2 : Soit S un ensemble fini de places avec $\infty \in S$ et $\lambda > 0$. Alors l'application θ_S induit un isomorphisme hilbertien des espaces de Sonin $\theta_S : \mathbf{S}_{\lambda}(\mathbb{R}, e_{\infty}) \rightarrow \mathbf{S}_{\lambda}(X_S, \alpha)$ où α est le caractère normalisé.

Ce résultat suggère que l'espace de Sonin défini invariablement obtenu devrait, s'il est convenablement équipé d'un opérateur de type prolate, jouer le rôle de la cohomologie de Weil recherchée. En effet, nous avons observé dans [10] que, dans le cas d'une seule place archimédienne, l'espace de Sonin correspond (à une divergence possible de dimension finie près) à la partie négative du spectre de l'opérateur prolate, ce qui constitue une contrainte supplémentaire dans la recherche de l'analogue semi-local de l'opérateur prolate. De plus, les résultats de [11] suggèrent une forte relation entre les polynômes orthogonaux – qui jouent un rôle clé dans le cas semi-local – et la production de noyaux commutant avec des opérateurs différentiels.

Un autre point de vue conceptuel sur l'opérateur prolate est obtenu dans la section 5. Nous montrons que l'opérateur prolate admet (toujours au niveau algébrique formel) une description comme élément de l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ via la représentation métaplectique du double revêtement de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. Nous comparons cette description de l'opérateur prolate avec la section correspondante dans [12]. Nous montrons que les générateurs de la représentation métaplectique ont un sens dans le contexte de paires cycliques, c'est-à-dire de manière équivalente de polynômes orthogonaux. Nous prouvons (théorème 5.3) que les coefficients de divergence d_n s'annulent précisément dans le cas de la section 3.1 et que leur annulation détermine de manière unique la paire cyclique $(\mathbb{S}, \xi_{\infty})$, les moments associés et la représentation.

Dans un article à paraître, nous développerons le rôle de la représentation de Weil [15] de la couverture métaplectique du groupe algébrique $\mathrm{SL}_2(\mathbb{A}_S)$ dans le contexte semi-local, introduisant ainsi un second candidat potentiel pour l'opérateur prolate semi-local.

2. Nous utilisons le terme "hilbertien" pour désigner la structure topologique de l'espace vectoriel d'un espace de Hilbert

2 Paires cycliques et opérateurs prolates associés

Dans cette section, nous donnons une construction générale à partir d'un couple (D, ξ) constitué d'un opérateur auto-adjoint D agissant dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ et d'un vecteur unitaire $\xi \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \text{Dom } D^n$. Nous supposons que $\mathcal{H}$ est de dimension infinie et que ξ est un *vecteur cyclique*, c'est-à-dire que l'étendue linéaire des vecteurs $D^j \xi$ pour $j \in \mathbb{N}$ est dense dans $\mathcal{H}$. Étant donnée une telle paire, nous notons $E_n \subset \mathcal{H}$ l'espace engendré linéairement par les vecteurs $D^j \xi$ pour $j \leq n$. Ce sont des sous-espaces de dimension finie de $\mathcal{H}$ et $\dim E_n = n + 1$, car les vecteurs $D^j \xi$ sont linéairement indépendants. On a par construction $D(E_n) \subset E_{n+1}$ et la situation générale est décrite comme suit par le théorème spectral.

Théorème 2.1 *Soit (D, ξ) une paire cyclique comme ci-dessus.*

- (i) *Il existe une mesure de probabilité μ sur $\mathbb{R}$ et un isomorphisme unitaire $U : \mathcal{H} \rightarrow L^2(\mathbb{R}, d\mu)$ qui transforme D en l'opérateur de multiplication par la variable $s \in \mathbb{R}$ et le vecteur ξ en la fonction constante égale à 1.*
- (ii) *Par l'isomorphisme U , le sous-espace E_n devient l'espace des polynômes de degré $\leq n$.*
- (iii) *La mesure spectrale $\int f(s) d\mu(s) := \langle f(D)\xi | \xi \rangle$ est un invariant complet de la paire cyclique.*

Le théorème 2.1 donne la forme canonique d'une paire cyclique (D, ξ) . On peut alors appliquer la théorie générale des polynômes orthogonaux et obtenir une base orthonormée (ξ_j) où $\xi_0 = \xi$ et E_n est l'espace des ξ_j pour $j \leq n$. On considère alors l'opérateur *nombre* N diagonal dans la base orthonormée (ξ_j) et tel que $N\xi_j := j\xi_j$.

Définition 2.2 *Soit (D, ξ) une paire cyclique. L'opérateur prolate formel $\omega(D, \xi, \lambda)$ est l'opérateur*

$$\omega(D, \xi, \lambda) := -D^2 + \lambda^2 N.$$

Cette définition est formelle dans la mesure où elle ne donne pas précisément le domaine de définition de l'opérateur. Nous verrons dans la section 3 que l'opérateur différentiel prolate standard $\mathbf{W}_\lambda$ est un cas particulier de la définition 2.2. Il est clair dans ce cas que l'opérateur formel obtenu est symétrique et que trouver l'extension auto-adjointe pertinente est délicat.

Définition 2.3 *Soit (D, ξ) une paire cyclique. Une $\mathbb{Z}/2$ -mise à l'échelle γ est un unitaire de carré 1, $\gamma^2 = 1$, $\gamma = \gamma^*$ tel que $\gamma D = -D\gamma$ et $\gamma \xi = \xi$. Une paire cyclique est paire ssi elle admet une $\mathbb{Z}/2$ -mise à l'échelle.*

Proposition 2.4 *Une paire cyclique est paire ssi la mesure spectrale μ du théorème 2.1 est invariante par $s \mapsto -s$. La $\mathbb{Z}/2$ -mise à l'échelle est unique (si elle existe) et égale à $\gamma = \exp(i\pi N)$.*

Preuve : Supposons que la mesure μ de la proposition 2.4 soit invariante par $s \mapsto -s$. Soit $\gamma(f)(s) := f(-s)$ pour tout $f \in L^2(\mathbb{R}, d\mu)$. On a $\gamma^2 = 1$ et γ est unitaire par invariance de la mesure. Par construction, γ anticommute avec la multiplication par s et on a $\gamma \xi = \xi$ où $\xi(s) = 1$, $\forall s$. En utilisant l'isomorphisme unitaire $U : \mathcal{H} \rightarrow L^2(\mathbb{R}, d\mu)$ de la proposition 2.4 on obtient une $\mathbb{Z}/2$ -mise à l'échelle pour (D, ξ) . Inversement, soit γ une $\mathbb{Z}/2$ -mise à l'échelle pour (D, ξ) . Alors la mesure spectrale est invariante par $s \mapsto -s$, car on a

$$\int h(s) d\mu(s) := \langle h(D)\xi | \xi \rangle = \langle h(D)\gamma \xi | \gamma \xi \rangle = \langle h(-D)\xi | \xi \rangle = \int h(-s) d\mu(s)$$

Montrons l'unicité de la $\mathbb{Z}/2$ -mise à l'échelle. Soit γ' une autre $\mathbb{Z}/2$ -mise à l'échelle. Alors le produit $u = \gamma\gamma'$ commute avec D et vérifie $u\xi = \xi$. Ainsi, on a $uD^j\xi = D^j\xi$ pour tout $j \in \mathbb{N}$ et comme ξ est cyclique, on obtient $u = 1$ et donc $\gamma' = \gamma$. Montrons que $\gamma = \exp(i\pi N)$. On a $\gamma D^j\xi = (-1)^j D^j\xi$. Ceci montre que les sous-espaces E_n (couverture vectorielle des $D^j\xi$ pour $j \leq n$) sont globalement invariants par γ et qu'ils se décomposent en les espaces propres $E_n^\pm$ engendrés respectivement par les $D^j\xi$ pour $j \leq n$, j pair et j impair. Le processus d'orthonormalisation de Gram-Schmidt se déroule donc indépendamment dans $E_n^\pm$, donnant la base orthonormée ξ_j où $\xi_j \in E_n^\pm$ selon la parité de j . Il en résulte que $\gamma = \exp(i\pi N)$. $\square$

2.1 Triplet spectral d'une paire cyclique

Soit (D, ξ) une paire cyclique paire et γ une $\mathbb{Z}/2$ -mise à l'échelle. La proposition 2.4 suggère de considérer le triplet spectral pair $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$ où la C^* -algèbre $\mathcal{A} := c_0(\mathbb{N})$ des suites s'annulant à l'infini agit comme suit dans l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$ de la paire cyclique :

$$c_0(\mathbb{N}) \times \mathcal{H} \ni (f, \eta) \mapsto f(N)\eta \in \mathcal{H} \quad (8)$$

Proposition 2.5 *Soit (D, ξ) une paire cyclique, et $\mathcal{A} := c_0(\mathbb{N})$ agissant dans $\mathcal{H}$ par (8). Alors $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$ est un triplet spectral et les commutateurs $[D, f]$ ont du sens et sont bornés pour tout $f \in c_c(\mathbb{N}) \subset c_0(\mathbb{N})$.*

Preuve : Soit $f \in c_c(\mathbb{N})$, c'est par construction une combinaison linéaire finie des fonctions delta $\delta_j(k) := 0$ pour $k \neq j$ et $\delta_j(j) = 1$. L'action (8) de δ_j dans $\mathcal{H}$ est l'opérateur de rang un $|\xi_j\rangle\langle\xi_j|$, et son commutateur avec D a du sens puisque $\xi_j \in \text{Dom} D$ et il est égal à l'opérateur borné $|D\xi_j\rangle\langle\xi_j| - |\xi_j\rangle\langle D\xi_j|$. Ainsi, les commutateurs $[D, f]$ sont des opérateurs de rang fini pour tout $f \in c_c(\mathbb{N}) \subset c_0(\mathbb{N})$. $\square$

On a $D\xi_j \in E_{j+1}$ pour tout j et $\langle D\xi_n | \xi_k \rangle = 0$ pour $k < n - 1$ en utilisant $D = D^*$. On a donc

$$D\xi_n = a_{n-1}\xi_{n-1} + a_n\xi_{n+1}, \quad a_n \neq 0, \quad (9)$$

où l'on peut fixer par récurrence la phase des vecteurs orthonormés ξ_n de telle sorte que les scalaires non nuls $a_n := \langle D\xi_n | \xi_{n+1} \rangle$ soient positifs. Soit $f \in c_c(\mathbb{N})$, on a $f = \sum f(j)\delta_j$ et

$$\begin{aligned} [D, f] &= \sum f(j)[D, \delta_j] = \sum f(j)a_j (|\xi_{j+1}\rangle\langle\xi_j| - |\xi_j\rangle\langle\xi_{j+1}|) + \sum f(j)a_{j-1} (|\xi_{j-1}\rangle\langle\xi_j| - |\xi_j\rangle\langle\xi_{j-1}|) \\ &= \sum (f(j) - f(j+1))a_j (|\xi_{j+1}\rangle\langle\xi_j| - |\xi_j\rangle\langle\xi_{j+1}|) = \sum \alpha_j (|\xi_{j+1}\rangle\langle\xi_j| - |\xi_j\rangle\langle\xi_{j+1}|) \end{aligned}$$

où $\alpha_j := (f(j) - f(j+1))a_j$. Soit $T(j) := (|\xi_{j+1}\rangle\langle\xi_j| - |\xi_j\rangle\langle\xi_{j+1}|)$. On a

$$\left\| \sum \alpha_j T(j) \right\| \leq \left\| \sum \alpha_{2j} T(2j) \right\| + \left\| \sum \alpha_{2j+1} T(2j+1) \right\| = \max |\alpha_{2j}| + \max |\alpha_{2j+1}|$$

puisque les matrices des termes apparaissant dans le côté droit sont diagonales par blocs. De plus, on a

$$\langle \xi_{k+1} | T(j) \xi_k \rangle = \langle \xi_{k+1} | \xi_{j+1} \rangle \langle \xi_j | \xi_k \rangle - \langle \xi_{k+1} | \xi_j \rangle \langle \xi_{j+1} | \xi_k \rangle = \delta(j - k)$$

de telle façon que

$$\langle \xi_{k+1} | \left(\sum \alpha_j T(j) \right) \xi_k \rangle = \alpha_k$$

et on obtient les inégalités

$$\max |\alpha_j| \leq \left\| \sum \alpha_j T(j) \right\| \leq \max |\alpha_{2j}| + \max |\alpha_{2j+1}|$$

ce qui donne

$$\max |(f(j) - f(j+1))a_j| \leq \|[D, f]\| \leq \max_{j \text{ pair}} |(f(j) - f(j+1))a_j| + \max_{j \text{ impair}} |(f(j) - f(j+1))a_j|$$

et

$$\max |(f(j) - f(j+1))a_j| \leq \|[D, f]\| \leq 2 \max |(f(j) - f(j+1))a_j| \quad (10)$$

Nous calculons maintenant la fonction de distance spectrale sur $\mathbb{N}$ associée au triplet spectral $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$.

Proposition 2.6 *Soit $\phi(n) := \sum_{0 \leq j \leq n} a_j^{-1} \in \mathbb{R}_+$. La fonction distance spectrale du triplet spectral $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$ de la proposition 2.4 est équivalente à la distance $d(n, m) := |\phi(n) - \phi(m)|$, plus précisément*

$$\frac{1}{2}d(n, m) \leq \sup\{|f(n) - f(m)| \text{ tels que } \|[D, f]\| \leq 1\} \leq d(n, m) \quad (11)$$

Preuve : Par construction, on a $a_j > 0$ de sorte que l'application ϕ est strictement croissante et que $d(n, m) := |\phi(n) - \phi(m)|$ définit une fonction distance sur $\mathbb{N}$. La distance $d(n, m)$ est donnée par

$$d(n, m) = \sup\{|f(n) - f(m)| \text{ tels que } \max |(f(j) - f(j+1))a_j| \leq 1\}$$

et donc (11) découle de (10). $\square$

2.2 Matrice de Jacobi de l'opérateur prolate d'une paire cyclique

Au niveau formel, c'est-à-dire en ignorant le fait que D soit auto-adjoint ou pas, une paire cyclique paire est déterminée par la suite (a_n) qui donne la matrice de Jacobi de l'opérateur D dans la base (ξ_n) par (9) sans supposer que les a_n sont réels.

$$D = \begin{pmatrix} 0 & a_0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \bar{a}_0 & 0 & a_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \bar{a}_1 & 0 & a_2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \bar{a}_2 & 0 & a_3 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \bar{a}_3 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

On peut alors déterminer une représentation matricielle de Jacobi pour l'opérateur prolate formel de la définition 2.2. Cet opérateur commute avec la notation γ et est donc la somme directe de sa restriction aux espaces propres $\mathcal{H}^\pm := \{\xi \in \mathcal{H} \mid \gamma\xi = \pm\xi\}$. Ces sous-espaces sont engendrés par les vecteurs ξ_n où la parité de n est fixée.

En effet, le carré de la matrice de D est de la forme (pour $n = 5$)

$$\begin{pmatrix} a_0\bar{a}_0 & 0 & a_0a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_0\bar{a}_0 + a_1\bar{a}_1 & 0 & a_1a_2 & 0 & 0 \\ \bar{a}_0\bar{a}_1 & 0 & a_1\bar{a}_1 + a_2\bar{a}_2 & 0 & a_2a_3 & 0 \\ 0 & \bar{a}_1\bar{a}_2 & 0 & a_2\bar{a}_2 + a_3\bar{a}_3 & 0 & a_3a_4 \\ 0 & 0 & \bar{a}_2\bar{a}_3 & 0 & a_3\bar{a}_3 + a_4\bar{a}_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{a}_3\bar{a}_4 & 0 & \dots \end{pmatrix}$$

et ses restrictions à $\mathcal{H}^\pm$ sont des matrices de Jacobi de la forme générale

$$\begin{pmatrix} a_0\bar{a}_0 & a_0a_1 & 0 & 0 \\ \bar{a}_0\bar{a}_1 & a_1\bar{a}_1 + a_2\bar{a}_2 & a_2a_3 & 0 \\ 0 & \bar{a}_2\bar{a}_3 & a_3\bar{a}_3 + a_4\bar{a}_4 & \dots \\ 0 & 0 & \bar{a}_4\bar{a}_5 & \dots \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_0\bar{a}_0 + a_1\bar{a}_1 & a_1a_2 & 0 & 0 \\ \bar{a}_1\bar{a}_2 & a_2\bar{a}_2 + a_3\bar{a}_3 & a_3a_4 & 0 \\ 0 & \bar{a}_3\bar{a}_4 & a_4\bar{a}_4 + a_5\bar{a}_5 & \dots \\ 0 & 0 & \bar{a}_5\bar{a}_6 & \dots \end{pmatrix}$$

Nous donnons maintenant la description matricielle de l'opérateur prolate formel de la définition 2.2.

Proposition 2.7 *L'opérateur prolate formel de la définition 2.2, restreint à $\mathcal{H}^\pm$, est représenté par les matrices de Jacobi $J^\pm$ dont les coefficients matriciels sont nuls, sauf ceux donnés par*

$$J_{n,n+1}^+ = \overline{J_{n+1,n}^+} = -a_{2n}a_{2n+1}, \quad J_{n,n}^+ = -a_{2n}\bar{a}_{2n} - a_{2n-1}\bar{a}_{2n-1} + 2n\lambda^2 \quad (12)$$

$$J_{n,n+1}^- = \overline{J_{n+1,n}^-} = -a_{2n+1}a_{2n+2}, \quad J_{n,n}^- = -a_{2n}\bar{a}_{2n} - a_{2n+1}\bar{a}_{2n+1} + (2n+1)\lambda^2 \quad (13)$$

Preuve : Ceci découle de la définition 2.2 et du calcul de la matrice de restriction de D^2 à $\mathcal{H}^\pm$. $\square$

3 Transformée de Hardy-Titchmarsh : place archimédienne

Cette section contient une démonstration détaillée du théorème suivant.

Théorème 3.1 *Soit h_n les fonctions de Hermite normalisées.*

- (i) *On a $\mathcal{U}(h_0) = 2^{-\frac{3}{4}}\pi^{-\frac{1}{2}}L_\infty(\frac{1}{2} - is)$ où $L_\infty(z) := \pi^{-z/2}\Gamma(z/2)$ est le facteur d'Euler à la place archimédienne.*
- (ii) *Les fonctions $\mathcal{U}(h_{2n})$ sont de la forme $\mathcal{U}(h_{2n})(s) = (-1)^n\mathcal{P}_n(s)\mathcal{U}(h_0)(s)$ où les $\mathcal{P}_n(s)$ sont des polynômes de même parité que n et qui sont orthogonaux (et normalisés) pour la mesure de probabilité $dm(s) := (2\pi)^{-\frac{3}{2}}|\Gamma(\frac{1}{4} + \frac{is}{2})|^2ds$ sur $\mathbb{R}$.*
- (iii) *L'application $\mathcal{M} : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R}, dm)$, $\mathcal{M}(f)(s) := \mathcal{U}(h_0)^{-1}(s)f(s)$ est un isomorphisme unitaire.*
- (iv) *L'isomorphisme unitaire $\mathcal{M} \circ \mathcal{U} : L^2(\mathbb{R})^{pair} \rightarrow L^2(\mathbb{R}, dm)$ transforme les fonctions de Hermite h_{2n} en polynômes orthogonaux $(-1)^n\mathcal{P}_n$ et l'opérateur $\mathbb{S}$ en la multiplication par s .*
- (v) *Soit N l'opérateur de mise à l'échelle $N(\mathcal{P}_n) := n\mathcal{P}_n$ dans $L^2(\mathbb{R}, dm)$. On a*

$$(\mathcal{M} \circ \mathcal{U}) \circ \mathbf{W}_\lambda \circ (\mathcal{M} \circ \mathcal{U})^* = -s^2 + 2\pi\lambda^2(4N + 1) - \frac{1}{4} \quad (14)$$

où s^2 est l'opérateur de multiplication par le carré de la variable dans $L^2(\mathbb{R}, dm)$.

Par construction, les fonctions de Hermite h_n sont elles-mêmes de la forme $h_n(x) = H_n(x)h_0(x)$ où les H_n sont des polynômes orthogonaux (et normalisés). La transformée de Fourier $\mathbb{F}_\mu$ ne préservant ni le produit des fonctions ni leur nature polynomiale, le théorème 3.1 n'est en aucun cas une conséquence de la construction des fonctions de Hermite. L'opérateur $\mathcal{U} \circ S \circ \mathcal{U}^*$ est la multiplication par s tandis que l'opérateur de Hermite donne la mise à l'échelle. Le résultat principal est que, grâce à l'équation fonctionnelle $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ de la fonction Γ , on obtient des polynômes orthogonaux naturels régissant les fonctions $\mathcal{U}(h_{2n})$ où les h_n sont les fonctions de Hermite normalisées.

3.1 Notation

3.1.1 $\mathbb{F}_{e_\mathbb{R}} : L^2(\mathbb{R})^{pair} \rightarrow L^2(\mathbb{R})^{pair}$

La transformée de Fourier $\mathbb{F}_{e_\mathbb{R}} : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$

$$\mathbb{F}_{e_\mathbb{R}}(f)(y) := \int f(x) \exp(-2\pi ixy) dx \quad (15)$$

se restreint au sous-espace $L^2(\mathbb{R})^{pair} \subset L^2(\mathbb{R})$ des fonctions paires.

3.1.2 $w_\infty : L^2(\mathbb{R})^{pair} \rightarrow L^2(\mathbb{R}_+^*, d^*u)$

La mesure de Haar du groupe multiplicatif $\mathbb{R}_+^*$ des nombres réels positifs est $d^*u := du/u$. L'application w_∞ est définie par

$$w_\infty(f)(u) := u^{1/2} f(u) u \in \mathbb{R}_+^*. \quad (16)$$

3.1.3 $\mathbb{F}_\mu : L^2(\mathbb{R}_+^*, d^*u) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$

La transformée de Fourier pour le groupe multiplicatif $\mathbb{R}_+^*$ est

$$\mathbb{F}_\mu(f)(s) := \int_0^\infty f(u) u^{-is} d^*u. \quad (17)$$

3.1.4 $\mathcal{U} : L^2(\mathbb{R})^{pair} \rightarrow L^2(\mathbb{R})$

La transformation unitaire $\mathcal{U} := \pi^{-\frac{1}{2}} \mathbb{F}_\mu \circ w_\infty$ est donnée par

$$\mathcal{U} : L^2(\mathbb{R})^{pair} \rightarrow L^2(\mathbb{R}), \quad \mathcal{U}(f)(s) = \pi^{-\frac{1}{2}} \int_0^\infty f(v) v^{\frac{1}{2}-is} d^*v. \quad (18)$$

3.2 Forme canonique de l'opérateur de mise à l'échelle

Soient $H := x\partial_x$ et $\mathbb{S} := -i(H + \frac{1}{2})$ agissant dans l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R})^{pair}$ comme des opérateurs non bornés. Par construction, $\mathbb{S}$ est le générateur auto-adjoint des transformations unitaires de mise à l'échelle

$$(\exp(it\mathbb{S})f)(x) = \lambda^{1/2} f(\lambda x), \quad \lambda = e^{t/2} t \in \mathbb{R}.$$

Soit $\xi_\infty = h_0 \in L^2(\mathbb{R})^{pair}$ le vecteur de norme 1 donné par

$$h_0(x) := 2^{\frac{1}{4}} \exp(-\pi x^2) x \in \mathbb{R}.$$

On a

$$2^{-\frac{1}{4}}\pi^{\frac{1}{2}}\mathcal{U}(h_0)(s) = \int_0^\infty v^{1/2-is}e^{-\pi v^2}d^*v = \frac{1}{2}\pi^{-\frac{1}{4}+i\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{1}{4}-i\frac{s}{2}\right)$$

On définit la transformation unitaire

$$\mathcal{M} : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R}, dm), \quad \mathcal{M}(f)(s) := \mathcal{U}(h_0)^{-1}(s)f(s) \quad (19)$$

où la mesure dm est $|\mathcal{U}(h_0)|^2 ds$

Proposition 3.2 (i) La transformation unitaire $\mathcal{V}_S := \mathcal{M}_S \circ \mathcal{U}_S : L^2(X_S)^{K_S} \rightarrow L^2(\mathbb{R}, dm_S)$ donne la forme canonique de la paire cyclique (D, ξ) où $D := \mathbb{S}$ et $\xi = \xi_S := \eta_S(\xi_\infty)$.

(ii) La paire cyclique $(\mathbb{S}, \xi_S)$ est paire et la mise à l'échelle est donnée par la transformée de Fourier $\mathbb{F}_S$ qui devient la symétrie $s \mapsto -s$ par la transformation unitaire $\mathcal{V}_S$.

Preuve : (i) Le conjugué de $\mathbb{S}$ par $\mathcal{U}$ est la multiplication par la variable s puisque

$$\int_0^\infty \left(\left(H + \frac{1}{2} \right) f \right) (v) v^{\frac{1}{2}-is} d^*v = \int_0^\infty \partial_v(v^{\frac{1}{2}} f(v)) v^{-is} dv = is \int_0^\infty f(v) v^{\frac{1}{2}-is} d^*v$$

Ceci reste vrai lorsqu'on conjugue par $\mathcal{V}$, puisque par construction $\mathcal{V}(\xi_\infty)$ est la fonction constante $\mathcal{V}(\xi_\infty)(s) = 1$.

(ii) Le vecteur $\xi_\infty = h_0$ est invariant par $\mathbb{F}_{e_{\mathbb{R}}}$ et cette transformation est unitaire de carré 1 et anti-commute avec $\mathbb{S}$, par conséquent le résultat découle de la proposition 2.4. $\square$

3.3 Opérateur numérique N

Nous relierons l'opérateur numérique N de la paire cyclique $(\mathbb{S}, \xi_\infty)$ à l'opérateur différentiel de Hermite $\mathbf{H} = -\partial^2 + (2\pi q)^2$.

Proposition 3.3 (i) L'opérateur numérique N de la paire cyclique $(\mathbb{S}, \xi_\infty)$ est donné par

$$N = \frac{\mathbf{H}}{8\pi} - \frac{1}{4}, \quad \mathbf{H} = -\partial^2 + (2\pi q)^2 \quad (20)$$

(ii) Les fonctions propres de N sont les fonctions de Hermite paires $h_{2n} \in L^2(\mathbb{R})^{pair}$ où

$$h_{2n}(x) = \sum_0^n (-1)^{n-k} 2^{-n+3k+\frac{1}{4}} \frac{((2n)!)^{\frac{1}{2}}}{(2k)!(n-k)!} \pi^k x^{2k} e^{-\pi x^2} \quad (21)$$

Preuve : Les fonctions de Hermite (21) sont des fonctions propres pour l'opérateur $\mathbf{H}$ et donnent la base orthonormée des fonctions propres pour la restriction de $\mathbf{H}$ à $L^2(\mathbb{R})^{pair}$ et les valeurs propres sont $2\pi(4n+1)$. Le sous-espace $E_n \subset L^2(\mathbb{R})^{pair}$ couverture vectorielle des vecteurs $\mathbb{S}^j \xi_\infty$ pour $j \leq n$ est formé des fonctions paires $e^{-\pi x^2} P(x)$ où $P(x)$ est un polynôme pair de degré $\leq 2n$.

On obtient ainsi (i) et (ii). $\square$

En corollaire, on obtient l'équation (14) du théorème 3.1.

Corollaire 3.4

$$(\mathcal{M} \circ \mathcal{U}) \circ \mathbf{W}_\lambda \circ (\mathcal{M} \circ \mathcal{U})^* = -s^2 + 2\pi\lambda^2(4N+1) - \frac{1}{4} \quad (22)$$

Preuve : On a par (4)

$$(\mathbf{W}_\lambda \psi)(q) = \partial(q^2 \partial \psi(q)) + \lambda^2 \mathbf{H} \psi(q) = \left(-\mathbb{S}^2 + \lambda^2 \mathbf{H} - \frac{1}{4} \right) \psi(q)$$

ce qui donne (22) en utilisant (20) car $\mathcal{V} \circ \mathbb{S} \circ \mathcal{V}^*$ est donné par multiplication par s par la proposition 4.2. $\square$

3.4 Matrice de Jacobi pour $\mathbb{S}$

Cette section doit être comparée, pour les formules de la matrice tridiagonale, à la section 8 de [15] (formules basées sur la série de Hermite).

On pose

$$\mathcal{P}_m(x) := \sqrt{(2m)!} \sum_0^m (-1)^k 2^{3k-m} \frac{\prod_{j=0}^{k-1} \left(j - \frac{ix}{2} + \frac{1}{4} \right)}{(2k)!(m-k)!} \quad (23)$$

Proposition 3.5

- (i) Les polynômes $\mathcal{P}_m$ sont orthonormés par rapport à la mesure de probabilité $(2\pi)^{-3/2} |\Gamma(\frac{1}{4} - i\frac{x}{2})|^2 dx$ sur la droite.
- (ii) La matrice agissant sur les vecteurs colonnes³ de l'opérateur de multiplication par x dans la base de $\mathcal{P}_m$ est la matrice hermitienne de Jacobi avec 0 sur la diagonale et $\alpha_n = \frac{i}{2} \sqrt{(2n+1)(2n+2)}$ sur la diagonale supérieure.

Preuve : (i) La transformée $\mathcal{V}(h_{2m})$ par l'unité $\mathcal{V} := \mathcal{M} \circ \mathcal{U} : L^2(\mathbb{R})^{pair} \rightarrow L^2(\mathbb{R}, dm)$ est donnée par le polynôme $(-1)^m \mathcal{P}_m$ obtenu par l'égalité

$$\int_0^\infty x^{1/2-is} \pi^k x^{2k} e^{-\pi x^2} d^*x = \frac{1}{2} \pi^{-\frac{1}{4}+i\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{1}{4} - i\frac{s}{2} + k\right) \quad (24)$$

et l'équation fonctionnelle pour $\Gamma(z)$. Le polynôme $\mathcal{P}_0 = 1$ donne la normalisation. L'orthonormalité découle alors de l'unitarité de $\mathcal{V}$.

(ii) En utilisant $\mathbb{F}_\mu \circ w$, l'opérateur $H + \frac{1}{2}$ correspond à la multiplication par ix , il suffit donc de déterminer le coefficient de $x^{2n+2} e^{-\pi x^2}$ dans $(H + \frac{1}{2})h_{2n}$. Le terme de plus haut degré dans h_{2n} est

$$2^{2n+\frac{1}{4}} (2n)!^{-\frac{1}{2}} \pi^n x^{2n} e^{-\pi x^2}$$

L'application de l'opérateur $H = x\partial_x$ à $e^{-\pi x^2} x^k$ donne

$$H(e^{-\pi x^2} x^k) = e^{-\pi x^2} x^k (-2\pi x^2 + k)$$

Ainsi, le coefficient de $x^{2n+2} e^{-\pi x^2}$ dans $(H + \frac{1}{2})h_{2n}$ est $(-2\pi) 2^{2n+\frac{1}{4}} (2n)!^{-\frac{1}{2}} \pi^n$ tandis que dans h_{2n+2} , on a $2^{2n+2+\frac{1}{4}} (2n+2)!^{-\frac{1}{2}} \pi^{n+1}$. Ainsi, pour ce terme le plus élevé, on a $(H + \frac{1}{2})h_{2n} \sim c_n h_{2n+2}$ pour

$$c_n = (-2\pi) 2^{2n+\frac{1}{4}} (2n)!^{-\frac{1}{2}} \pi^n / \left(2^{2n+2+\frac{1}{4}} (2n+2)!^{-\frac{1}{2}} \pi^{n+1} \right) = -\frac{1}{2} \sqrt{(2n+1)(2n+2)}$$

3. La matrice d'éléments $\langle x\mathcal{P}_n, \mathcal{P}_m \rangle$ est la matrice transposée

ce qui donne, en utilisant la propriété d'orthonormalité de h_n , l'égalité

$$\left\langle \left(H + \frac{1}{2} \right) h_{2n}, h_{2n+2} \right\rangle = -\frac{1}{2} \sqrt{(2n+1)(2n+2)} \quad (25)$$

Pour vérifier les signes, prenons le cas le plus simple :

$$\left(\left(H + \frac{1}{2} \right) h_0 \right) (x) = (2^{\frac{1}{4}-1} - 2^{\frac{1}{4}+1} \pi x^2) e^{-\pi x^2}, \quad h_2(x) = \frac{4\pi x^2 - 1}{\sqrt[4]{2}}$$

de sorte que $(H + \frac{1}{2})h_0 = -\frac{1}{\sqrt{2}}h_2$. Pour $m = 1$, on a $\mathcal{P}_1(x) = i\sqrt{2}x$.

Ainsi, $x\mathcal{P}_0 = -\frac{i}{\sqrt{2}}\mathcal{P}_1$. De (25) on obtient ainsi que la matrice de la multiplication par x , agissant sur les vecteurs colonnes est de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{i}{\sqrt{2}} & 0 & i\sqrt{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i\sqrt{3} & 0 & i\sqrt{\frac{15}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i\sqrt{\frac{15}{2}} & 0 & i\sqrt{14} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i\sqrt{14} & 0 & 3i\sqrt{\frac{5}{2}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3i\sqrt{\frac{5}{2}} & 0 \end{pmatrix}$$

i.e. que pour tout n

$$x\mathcal{P}_n = \overline{\alpha_n} \mathcal{P}_{n+1} + \alpha_{n-1} \mathcal{P}_{n-1}, \quad \alpha_n = \frac{i}{2} \sqrt{(2n+1)(2n+2)} \quad (26)$$

de sorte que la composante de $x\mathcal{P}_n$ sur $\mathcal{P}_{n+1}$ soit $-\frac{i}{2} \sqrt{(2n+1)(2n+2)}$. $\square$

Nous montrons dans la proposition 2.6 ci-dessous que pour la paire cyclique correspondant à la place archimédienne, la distance spectrale est équivalente à la métrique induite sur $\mathbb{N}^* \subset \mathbb{R}_+^*$ par la métrique invariante du groupe de Lie $\mathbb{R}_+^*$.

Proposition 3.6 *La métrique spectrale de la paire cyclique $(\mathbb{S}, \xi_\infty)$ de la proposition 4.2 est équivalente à la métrique induite sur $\mathbb{N}^* \subset \mathbb{R}_+^*$ par la métrique invariante du groupe de Lie $\mathbb{R}_+^*$.*

Preuve : La suite (a_n) de (9), obtenue après un changement de phase dans la base orthonormée, est donnée par $a_n = \sqrt{(n + \frac{1}{2})(n+1)}$. Pour $n > 0$, on a

$$1 \leq a_n \log \left(1 + \frac{1}{n} \right) \leq \sqrt{3} \log 2$$

ce qui montre que la métrique induite sur $\mathbb{N}^* \subset \mathbb{R}_+^*$ par la métrique invariante du groupe de Lie $\mathbb{R}_+^*$ est équivalente à la métrique $d(n, m) := |\phi(n) - \phi(m)|$ de la proposition 2.6. Cette dernière métrique est à son tour équivalente à la métrique spectrale par la proposition 2.6. $\square$

3.5 Matrice de Jacobi de l'opérateur prolate

Déterminons maintenant les deux matrices de Jacobi données par les restrictions $\mathbf{W}_\lambda^\pm$ de l'opérateur prolate (2) aux sous-espaces pair et impair $\mathcal{H}^\pm$ comme dans la définition 2.2. En fait, on pourrait calculer directement ces matrices de Jacobi à partir des fonctions de Hermite et les comparer à la section 8 de [15] (formules basées sur les séries de Hermite).

La matrice de Jacobi $\mathbf{W}_\lambda^+$ est de la forme suivante

$$\begin{pmatrix} 2\pi\lambda^2 - \frac{3}{4} & \sqrt{\frac{3}{2}} & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{\frac{3}{2}} & 18\pi\lambda^2 - \frac{43}{4} & \sqrt{105} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{105} & 34\pi\lambda^2 - \frac{147}{4} & 3\sqrt{\frac{165}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 3\sqrt{\frac{165}{2}} & 50\pi\lambda^2 - \frac{315}{4} & \sqrt{2730} \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2730} & 66\pi\lambda^2 - \frac{547}{4} \end{pmatrix}$$

Pour une matrice de Jacobi J , on utilise la notation a_n , $n \geq 0$ pour les coefficients $J_{n,n+1} = \overline{J_{n+1,n}}$, et b_n , $n \geq 0$ pour la diagonale, c'est-à-dire $b_n = J_{n,n}$.

Proposition 3.7 *Les coefficients de la matrice de Jacobi de l'opérateur prolate $\mathbf{W}_\lambda^+$ sont donnés par*

$$a_n = \frac{1}{4} ((4n+1)(4n+2)(4n+3)(4n+4))^{1/2}, \quad b_n = -8n^2 - 2n - \frac{3}{4} + 2\pi\lambda^2(8n+1) \quad (27)$$

Dans le cas impair, c'est-à-dire pour $\mathbf{W}_\lambda^-$, ils sont des formes suivantes :

$$a_n = \frac{1}{4} ((4n+3)(4n+4)(4n+5)(4n+6))^{1/2}, \quad b_n = -8n^2 - 10n - \frac{15}{4} + 2\pi\lambda^2(8n+5) \quad (28)$$

Preuve : Ceci résulte de (22) combiné avec la définition 2.2 appliquée aux coefficients $\alpha_n = \frac{i}{2}\sqrt{(2n+1)(2n+2)}$ déterminés dans la proposition 3.6. $\square$

3.6 Lien avec l'application $\mathcal{E}$ et zeta

Dans [11], nous avons mis en évidence des valeurs propres minuscules de la forme quadratique associées aux formules explicites de Weil restreintes aux fonctions de test à support dans un intervalle compact fixe. Les fonctions propres correspondantes ont été construites à partir de l'image par l'application $\mathcal{E}$ du spectre positif de l'opérateur prolate $\mathbf{W}_\lambda$. Nous avons utilisé ces fonctions pour conditionner le triplet spectral canonique du cercle de telle sorte qu'il appartienne au noyau de l'opérateur de Dirac perturbé et avons obtenu les zéros les plus bas de la fonction zêta de Riemann. Pour $\lambda \rightarrow \infty$, les fonctions propres pour les valeurs propres positives de $\mathbf{W}_\lambda$ sont approximées par les fonctions propres de l'opérateur $\mathbf{H} = -\partial^2 + (2\pi q)^2$. Ces dernières fonctions propres sont les fonctions de Hermite $\{h_{2n}\}$.

Suivant [8], Proposition 2.24, nous expliquons maintenant dans quel sens le conditionnement de l'opérateur de mise à l'échelle par $\mathcal{E}(\{h_{2n}\})$, réalisé en prenant un quotient (au lieu d'un complément orthogonal comme ci-dessus), se rapporte aux zéros de zêta.

Soit $\mathcal{S}(\mathbb{R})_0^{\text{pair}}$ le sous-espace de la partie paire de l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ obtenu en imposant les deux conditions $f(0) = \widehat{f}(0) = 0$. Nous décrivons des combinaisons linéaires simples des fonctions h_{2m} appartenant à $\mathcal{S}(\mathbb{R})_0^{\text{pair}}$, puis nous calculons leur image par l'application $\mathbb{F}_\mu \circ \mathcal{E}$, où

$$\mathcal{E} := w_\infty \circ \Sigma, \quad \Sigma(f)(x) := \sum_{\mathbb{N}} f(nx).$$

La transformée de Fourier $\mathbb{F}_{e\mathbb{R}}(h_{2m})$ est $(-1)^m h_{2m}$ et donc les deux conditions $f(0) = \widehat{f}(0) = 0$ sont remplies par les deux familles de fonctions.

$$\psi_\ell^+ := h_{4\ell} - \frac{h_{4\ell}(0)}{h_0(0)} h_0, \quad \psi_\ell^- := -h_{4\ell+2} + \frac{h_{4\ell+2}(0)}{h_2(0)} h_2 \quad (29)$$

On a $h_{2n}(0) = (-1)^n \frac{2^{\frac{1}{4}-n} \sqrt{(2n)!}}{n!}$. Ainsi on obtient

$$\psi_\ell^+(x) = \sum_1^{2\ell} (-1)^k 2^{-2\ell+3k+\frac{1}{4}} \frac{((4\ell)!)^{\frac{1}{2}}}{(2\ell-k)!(2k)!} \pi^k x^{2k} e^{-\pi x^2} \quad (30)$$

Dans le cas étrange, on a $h_2(x)/h_2(0) = e^{-\pi x^2} (4\pi x^2 - 1)$. Le coefficient de $\pi x^2 e^{-\pi x^2} ((4\ell+2)!)^{\frac{1}{2}}$ dans $h_{4\ell+2} - \frac{h_{4\ell+2}(0)}{h_2(0)} h_2$ est

$$2^{3-2\ell-1+\frac{1}{4}} \frac{1}{(2\ell)!2!} - 4 \times 2^{-2\ell-1+\frac{1}{4}} \frac{1}{(2\ell+1)!} = 2^{-2\ell+\frac{1}{4}} \frac{4\ell}{(2\ell+1)!}$$

On a donc

$$\psi_\ell^-(x) = \left(-\frac{\ell 2^{-2\ell+\frac{9}{4}} ((4\ell+2)!)^{\frac{1}{2}}}{(2\ell+1)!} \pi^k x^{2k} \right) e^{-\pi x^2} \quad (31)$$

Nous relierons maintenant la transformée de Fourier $\mathbb{F}_\mu(w_\infty(\psi_\ell^\pm))$ aux polynômes (23).

Lemme 3.8 (i) *La transformée de Fourier $\mathbb{F}_\mu(w_\infty(\psi_\ell^\pm))$ est égale au produit du facteur local archimédien $\pi^{-\frac{z}{2}} \Gamma(\frac{z}{2})$ en $z = \frac{1}{2} - is$, par les polynômes suivants :*

$$P_\ell^+(s) := \sum_1^{2\ell} (-1)^k 2^{-2\ell+3k-\frac{3}{4}} \frac{((4\ell)!)^{\frac{1}{2}}}{(2\ell-k)!(2k)!} \prod_0^{k-1} \left(j - \frac{is}{2} + \frac{1}{4} \right) \quad (32)$$

qui sont pairs, divisibles par

$\frac{1}{4} + s^2$ *et à coefficients réels et*

$$P_\ell^-(s) := -\frac{\ell 2^{-2\ell+\frac{5}{4}} ((4\ell+2)!)^{\frac{1}{2}}}{(2\ell+1)!} \left(-\frac{is}{2} + \frac{1}{4} \right) + \sum_2^{2\ell+1} (-1)^k 2^{3k-2\ell-\frac{7}{4}} \frac{((4\ell+2)!)^{\frac{1}{2}}}{(2\ell+1-k)!(2k)!} \prod_0^{k-1} \left(j - \frac{is}{2} + \frac{1}{4} \right) \quad (33)$$

qui sont impairs, divisibles par $\frac{1}{4} + s^2$ et à coefficients purement imaginaires.

(ii) On a

$$P_\ell^+(s) = 2^{-\frac{3}{4}} \left(\mathcal{P}_{2\ell}(s) - \mathcal{P}_{2\ell}\left(\frac{i}{2}\right) \right), \quad P_\ell^-(s) = 2^{-\frac{3}{4}} \left(\mathcal{P}_{2\ell+1}(s) + 2i s \mathcal{P}_{2\ell+1}\left(\frac{i}{2}\right) \right) \quad (34)$$

Preuve : (i) Les formules (33) et (34) découlent directement de (30) et (31) et de l'équation définissant la fonction Γ . La divisibilité par $\frac{1}{4} + s^2$ découle de l'égalité

$$\mathbb{F}_\mu(w(\psi_\ell^\pm)) \left(\frac{i}{2} \right) = \int_0^\infty x \psi_\ell^\pm(x) d^*x = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty \psi_\ell^\pm(x) dx = 0$$

(ii) en découle puisque (3.6) spécifie de manière unique la correction requise pour les polynômes rééchelonnés $\mathcal{P}_m$ afin de les rendre divisible par $\frac{1}{4} + s^2$ sans altérer leur parité. $\square$

La fonction de Riemann-Landau Ξ

$$\Xi(s) = \frac{z(z-1)}{2} \Gamma(z/2) \pi^{-z/2} \zeta(z), \quad z = \frac{1}{2} + is \quad (35)$$

est entière, d'ordre de Hadamard un, paire et réelle pour s réel, et on a

$$\Xi(s) = \Xi(0) \prod \left(1 - \frac{s^2}{\alpha^2} \right), \quad \Xi(0) = -\frac{\zeta\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{8\sqrt[4]{\pi}} \sim 0,497121$$

où $\frac{1}{2} + i\alpha$ passe par les zéros de zêta de partie imaginaire positive.

Soit alors $P_\ell^\pm(s) = -\frac{1}{2}(\frac{1}{4} + s^2)R_\ell^\pm(s)$ définissant les polynômes $P_\ell^\pm(s)$. La proposition suivante montre que ces polynômes donnent la factorisation de $\mathbb{F}_\mu(\mathcal{E}(\psi_\ell^\pm))$ comme multiple de la fonction Ξ , et que tous les polynômes multiples de Ξ sont obtenus de cette manière. Soit $\mathcal{H}_{\leq 1}$ l'anneau topologique de Hadamard des fonctions entières d'ordre ≤ 1 .

Proposition 3.9 (i) On a l'égalité

$$\mathbb{F}_\mu(\mathcal{E}(\psi_\ell^\pm))(s) = R_\ell^\pm(s) \Xi(s)$$

(ii) Le spectre de l'opérateur de multiplication par s dans le quotient de $\mathcal{H}_{\leq 1}$ par la fermeture du sous-espace engendré par $\mathbb{F}_\mu(\mathcal{E}(\psi_\ell^\pm))$ est l'ensemble des $s \in \mathbb{C}$ tels que $\frac{1}{2} + is$ soit un zéro non trivial de zêta.

Preuve : Ceci découle du lemme 3.8, comme dans [8], proposition 2.24. $\square$

4 Cas semi-local

4.1 Notations

Soit S un ensemble fini de places, $\infty \in S$, et $\mathbb{A}_S$ l'anneau localement compact

$$\mathbb{A}_S = \prod_{v \in S} \mathbb{Q}_v. \quad (36)$$

Cet anneau contient $\mathbb{Q}$ comme sous-anneau en utilisant le plongement diagonal. Soit $\mathbb{Q}_S$ le sous-anneau de $\mathbb{Q}$ donné par les nombres rationnels dont le dénominateur ne comporte que des nombres premiers $p \in S$. Autrement dit,

$$\mathbb{Q}_S = \{q \in \mathbb{Q} \mid |q|_v \leq 1, \forall v \notin S\}. \quad (37)$$

Le groupe $\Gamma := \mathbb{Q}_S^*$ des éléments inversibles de l'anneau $\mathbb{Q}_S$ est de la forme

$$K\Gamma = \mathrm{GL}_1(\mathbb{Q}_S) = \{\pm p_1^{n_1} \cdots p_k^{n_k} : p_j \in S \setminus \{\infty\}, n_j \in \mathbb{Z}\}. \quad (38)$$

L'espace des classes d'adèles semi-local X_S est par définition le quotient

$$X_S := \mathbb{A}_S / \Gamma, \quad (39)$$

et soit $\pi_S : \mathbb{A}_S \rightarrow X_S$ la projection canonique.

Le module s'étend à une application multiplicative $|\bullet|_S$ de l'anneau $\mathbb{A}_S = \prod_{v \in S} \mathbb{Q}_v$ vers $\mathbb{R}_+$

$$|(u_v)_{v \in S}|_S = \prod |u|_v \in \mathbb{R}_+ \quad (40)$$

et, par construction, cette application passe au quotient $X_S = \mathbb{A}_S / \Gamma$.

Les groupes

$$\mathrm{GL}_1(\mathbb{A}_S) = \prod_{p \in S} \mathrm{GL}_1(\mathbb{Q}_p), \quad C_S = \mathrm{GL}_1(\mathbb{A}_S) / \Gamma \quad (41)$$

agissent naturellement par multiplication sur le quotient X_S et l'orbite de $1 \in \mathbb{A}_S$ donne un plongement $C_S \rightarrow X_S$.

Le complément de C_S dans X_S est de mesure nulle pour le produit des mesures de Haar des groupes additifs des champs locaux (préservé par l'action du groupe dénombrable Γ). En utilisant la dérivée de Radon-Nikodym des mesures de Haar des groupes multiplicatifs par rapport à la mesure de Haar des groupes additifs, on obtient une identification unitaire

$$w_S : L^2(X_S) \rightarrow L^2(C_S) \quad (42)$$

(voir [8] Proposition 2.30).

On rappelle également (voir [8] (2.223) et (2.239)) que C_S est un groupe localement compact de module

$$\mathrm{Mod}_S(\lambda) = |\lambda|_S := \prod_{p \in S} |\lambda_p|, \quad \forall \lambda = (\lambda_p) \in C_S \quad (43)$$

qui est (non canoniquement) isomorphe à $\mathbb{R}_+^* \times K_S$, où K_S est le noyau de Mod_S .

4.2 Transformée semi-locale de Hardy-Titchmarsh

Nous étendons les formules (18) et (19) au cas semi-local. Nous utilisons les notations de la section 4.1.

Soit S un ensemble fini de places, $\infty \in S$, soit R_S le sous-anneau compact maximal de $\prod_{p \neq \infty} \mathbb{Q}_p$. Pour $f \in L^2(\mathbb{R})^{pair}$, soit $\eta_S(f)$ la classe de la fonction $1_{R_S} \otimes f$ dans $L^2(X_S)$. Plus précisément, on a, en ignorant la sommation sur ± 1 puisque f est pair, et en posant $\Gamma_+ := \Gamma \cap \mathbb{Q}_+$,

$$\eta_S(f)(x) := \sum_{\Gamma_+} f(\gamma \tilde{x}) \tilde{x} \mid \pi_S(\tilde{x}) = x. \quad (44)$$

La restriction de $\eta_S(f)$ au domaine fondamental $F = R_S^* \times \mathbb{R}_+^*$ de l'action de Γ sur $\mathrm{GL}_1(\mathbb{A}_S) = \prod_{p \in S} \mathrm{GL}_1(\mathbb{Q}_p)$ est R_S^* -invariante et, puisque $1_{R_S} \otimes f$ s'annule sur $\gamma(1 \times u)$ sauf si $\gamma \in \mathbb{Z}$. On a

$$\eta_S(f)(1 \times u) = \sum_{\Gamma_+ \cap \mathbb{Z}} f(\gamma u).$$

Il en résulte que

$$w_S(\eta_S(f))(u) = \mathcal{E}_S(f)(u) \quad (45)$$

où

$$\mathcal{E}_S(f)(u) := u^{1/2} \sum_{\Gamma_+ \cap \mathbb{Z}} f(\gamma u) \quad (46)$$

Proposition 4.1 *Soit $f \in L^2(\mathbb{R})^{pair}$. Alors avec $L_p(z) = (1 - p^{-z})^{-1}$ pour $z \in \mathbb{C}$,*

(i) *On a*

$$\mathbb{F}_\mu(\mathcal{E}_S(f))(s) = \left(\prod_{p \in S \setminus \{\infty\}} L_p \left(\frac{1}{2} - is \right) \right) (\mathbb{F}_\mu w_\infty f)(s). \quad (47)$$

(ii) *Soit $\lambda > 0$. On a $\eta_S(P_\lambda) \subset P_\lambda^S$ où P_λ^S est le sous-espace de $L^2(X_S)^{K_S}$ des fonctions à support dans $\{x \mid |x| \leq \lambda\}$.*

(iii) *Soit la transformée de Fourier de $\mathbb{Q}_p$ normalisée de telle sorte que la fonction $1_{\mathbb{Z}_p}$ soit sa propre transformée de Fourier et soit $\mathbb{F}_S$, agissant dans $L^2(X_S)$, induit par le produit tensoriel des transformées de Fourier locales. On a*

$$\mathbb{F}_S \circ \eta_S = \eta_S \circ \mathbb{F}_{e_{\mathbb{R}}}.$$

(iv) *On a $\eta_S(\widehat{P}_\lambda) \subset \widehat{P}_\lambda^S$ où $\widehat{P}_\lambda$ et $\widehat{P}_\lambda^S$ sont les images de P_λ, P_λ^S par la transformée de Fourier.*

Preuve : (i) Pour simplifier, on considère le cas de $S = \{p, \infty\}$. Alors on a

$$\mathbb{F}_\mu \mathcal{E}_p(f)(s) = L_p \left(\frac{1}{2} - is \right) (\mathbb{F}_\mu w_\infty f)(s).$$

En effet, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{F}_\mu \mathcal{E}_p(f)(s) &= \int_0^\infty u^{1/2} \sum f(p^k u) u^{-is} d^* u = \sum_{k=0}^\infty \int_0^\infty f(p^k u) u^{\frac{1}{2}-is} d^* u = \sum_k \int_0^\infty f(v) p^{-\frac{k}{2}} p^{iks} v^{\frac{1}{2}-is} d^* v \\ &= \sum_k p^{-\frac{k}{2}} p^{iks} \int_0^\infty f(v) v^{\frac{1}{2}-is} d^* v = \int_0^\infty f(v) v^{\frac{1}{2}-is} d^* v (1 - p^{-\frac{1}{2}-is})^{-1} = L_p \left(\frac{1}{2} - is \right) (\mathbb{F}_\mu w_\infty f)(s). \end{aligned}$$

(ii) Le module $|x|$ est égal à 1 sur les idéles principales et par conséquent, sur les éléments $\gamma \in \Gamma = \{\pm \prod p_v^{n_v} \mid n_v \in \mathbb{Z}\}$. Ainsi $|x|$ a du sens sur $X_S = (\prod \mathbb{Q}_v)/\Gamma$ et il en est de même de P_λ^S . Soit $f \in P_\lambda$ et $\eta_S(f)$ la classe de la fonction $1_{R_S} \otimes f$ dans $L^2(X_S)$. Soit $x = (y, u) \in R_S \times \mathbb{R}$ avec $|x| > \lambda$. On a

$$\lambda < |x| = |y||u| \leq |u| \Rightarrow |u| > \lambda \Rightarrow f(u) = 0.$$

(iii) découle du fait que 1_{R_S} est sa propre transformée de Fourier.

(iv) découle de (ii) et (iii). $\square$

Soit $\mathcal{U}_S := \mathbb{F}_\mu \circ w_S$ et $\mathcal{M}_S : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R}, dm_S)$ l'unitaire donnée par

$$\mathcal{M}_S(f)(s) := \left(\prod_{v \in S} L_v \left(\frac{1}{2} - is \right) \right)^{-1} f(s), \quad dm_S(s) := \left| \prod_{v \in S} L_v \left(\frac{1}{2} - is \right) \right|^2 ds \quad (48)$$

Soit K_S le noyau du module $C_S \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ et notons $\mathbb{S}$ le générateur de l'action de mise à l'échelle de $\mathrm{GL}_1(\mathbb{R})_+ \subset \mathrm{GL}_1(\mathbb{A}_S) = \prod_{p \in S} \mathrm{GL}_1(\mathbb{Q}_p)$ sur $L^2(X_S)^{K_S}$.

Proposition 4.2 (i) La transformation unitaire $\mathcal{V}_S := \mathcal{M}_S \circ \mathcal{U}_S : L^2(X_S)^{K_S} \rightarrow L^2(\mathbb{R}, dm_S)$ donne la forme canonique de la paire cyclique (D, ξ) où $D := \mathbb{S}$ et $\xi = \xi_S := \eta_S(\xi_\infty)$.

(ii) La paire cyclique $(\mathbb{S}, \xi_S)$ est paire et la mise à l'échelle est donnée par la transformée de Fourier $\mathbb{F}_S$, qui devient la symétrie $s \mapsto -s$ par la transformation unitaire $\mathcal{V}_S$.

Preuve : (i) L'unitaire $\mathcal{U}_S : L^2(X_S)^{K_S} \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ est un isomorphisme et transforme l'opérateur $\mathbb{S}$ en la multiplication par la variable s comme dans la preuve précédente. En appliquant (47) à ξ_∞ , on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_S(\xi_S)(s) &= \mathcal{U}_S(\eta_S(\xi_\infty))(s) = \left(\prod_{p \in S \setminus \{\infty\}} L_p \left(\frac{1}{2} - is \right) \right) (\mathbb{F}_\mu w_\infty(\xi_\infty))(s) = \prod_{v \in S} L_v \left(\frac{1}{2} - is \right) \\ \mathcal{V}_S(\xi_S)(s) &= \mathcal{M}_S \circ \mathcal{U}_S(h_S)(s) = 1. \end{aligned}$$

Ainsi, $\mathcal{V}_S : L^2(X_S)^{K_S} \rightarrow L^2(\mathbb{R}, dm_S)$ est un isomorphisme qui transforme l'opérateur $\mathbb{S}$ en la multiplication par la variable s et le vecteur ξ_S en la fonction constante 1.

(ii) On vérifie directement que la transformée de Fourier $\mathbb{F}_S$ anticommute avec $\mathbb{S}$. Elle fixe le vecteur ξ par la proposition 4.1. L'unicité de la mise à l'échelle montre que la transformée de Fourier $\mathbb{F}_S$ devient la symétrie $s \mapsto -s$ sous la transformation unitaire $\mathcal{V}_S$. $\square$

Soit $\iota_S : L^2(\mathbb{R}, dm) \rightarrow L^2(\mathbb{R}, dm_S)$ l'application identité $\iota_S(f)(s) := f(s)$, $\forall s \in \mathbb{R}$.

Proposition 4.3 (i) L'application ι_S est bornée par son inverse borné.

(ii) On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} L^2(\mathbb{R})^{ev} & \xrightarrow{\theta_S} & L^2(X_S)^{K_S} \\ \downarrow v_\infty & & \downarrow v_S \\ L^2\left(\mathbb{R}, \frac{ds}{|E_\infty(s)|^2}\right) & \xrightarrow{\iota'_S} & L^2\left(\mathbb{R}, \frac{ds}{|E_S(s)|^2}\right) \end{array} \quad (49)$$

Preuve : (i) découle du fait que la fonction $\prod_{p \in S \setminus \{\infty\}} L_p(\frac{1}{2} - is)$ est bornée et à inverse bornée, de telle façon que les dérivées de Radon-Nikodym dm/dm_S et dm_S/dm sont toutes les deux bornées.

(ii) découle de (47). $\square$

4.3 Opérateur de Hermite semi-local

Soit S une collection finie de places (y compris la collection archimédienne) et $(\mathbb{S}, \xi_S)$ la paire cyclique de la proposition 4.2. Comme dans la section 2, l'opérateur de Hermite associé N_S est défini comme l'opérateur de mise à l'échelle associé à la filtration (E_n) de l'espace de Hilbert $L^2(X_S)^{K_S}$ par les sous-espaces engendrés par les itérations $\mathbb{S}^j \xi$, $0 \leq j \leq n$

- Théorème 4.4** 1. Pour $S = \{\infty\}$, l'opérateur de Hermite semi-local N_S est la restriction de l'oscillateur harmonique à $L^2(\mathbb{R})^{\text{pair}}$.
2. Les fonctions propres de l'opérateur de Hermite semi-local N_S sont des éléments de $L^2(X_S)^{K_S}$ de la forme $\eta_S(P_n^S(x)e^{-\pi x^2})$, où P_n^S sont des polynômes obtenus par orthonormalisation et récurrence.
3. La matrice de $\mathbb{S}$ dans la base orthonormée de $L^2(X_S)^{K_S}$ ci-dessus est une matrice hermitienne de Jacobi.

Preuve : 1. Voir la section 3.3.

2. On a $\xi_S = 2^{1/4} \eta_S(e^{-\pi x^2})$ et l'opérateur $\mathbb{S} = -i(H + \frac{1}{2})$ agit comme une mise à l'échelle sur la variable archimédienne. Les sous-espaces $E_n^S \subset L^2(X_S)^{K_S}$ s'obtiennent par itération de l'opérateur $\mathbb{S}$ appliqué à la fonction $\eta_S(e^{-\pi x^2})$ et l'opérateur de mise à l'échelle commute avec η_S . Par conséquent, E_n^S est l'image par η_S de l'espace des produits $P(x)e^{-\pi x^2}$ où P est un polynôme pair de degré $\leq 2n$. Puisque η_S n'est pas unitaire, le processus d'orthogonalisation fournit des polynômes P_n^S qui dépendent de S .

3. découle de (9), i.e. la théorie générale des polynômes orthogonaux. $\square$

Nous avons ainsi obtenu un candidat pour l'analogue de l'opérateur de Hermite dans le cas semi-local, ainsi que pour l'opérateur prolate, comme dans la définition 2.2 :

$$\mathbf{W}_{\lambda, S} = \left(H + \frac{1}{2}\right)^2 + \lambda^2 N_S.$$

Remarque 4.5 (i) En raison de la nature non unitaire de η_S , on a $N_S \circ \eta_S \neq \eta_S \circ N_\infty$ sauf si $S = \{\infty\}$ mais les filtrations associées aux sous-espaces $N \leq n$ se correspondent par l'application η_S comme le montre le théorème 4.4 (ii).

(ii) Soit $|\bullet|_S : X_S = \mathbb{A}_S/\Gamma \rightarrow \mathbb{R}_+$ le module comme dans (40). Une autre hypothèse concernant l'analogue semi-local de l'opérateur de Hermite est d'exprimer ce dernier lorsque $S = \{\infty\}$ comme la somme de la multiplication par $|x|_S^2$ et son conjugué par la transformée de Fourier.

(iii) Notez qu'à moins que $S = \{\infty\}$, on a

$$|\bullet|_S^2 \eta_S(f) \neq \eta_S(|\bullet|^2 f). \quad (50)$$

En effet, en supposant $S = \{p, \infty\}$ par souci de simplicité, on a pour f une fonction paire.

$$w_S \eta_S(f) = \mathcal{E}_p(f), \quad \mathcal{E}_p(f)(u) = u^{1/2} \sum_{\mathbb{N}} f(p^n u)$$

L'image du côté gauche de (50) par l'application w_S est la fonction $u^2 \mathcal{E}_p(f)(u)$, tandis que l'image du côté droit de (50) par l'application w_S est $\mathcal{E}_p(|\bullet|^2 f)$ qui, évaluée en u , donne l'expression différente

$$u^{1/2} \sum_{\mathbb{N}} u^2 p^{2n} f(p^n u).$$

4.4 La transformée duale de Hardy-Titchmarsh

Soit, comme ci-dessus, S un ensemble fini de places contenant ∞ , et $\mathcal{U}_S := \mathbb{F}_\mu \circ w_S$. Soit

$$E_S(s) := \prod_{p \in S} L_p \left(\frac{1}{2} + is \right) \quad (51)$$

et considérons l'espace de Hilbert $L^2 \left(\mathbb{R}, \frac{ds}{|E_S(s)|^2} \right)$. Soit $\beta_S : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2 \left(\mathbb{R}, \frac{ds}{|E_S(s)|^2} \right)$ l'espace unitaire donné par

$$\beta_S(f)(s) := \left(\prod_{v \in S} L_v \left(\frac{1}{2} + is \right) \right) f(s) \quad (52)$$

Définition 4.6 *La transformée de Hardy-Titchmarsh duale est l'unitaire*

$$v_S : L^2(X_S)^{K_S} \rightarrow L^2 \left(\mathbb{R}, \frac{ds}{|E_S(s)|^2} \right), \quad v_S = \beta_S \circ \mathcal{U}_S \quad (53)$$

Proposition 4.7 (i) *L'égalité suivante définit un appariement sesquilinéaire*

$$\langle L^2 \left(\mathbb{R}, \frac{ds}{|E_S(s)|^2} \right) | L^2(\mathbb{R}, dm_S) \rangle$$

$$\langle \xi | \eta \rangle_{\mathbb{R}} := \int \xi(x) \overline{\eta(x)} dx, \quad \forall \xi \in L^2 \left(\mathbb{R}, \frac{ds}{|E_S(s)|^2} \right), \quad \eta \in L^2(\mathbb{R}, dm_S) \quad (54)$$

(ii) *Pour tout $\xi, \eta \in L^2(X_S)^{K_S}$, on a $\langle v_S \xi | v_S \eta \rangle_{\mathbb{R}} = \langle \xi | \eta \rangle$.*

Preuve : La preuve de (i) et (ii) découle de l'égalité valide pour toute place v et $s \in \mathbb{R}$,

$$\overline{L_v \left(\frac{1}{2} + is \right)} = L_v \left(\frac{1}{2} - is \right).$$

et de la combinaison de (48) et de (52). □

4.5 L'espace de Sonin dans le cas local

La définition locale de l'espace de Sonin est

Définition 4.8 *Soit $\mathbb{K}$ un corps local et α un caractère additif de $\mathbb{K}$. Soit $\lambda > 0$. L'espace de Sonin $\mathbf{S}_\lambda(\mathbb{K}, \alpha)$ est le sous-espace du L^2 -espace des fonctions de carré intégrable sur $\mathbb{K}$ défini comme suit :*

$$\mathbf{S}_\lambda(\mathbb{K}, \alpha) := \{ f \in L^2(\mathbb{K}) \mid f(x) = 0 \text{ \& } \mathbb{F}_\alpha f(x) = 0 \quad \forall x, |x| < \lambda \}$$

où $\mathbb{F}_\alpha$ désigne la transformée de Fourier par rapport à α .

On utilise l'exponentielle imaginaire $e : \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \rightarrow \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$, $e(x) := \exp(2\pi i x)$.

On dote $\mathbb{Q}_p$ du caractère additif (obtenu par le plongement $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \subset \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$)

$$e_p : \mathbb{Q}_p \rightarrow \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \subset \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \xrightarrow{e} \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} \subset \mathbb{C} \quad (55)$$

qui est égal à 1 sur le sous-anneau compact maximal $\mathbb{Z}_p \subset \mathbb{Q}_p$.

Étant données une fonction $f \in L^2(\mathbb{K})$ et $a \in \mathbb{K}^*$, on note f_a la fonction $f_a(x) := f(ax)$. La transformée de Fourier vérifie l'égalité

$$\mathbb{F}(f_a) = \frac{1}{|a|} \mathbb{F}(f)_{a^{-1}}$$

Proposition 4.9 *Soit p un nombre premier fini et $\mathbb{K} = \mathbb{Q}_p$, $\alpha = e_p$. La partie $\mathbb{Z}_p^*$ -invariante de $\mathbf{S}_1(\mathbb{Q}_p, e_p)$ est unidimensionnelle, de générateur $\sigma_p := \epsilon_0 - \frac{1}{p}\epsilon_1$ où ϵ_n est la fonction caractéristique de $\{x \in \mathbb{Q}_p \mid |x| = p^n\}$. De plus, on a $\mathbb{F}_{e_p}\sigma_p = \sigma_p$.*

Preuve : La fonction ϵ_n est égale à $(1_{\mathbb{Z}_p})_{p^n} - (1_{\mathbb{Z}_p})_{p^{n-1}}$ car on a

$$\epsilon_n(x) = 1_{\mathbb{Z}_p}(p^n x) - 1_{\mathbb{Z}_p}(p^{n-1} x).$$

De plus, on a $1_{\mathbb{Z}_p} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \epsilon_{-\ell}$ et $(\epsilon_{\ell})_{p^k} = \epsilon_{\ell+k}$.

La transformée de Fourier de la fonction ϵ_n est alors donnée par

$$\mathbb{F}_{e_p}(\epsilon_n) = p^n (1_{\mathbb{Z}_p})_{p^{-n}} - p^{n-1} (1_{\mathbb{Z}_p})_{p^{-n+1}} = p^n \left(1 - \frac{1}{p}\right) \sum_0^{\infty} \epsilon_{-n-k} - p^n \frac{1}{p} \epsilon_{-n+1}. \quad (56)$$

Par (56) on a

$$\mathbb{F}_{e_p}\sigma_p = \mathbb{F}_{e_p}\epsilon_0 - \frac{1}{p}\mathbb{F}_{e_p}\epsilon_1 = \left(\left(1 - \frac{1}{p}\right) \sum_0^{\infty} \epsilon_{-k} - \frac{1}{p}\epsilon_1\right) - \left(\left(1 - \frac{1}{p}\right) \sum_0^{\infty} \epsilon_{-1-k} - \frac{1}{p}\epsilon_0\right) = \epsilon_0 - \frac{1}{p}\epsilon_1$$

donc $\mathbb{F}_{e_p}\sigma_p = \sigma_p$. Par construction, on a $\sigma_p(x) = 0 \forall x, |x| < 1$ donc $\sigma_p \in \mathbf{S}_1(\mathbb{Q}_p, e_p)$.

Montrons maintenant que tout $\psi \in \mathbf{S}_1(\mathbb{Q}_p, e_p)$ invariant par $\mathbb{Z}_p^*$ est proportionnel à σ_p . Puisque ψ est $\mathbb{Z}_p^*$ -invariant, il existe des coefficients $a_n \in \mathbb{C}$ tels que $\psi = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \epsilon_n$ et la condition L^2 signifie que $\sum p^n |a_n|^2 < \infty$. Puisque $\psi(x) = 0$ lorsque $|x| < 1$ tous les coefficients a_n pour $n < 0$ s'annulent et on a $\psi = \sum_{n \geq 0} a_n \epsilon_n$. Nous calculons maintenant la transformée de Fourier $\mathbb{F}_{e_p}\psi$, qui, par (56), est

$$\mathbb{F}_{e_p}\psi = \sum_{n \geq 0} a_n \left(p^n \left(1 - \frac{1}{p}\right) \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon_{-n-k} - p^n \frac{1}{p} \epsilon_{-n+1} \right).$$

La somme de droite ne concerne que ϵ_j pour $j < 0$, à l'exception des termes où $n = 0$ et $k = 0$ dans la somme $\sum_0^{\infty} \epsilon_{-n-k}$ et du terme avec $n = 0$ et $n = 1$ dans $-p^n \frac{1}{p} \epsilon_{-n+1}$. Ainsi, les termes ne faisant pas intervenir ϵ_j pour $j < 0$ sont donnés par l'expression $a_0 \left(1 - \frac{1}{p}\right) \epsilon_0 - a_1 \epsilon_0 - a_0 \frac{1}{p} \epsilon_1$. Puisque $\psi \in \mathbf{S}_1(\mathbb{Q}_p, e_p)$, la somme des termes faisant intervenir ϵ_j pour $j < 0$ est égale à 0, ce qui donne l'égalité.

$$\mathbb{F}_{e_p}\psi = a_0 \left(1 - \frac{1}{p}\right) \epsilon_0 - a_1 \epsilon_0 - a_0 \frac{1}{p} \epsilon_1 = \left(a_0 \left(1 - \frac{1}{p}\right) - a_1\right) \epsilon_0 - a_0 \frac{1}{p} \epsilon_1 = a \epsilon_0 + b \epsilon_1.$$

Enfin, pour que $\mathbb{F}_{e_p}(a \epsilon_0 + b \epsilon_1)$ s'annule pour $|x| < 1$, il faut qu'il s'annule pour $x = 0$, c'est-à-dire que $\int (a \epsilon_0(x) + b \epsilon_1(x)) dx = 0$, ce qui signifie que $a + pb = 0$. Cela donne $\left(a_0 \left(1 - \frac{1}{p}\right) - a_1\right) - a_0 = 0$, $a_0 = -pa_1$, de sorte que ψ est un multiple scalaire de σ_p . $\square$

4.6 L'espace de Sonin dans le cas semi-local

Soit S comme ci-dessus, et $|\bullet|_S : X_S = \mathbb{A}_S/\Gamma \rightarrow \mathbb{R}_+$ le module comme dans (40). Soit α le caractère du groupe additif $\mathbb{A}_S = \prod_S \mathbb{Q}_v$ obtenu comme produit de e_p (voir (55)) par $e_\infty(x) := \exp(2\pi i x)$. Soit $\sigma_S := \otimes_{S \setminus \{\infty\}} \sigma_p$.

Définition 4.10 Soit $\lambda > 0$. L'espace semi-local de Sonin $\mathbf{S}_\lambda(X_S, \alpha)$ est le sous-espace de l'espace de Hilbert $L^2(X_S)^{K_S}$ défini comme suit :

$$\mathbf{S}_\lambda(X_S, \alpha) := \{f \in L^2(X_S)^{K_S} \mid f(x) = 0 \text{ \& } \mathbb{F}_S f(x) = 0 \quad \forall x, |x| < \lambda\}$$

où $\mathbb{F}_S$ désigne la transformée de Fourier par rapport à α .

Proposition 4.11 (i) Soit $f \in \mathbf{S}_\lambda(\mathbb{R}, e_\infty)$, $\theta_S(f)$ la classe de la fonction $\sigma_S \otimes f$ dans $L^2(X_S)$. Alors $\theta_S(f)$ appartient à $\mathbf{S}_\lambda(X_S, \alpha)$.

(ii) On a

$$\mathbb{F}_\mu(w_S(\theta_S(f)))(s) = \mathbb{F}_\mu(w_\infty(f))(s) \times \prod_{S \setminus \{\infty\}} \left(1 - p^{-\frac{1}{2} - is}\right) \quad (57)$$

Preuve : (i) Soit $z = (x, y) \in R_S \times \mathbb{R} = \mathbb{A}_S$ tel que $|z| = |x|_{S \setminus \{\infty\}} |y|_\infty < \lambda$. Alors, soit $|x|_{S \setminus \{\infty\}} < 1$, soit $|y|_\infty < \lambda$. Dans les deux cas, on obtient $\sigma_S(x)f(y) = 0$ ainsi que $\widehat{\sigma_S}(x)\widehat{f}(y) = 0$. Il en va de même pour les éléments $\gamma z \in \mathbb{A}_S$, $\gamma \in \Gamma_+$ de sorte que la classe de $\sigma_S \otimes f$ dans $L^2(X_S)$ appartient à $\mathbf{S}_\lambda(X_S, \alpha)$.

(ii) Pour simplifier la notation, nous supposons $S = \{p, \infty\}$. On a, comme dans (44),

$$w_S(\sigma_S \otimes f)(1 \times \lambda) := \lambda^{1/2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} (\sigma_p \otimes f)(p^n, p^n \lambda) = \lambda^{1/2} \left(f(\lambda) - \frac{1}{p} f(\lambda/p) \right)$$

puisque $\sigma_p = \epsilon_0 - \frac{1}{p} \epsilon_1$.

Soit $g = w_\infty(f)$ alors on a

$$\lambda^{1/2} f(\lambda/p) = p^{1/2} (\lambda/p)^{1/2} f(\lambda/p) = p^{1/2} g(\lambda/p)$$

donc on obtient

$$w_S(\sigma_S \otimes f)(1 \times \lambda) = g(\lambda) - p^{-1/2} g(\lambda/p).$$

On a ensuite

$$\mathbb{F}_\mu(g)(s) = \int g(\lambda) \lambda^{-is} d^* \lambda$$

de sorte que, avec $g_1(\lambda) = g(\lambda/p)$, on obtient avec $\lambda = pu$,

$$\mathbb{F}_\mu(g_1)(s) = \int g_1(\lambda) \lambda^{-is} d^* \lambda = \int g(\lambda/p) \lambda^{-is} d^* \lambda = \int g(u) (pu)^{-is} d^* u = p^{-is} \mathbb{F}_\mu(g)(s)$$

ce qui donne l'égalité recherchée (57). □

4.7 La stabilité des espaces de Sonin

On conserve la notation précédente. Puisque $\left(1 - p^{-\frac{1}{2} - is}\right)^{-1} = L_p(\frac{1}{2} + is)$, on réécrit (57) comme

$$\mathbb{F}_\mu w_S(\theta_S(f))(s) = \left(\prod_{p \in S \setminus \{\infty\}} L_p\left(\frac{1}{2} + is\right) \right)^{-1} (\mathbb{F}_\mu w_\infty f)(s). \quad (58)$$

Proposition 4.12 *Soit $\lambda > 0$.*

- (i) *Soit $\mathbb{F}_S$ la transformée de Fourier de $L^2(X_S)$. On a $\mathbb{F}_S \circ \theta_S = \theta_S \circ \mathbb{F}_{e_\mathbb{R}}$.*
- (ii) *Soit ι'_S l'application $f \mapsto f$, $L^2\left(\mathbb{R}, \frac{ds}{|E_\infty(s)|^2}\right) \rightarrow L^2\left(\mathbb{R}, \frac{ds}{|E_S(s)|^2}\right)$. On a le diagramme commutatif*

$$\begin{array}{ccc} L^2(\mathbb{R})^{ev} & \xrightarrow{\theta_S} & L^2(X_S)^{K_S} \\ \downarrow v_\infty & & \downarrow v_S \\ L^2\left(\mathbb{R}, \frac{ds}{|E_\infty(s)|^2}\right) & \xrightarrow{\iota'_S} & L^2\left(\mathbb{R}, \frac{ds}{|E_S(s)|^2}\right) \end{array} \quad (59)$$

- (iii) *Soit $f, g \in L^2(\mathbb{R})^{pair}$. On a $\langle \theta_S(f) | \eta_S(g) \rangle = \langle f | g \rangle$.*

Preuve : Par la proposition 4.6, on a $\theta_S(\mathbf{S}_\lambda(\mathbb{R}, e_\infty)) \subset \mathbf{S}_\lambda(X_S, \alpha)$ où $\mathbf{S}_\lambda(X_S, \alpha)$ est l'espace semi-local de Sonin.

- (i) Ceci résulte de l'égalité $\mathbb{F}_{e_p} \sigma_p = \sigma_p$.
- (ii) Soit $f \in L^2(\mathbb{R})^{ev}$. On calcule $v_S \circ \theta_S(f)$. Par (53) on a $v_S = \beta_S \circ \mathcal{U}_S = \beta_S \circ \mathbb{F}_\mu w_S$. Par (58)

$$\begin{aligned} v_S \circ \theta_S(f)(s) &= (\beta_S \mathbb{F}_\mu w_S(\theta_S(f)))(s) = \left(\prod_{v \in S} L_v\left(\frac{1}{2} + is\right) \right) \left(\prod_{p \in S \setminus \{\infty\}} L_p\left(\frac{1}{2} + is\right) \right)^{-1} (\mathbb{F}_\mu w_\infty f)(s) = \\ &= L_\infty\left(\frac{1}{2} + is\right) (\mathbb{F}_\mu w_\infty f)(s) = v_\infty(f)(s). \end{aligned}$$

- (iii) L'application $\mathcal{U}_S = \mathbb{F}_\mu w_S : L^2(X_S)^{K_S} \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ est unitaire, de sorte que l'on a

$$\langle \theta_S(f) | \eta_S(g) \rangle = \langle U_S \theta_S(f) | \mathcal{U}_S \eta_S(g) \rangle$$

et en utilisant (58) pour le terme de gauche et (47) pour le terme de droite, on obtient

$$\langle \theta_S(f) | \eta_S(g) \rangle = \left\langle \left(\prod_{p \in S \setminus \{\infty\}} L_p\left(\frac{1}{2} + is\right) \right)^{-1} (\mathbb{F}_\mu w_\infty f) \middle| \left(\prod_{p \in S \setminus \{\infty\}} L_p\left(\frac{1}{2} - is\right) \right) (\mathbb{F}_\mu w_\infty g) \right\rangle = \langle f | g \rangle$$

ce qui donne l'égalité requise. $\square$

Nous sommes maintenant prêts à démontrer le fait suivant :

Théorème 4.13 *Soit $S \ni \infty$ un ensemble fini de places et $\lambda > 0$. Alors l'application θ_S est un isomorphisme hilbertien des espaces de Sonin $\theta_S : \mathbf{S}_\lambda(\mathbb{R}, e_\infty) \rightarrow \mathbf{S}_\lambda(X_S, \alpha)$ où α est le caractère normalisé.*

Preuve : On sait déjà que $\theta_S(\mathbf{S}_\lambda(\mathbb{R}, e_\infty)) \subset \mathbf{S}_\lambda(X_S, \alpha)$ par la proposition 4.6 (i). Pour démontrer l'égalité, soit $h \in \mathbf{S}_\lambda(X_S, \alpha)$. Le diagramme commutatif (59) montre que l'application $\theta_S : L^2(\mathbb{R})^{ev} \rightarrow L^2(X_S)^{K_S}$ est bornée par son inverse bornée ; il existe donc un unique $f \in L^2(\mathbb{R})^{ev}$ tel que $\theta_S(f) = h$. Pour montrer que $f \in \mathbf{S}_\lambda(\mathbb{R}, e_\infty)$, il suffit de montrer que f est orthogonal à tous les éléments de P_λ et $\widehat{P}_\lambda$. Par état fondamental (ii) et (iv), on a $\eta_S(P_\lambda) \subset P_\lambda^S$ et $\eta_S(\widehat{P}_\lambda) \subset \widehat{P}_\lambda^S$. On obtient ainsi, par groundstatedual (iii), que pour tout élément $g \in P_\lambda$, ou $g \in \widehat{P}_\lambda^S$, on a

$$\langle f|g \rangle = \langle \theta_S(f)|\eta_S(g) \rangle = 0$$

car, par construction, le sous-espace $\mathbf{S}_\lambda(X_S, \alpha)$ est orthogonal à P_λ^S et à $\widehat{P}_\lambda^S$. On conclut donc que $f \in \mathbf{S}_\lambda(\mathbb{R}, e_\infty)$. $\square$

4.8 Espaces hilbertiens de fonctions entières

La stabilité démontrée par le théorème 4.13 montre que la structure hilbertienne des espaces de Sonin $\mathbf{S}_\lambda(X_S, \alpha)$ est indépendante de S et que la théorie des espaces de Hilbert de fonctions entières [2] fournit en fait une réalisation canonique de ces espaces, que nous décrivons maintenant. Il est important de souligner que le choix de l'ensemble fini S joue un rôle clé dans la fixation du produit scalaire dans l'espace hilbertien.

4.8.1 Lien avec les espaces de Hilbert de fonctions entières

Le lien entre les espaces de Sonin (appelés “espaces de Sonin” dans [2]) et les espaces de Hilbert de fonctions entières, dû à de Branges [1,2], est que l'application (*cf.* aussi [3,5])

$$\mathbf{S}_\lambda(\mathbb{R}, e_\infty) \ni f \mapsto \widetilde{\mathcal{M}}(f)(z) := \pi^{-\frac{z}{2}} \Gamma\left(\frac{z}{2}\right) \int_{\mathbb{R}} f(t) t^{1-z} d^*t \quad (60)$$

envoie $\mathbf{S}_\lambda(\mathbb{R}, e_\infty)$ sur un espace de Hilbert de fonctions entières, noté ici $\mathcal{B}_\lambda$, qui appartient à la classe des espaces de de Branges.

4.8.2 Stabilité sous amplification semi-locale

La restriction de $\widetilde{\mathcal{M}}(f)(z)$ à la droite critique, c'est-à-dire $z = \frac{1}{2} + is$, coïncide avec la transformée de Hardy-Titchmarsh duale dans le cas $S = \{\infty\}$,

$$\widetilde{\mathcal{M}}(f)\left(\frac{1}{2} + is\right) = v_\infty(f)(s) \quad (61)$$

comme il ressort de la définition 4.6, (53), (54).

Proposition 4.14 *Soit $S \ni \infty$ un ensemble fini de places et $\lambda > 0$. L'application v_S est un isomorphisme d'espaces hilbertiens entre $\mathbf{S}_\lambda(X_S, \alpha)$ et $\mathcal{B}_\lambda$ et on a le diagramme commutatif*

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{S}_\lambda(\mathbb{R}, e_\infty) & \xrightarrow{\theta_S} & \mathbf{S}_\lambda(X_S, \alpha) \\ & \searrow v_\infty & \swarrow v_S \\ & \mathcal{B}_\lambda & \end{array} \quad (62)$$

Notons que $\mathcal{B}_\lambda$ hérite de produits scalaires différents de son plongement dans $L^2\left(\mathbb{R}, \frac{ds}{|E_S(s)|^2}\right)$.

4.8.3 L'espace de De Branges $\mathcal{B}_\lambda^S$

Soit $z^\#$ le symétrique de z par rapport à la droite critique $L = \frac{1}{2} + i\mathbb{R}$.

Un espace de de Branges est un espace de Hilbert $\mathcal{K}$ de fonctions entières vérifiant les axiomes suivants :

- (1) l'évaluation en tout $w \in \mathbb{C}$ est continue ;
- (2) l'application $F \mapsto F^\#$, $F^\#(w) = \overline{F(w^\#)}$ est une anti-isométrie unitaire de $\mathcal{K}$;
- (3) si $F(\gamma) = 0$ alors $G(w) = (w - \gamma^\#)/(w - \gamma)F(w)$ appartient à $\mathcal{K}$ et $\|G\| = \|F\|$.

Il résulte de ces axiomes que pour tout $S \ni \infty$ fini, l'espace $\mathcal{B}_\lambda^S$ obtenu en dotant l'espace $\mathcal{B}_\lambda$ de la norme induite par son plongement dans $L^2\left(\mathbb{R}, \frac{ds}{|E_S(s)|^2}\right)$ est un espace de De Branges.

Remarque : Fonctions de structure

Le fait pertinent suivant est que pour $S = \{\infty\}$, Burnol a calculé une *fonction de structure* $\mathcal{E}_\lambda$, telle que

$$|\mathcal{E}_\lambda(z^\#)| < |\mathcal{E}_\lambda(z)|, \quad \left| \mathcal{E}_\lambda\left(\frac{1}{2} + is\right) \right| = |E_\infty(s)|$$

où $z^\#$ désigne le symétrique de z par rapport à la droite L qui détermine $\mathcal{B}_\lambda$ comme un espace de de Branges dont le produit scalaire est hérité de son plongement dans $L^2\left(\mathbb{R}, \frac{ds}{|E_\infty(s)|^2}\right)$.

Par une définition équivalente des espaces de de Branges (cf. [2]), il résulte que

$$\mathcal{B}_\lambda = \left\{ F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}; \quad \frac{F}{\mathcal{E}_\lambda}, \frac{F^\#}{\mathcal{E}_\lambda} \in \mathbb{H}^2(L^+) \right\}. \quad (63)$$

Ici, L est la droite $\Re z = \frac{1}{2}$, L^+ le demi-plan $\Re z > \frac{1}{2}$, $\mathbb{H}^2(L^+)$ est l'espace de Hardy de L^+ , et $F^\#(z) := \overline{F(z^\#)}$ où $z^\#$ désigne le symétrique de z par rapport à la droite L .

Ainsi, en identifiant $\mathbf{S}_\lambda(\mathbb{R}, e_\infty)$ à son image dans $L^2\left(\mathbb{R}, \frac{ds}{|E_\infty(s)|^2}\right)$ obtenue en restreignant la formule (60) à la droite $\Re z = \frac{1}{2}$, on réalise $\mathbf{S}_\lambda(\mathbb{R}, e_\infty)$ comme l'espace des fonctions $F \in \ker \bar{\partial}$ telles que $F \mid L \in L^2\left(\mathbb{R}, \frac{ds}{|E_\infty(s)|^2}\right)$ et satisfait la condition d'espace de Hardy supplémentaire, c'est-à-dire comme une version L^2 de $H_{\bar{\partial}}^{0,0}(\mathbb{C})$. Notez que la norme L^2 de $F \mid L$ dans $L^2\left(\mathbb{R}, \frac{ds}{|E_\infty(s)|^2}\right)$ est la même que la norme L^2 de $F \in \mathcal{B}_\lambda$.

5 Représentation métaplectique dans le schéma de Jacobi

5.1 Représentation infinitésimale et opérateur prolate

Rappelons que la représentation métaplectique ϖ de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ sur $L^2(\mathbb{R})$ est réalisée au niveau infinitésimal en faisant agir la base standard $\{h, e_+, e_-\}$, avec $[h, e_+] = 2e_+$, $[h, e_-] = -2e_-$,

$[e_+, e_-] = h$, sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, via les opérateurs différentiels.

$$\varpi(h) := x\partial_x + \frac{1}{2}, \quad \varpi(e_+) := i\pi x^2, \quad \varpi(e_-) := \frac{i}{4\pi}\partial_x^2. \quad (64)$$

Ainsi, $\varpi(h)$ est à un facteur i près l'échelle $\mathbb{S}$ tandis que l'opérateur de Hermite s'obtient comme $\varpi(k)$ en utilisant le générateur $k = i(e_- - e_+)$ du sous-groupe compact maximal $K = \widetilde{SO}(2)$.

Avec ces notations, on a que

$$\varpi(k) = \pi x^2 - \frac{1}{4\pi}\partial_x^2 \quad (65)$$

est l'opérateur de Hermite de spectre $\{n + \frac{1}{2}; n \in \mathbb{Z}^+\}$ et les fonctions de Hermite

$$h_n = \left(2^{2n-\frac{1}{2}} n! \pi^n\right)^{-1/2} P_n(x) e^{-\pi x^2/2}, \quad \text{où les } P_n = (-1)^n e^{2\pi x^2} \partial_x^n \left(e^{-2\pi x^2}\right),$$

fournissent les fonctions propres associées formant une base orthonormée.

Ainsi, en passant à l'autre base $\mathbb{C}$ standard $\{k, n_+, n_-\}$, où $n_{\pm} = \frac{1}{2}(h \mp i(e_+ + e_-))$, la représentation ϖ est déterminée par (65) avec

$$\varpi(n_+) = \frac{\partial^2}{8\pi} + \frac{x\partial}{2} + \frac{1}{2}\pi x^2 + \frac{1}{4} = \left(\frac{\partial}{2\sqrt{2\pi}} + x\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)^2 = a^2 \quad (66)$$

$$\varpi(n_-) = -\frac{\partial^2}{8\pi} + \frac{x\partial}{2} - \frac{1}{2}\pi x^2 + \frac{1}{4} = -\left(-\frac{\partial}{2\sqrt{2\pi}} + x\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)^2 = -(a^*)^2 \quad (67)$$

où $a = \frac{\partial}{2\sqrt{2\pi}} + x\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ et $a^* = -\frac{\partial}{2\sqrt{2\pi}} + x\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ sont les opérateurs d'*annihilation* et de *création*, pour lesquels $\varpi(k) = aa^* + a^*a$. Ils fonctionnent comme des opérateurs d'*abaissement* et d'*élévation* par rapport à la base $\{h_n; n \in \mathbb{Z}^+\}$ puisque

$$a(h_0) = 0, \quad a(h_n) = \sqrt{\frac{n}{2}} h_{n-1}, \quad \text{et} \quad a^*(h_n) = \sqrt{\frac{n+1}{2}} h_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+. \quad (68)$$

L'opérateur de Casimir $C := h^2 + 2(e_+e_- + e_-e_+)$ vérifie $\varpi(C) = -\frac{3}{4}$. En particulier, cela montre que $L^2(\mathbb{R}) = L^2(\mathbb{R})^{pair} \oplus L^2(\mathbb{R})^{impair}$ représente la décomposition de ϖ en deux sous-représentations irréductibles de plus faible poids, respectivement $\frac{1}{2}$ et $\frac{3}{2}$.

Proposition 5.1 *Au niveau formel, l'opérateur $\mathbf{W}_\lambda$ est de la forme $\varpi(\mathcal{W}_\lambda)$ où $\mathcal{W}_\lambda$ est l'élément suivant de l'algèbre enveloppante $\mathcal{U}(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}))$*

$$\mathcal{W}_\lambda = h^2 + 4\pi\lambda^2 k - \frac{1}{4}.$$

Preuve : Cela découle de l'utilisation de (4), (63) et (64). □

5.2 Représentation métaplectique et polynômes orthogonaux

Nous allons maintenant présenter la représentation métaplectique comme un cas particulier d'une construction générale pour les polynômes orthogonaux. Comme dans la section 2.2, nous considérons d'abord le cadre général des polynômes orthogonaux par rapport à une mesure $d\mu$ sur $\mathbb{R}$ telle que $d\mu(-s) = d\mu(s)$. Modulo un changement de phase dans la base orthonormée, nous pouvons supposer que les coefficients a_n de la matrice de Jacobi A pour la multiplication par la variable $s \in \mathbb{R}$ sont positifs.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ a_0 & 0 & a_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & a_1 & 0 & a_2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & a_2 & 0 & a_3 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & a_3 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \quad (69)$$

Les coefficients a_n sont déterminés par les moments $c_n := \int t^n d\mu(t)$ par (voir [18] 2.2.7, 2.2.15)

$$a_n = \frac{k_n}{k_{n+1}}, \quad k_n = (D_{n-1}/D_n)^{1/2} \quad (70)$$

où les D_n sont les déterminants des matrices de Hankel de la forme, puisque les moments impairs s'annulent,

$$D_5 = \begin{pmatrix} c_0 & 0 & c_2 & 0 & c_4 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & c_4 & 0 & c_6 \\ c_2 & 0 & c_4 & 0 & c_6 & 0 \\ 0 & c_4 & 0 & c_6 & 0 & c_8 \\ c_4 & 0 & c_6 & 0 & c_8 & 0 \\ 0 & c_6 & 0 & c_8 & 0 & c_{10} \end{pmatrix}$$

Pour étudier l'algèbre de Lie engendrée par A et l'opérateur de mise à l'échelle N , $NP_n = nP_n$. Soit

$$F_+ := N + \frac{1}{2i}[A, N], \quad F_- := N - \frac{1}{2i}[A, N] \quad (71)$$

Lemme 5.2 (i) Le double commutateur $[[A, N], N] = A$.

(ii) Le commutateur $[F_+, F_-]$ est égal à $-iA$.

(iii) Le commutateur double $[A, [A, N]]$ est égal à $f(N)$ pour la fonction

$$f(n) = 2(a_{n-1}^2 - a_n^2) \quad (72)$$

(iv) On a $[A, F_+] = 2iF_+ + \Upsilon$ où la matrice diagonale Υ a pour éléments d_n avec

$$\frac{1}{i}d_n = -2n + a_n^2 - a_{n-1}^2 \quad (73)$$

(v) La matrice $F_+ - \frac{1}{2}iA$ est triangulaire supérieure et est la somme $N - i\mathcal{S}$ où $\mathcal{S}$ est le décalage pondéré

$$\mathcal{S} = \begin{pmatrix} 0 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Preuve : (i) Le commutateur $[A, N]$ est de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -a_0 & 0 & a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a_1 & 0 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a_2 & 0 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a_3 & 0 & a_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -a_4 & 0 \end{pmatrix} \quad (74)$$

et le double commutateur $[[A, N], N] = A$.

(ii) On a

$$[F_+, F_-] = [N + \frac{1}{2i}[A, N], N - \frac{1}{2i}[A, N]] = \frac{1}{i}[[A, N], N] = -iA.$$

(iii) Ce fait important provient du calcul de $[A, [A, N]]$ qui donne la matrice

$$\begin{pmatrix} -2a_0^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2a_0^2 - 2a_1^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2a_1^2 - 2a_2^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2a_2^2 - 2a_3^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2a_3^2 - 2a_4^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \end{pmatrix}$$

(iv) On a

$$[A, F_+] = [A, N] + \frac{1}{2i}[A, [A, N]] = 2iF_+ + \Upsilon, \quad d_n = -2in + \frac{1}{2i}f(n).$$

(v) Par (74), la matrice $F_+ - \frac{1}{2}iA$ est triangulaire supérieure. $\square$

On cherche une représentation σ de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ telle que, avec A comme dans (69) et $k = i(e_- - e_+)$,

$$\sigma(h) = -iA, \quad \sigma(k) = N + c \quad (75)$$

pour une constante c .

L'identité

$$[h, [h, k]] = -2i([h, e_+] + [h, e_-]) = -4i(e_+ - e_-) = 4k \quad (76)$$

se traduit par la relation

$$[A, [A, \sigma(k)]] = -4\sigma(k). \quad (77)$$

D'après le lemme 5.2 (iii), $[A, [A, N]]$ est la matrice diagonale à éléments diagonaux $2(a_{n-1}^2 - a_n^2)$.

L'identité (77) est donc équivalente à

$$2(a_{n-1}^2 - a_n^2) = -4(n + c), \quad \forall n \geq 0. \quad (78)$$

On a $[h, k] = -2i(e_+ + e_-)$, de telle façon que

$$e_+ = \frac{i}{2} \left(k + \frac{1}{2}[h, k] \right), \quad e_- = \frac{i}{2} \left(-k + \frac{1}{2}[h, k] \right) \quad (79)$$

Ainsi, avec la notation du lemme 5.2, on obtient, en utilisant (75)

$$\sigma(e_+) = \frac{i}{2}(F_+ + c), \quad \sigma(e_-) = \frac{i}{2}(-F_- - c)$$

Ainsi, par le lemme 5.2 (iv), on obtient

$$[\sigma(h), \sigma(e_+)] = \frac{1}{2}[A, F_+] = iF_+ + \frac{1}{2}\Upsilon.$$

L'égalité de l'algèbre de Lie $[h, e_+] = 2e_+$ ainsi que (73) et (78) déterminent alors de manière unique $c = \frac{1}{4}$. Cela détermine de manière unique que a_n , la représentation σ et $E_{\pm} := -i\sigma(e_{\pm})$ sont donnés par

$$E_+ = \frac{1}{2} \left(N + \frac{1}{4} \right) + \frac{1}{4}[A, N], \quad E_- = -\frac{1}{2} \left(N + \frac{1}{4} \right) + \frac{1}{4}[A, N], \quad (80)$$

Théorème 5.3 (i) Les coefficients positifs a_n sont spécifiés de manière unique afin que (75) définisse une représentation de l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$. On a

$$a_n = \frac{1}{2} \sqrt{(2n+1)(2n+2)}. \quad (81)$$

(ii) Le problème des moments de Hamburger pour les moments associés à la suite a_n par (70) est déterminé.

(iii) La mesure unique $d\mu$ du problème des moments de (ii) est la mesure de probabilité proportionnelle à $|\Gamma(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}is)|^2 ds$.

(iv) La représentation σ est la composante paire de la représentation métaplectique ϖ de $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$.

Preuve : (i) En utilisant (78) avec $c = \frac{1}{4}$, on obtient

$$2(a_{n-1}^2 - a_n^2) = -4n - 1$$

de sorte que l'on obtient (80).

(ii) D'après [17] Thm. 2, p. 86 le problème du moment de Hamburger correspondant est déterminé, comme il résulte de [16] Corollaire 6.19 puisque

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{a_n} \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{(2n+1)(2n+2)}} = \infty.$$

(iii) Les coefficients a_n concordent avec ceux donnés par la proposition 3.3, après remise à l'échelle par puissances de i .

(iv) Les valeurs propres de $\sigma(k)$, qui servent de pondérations à la représentation σ relative au sous-groupe de Cartan $\widetilde{S}0(2) \subset \widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$, reproduisent exactement le spectre de l'opérateur d'Hermite transporté depuis $L^2(\mathbb{R})^{ev}$. Ceci identifie la représentation irréductible σ comme étant la composante paire de la représentation métaplectique ϖ de $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$. $\square$

Nous déterminons maintenant explicitement les moments $c_n := \int t^n d\mu(t)$ où $d\mu$ est la mesure de probabilité proportionnelle à $|\Gamma(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}is)|^2$. Nous utilisons les égalités (70),

$$k_n = (D_{n-1}/D_n)^{1/2}, \quad a_n = \frac{k_n}{k_{n+1}}, \quad a_n^2 = \frac{1}{4}(2n+1)(2n+2),$$

ce qui implique

$$D_{n-1}/D_n = k_n^2, \quad k_n^2 = k_0^2 \prod_0^{n-1} a(j)^{-2} = \frac{4^n}{\Gamma(2n+1)}$$

Ceci détermine ensuite les moments et montre qu'ils sont des nombres rationnels. Les premiers sont :

$$c_0 = 1, \quad c_2 = \frac{1}{2}, \quad c_4 = \frac{7}{4}, \quad c_6 = \frac{139}{8}, \quad c_8 = \frac{5473}{16}, \quad c_{10} = \frac{357721}{32}$$

On constate généralement que les dénominateurs des moments sont de la forme 2^n pour c_{2n} , de sorte qu'ils sont déterminés par une suite d'entiers. Les premiers sont

$$1, 7, 139, 5473, 357721, 34988647, 4784061619, 871335013633, 203906055033841, \\ 59618325600871687, 21297483077038703899, 9127322584507530151393, \dots$$

Il s'agit d'une suite d'entiers classique, connue sous le nom de A126156 [14]. En fait, on a

Proposition 5.4 *Les moments normalisés c_n de la mesure $(2\pi)^{-3/2}|\Gamma(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}is)|^2 ds$ sont tels que $c_n = 0$ pour n impair et*

$$\sum c_n \frac{(ix)^n}{n!} = \sqrt{\frac{2}{e^x + e^{-x}}}. \quad (82)$$

Preuve : La normalisation signifie que $c_0 = 1$ et que la mesure $d\mu$ proportionnelle à $|\Gamma(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}is)|^2 ds$ est une mesure de probabilité. Le membre de gauche de (81) est alors égal à

$$\sum c_n \frac{(ix)^n}{n!} = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(isx) d\mu(s) = \langle \exp(ixh) \mathbb{F}_\mu(w(\xi)) | \mathbb{F}_\mu(w(\xi)) \rangle$$

où $\xi \in L^2(\mathbb{R})^{ev}$, $\xi(x) = e^{-\pi x^2}$ et h est l'opérateur auto-adjoint de la multiplication par s .

$$\mathbb{F}_\mu(w(\xi))(s) = \int_0^\infty x^{1/2-is} e^{-\pi x^2} d^*x = \frac{1}{2} \pi^{-\frac{1}{4}+i\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{1}{4} - i\frac{s}{2}\right)$$

On a $(\mathbb{F}_\mu f_\lambda)(s) = \lambda^{is} (\mathbb{F}_\mu f)(s)$ où $f_\lambda(u) := f(\lambda u)$, et en prenant $\lambda = e^x$ on obtient

$$\sum c_n \frac{(ix)^n}{n!} = \langle \lambda^{1/2} \xi_\lambda | \xi \rangle = \lambda^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi \lambda^2 t^2} e^{-\pi t^2} dt = \lambda^{1/2} (1 + \lambda^2)^{-1/2}$$

ce qui donne l'égalité requise. □

Références

- [1] L. de Branges, *Self-reciprocal functions*, J. Math. Anal. Appl. **9** (1964), 433–457.
- [2] L. de Branges, *Hilbert Spaces of Entire Functions*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, NJ, 1968.
- [3] J.-F. Burnol, *Sur certain espaces de Hilbert de fonctions entières, liés à la transformation de Fourier et aux fonctions L de Dirichlet et de Riemann*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I **333** (2001), 201–206.
- [4] J.-F. Burnol, *Sur les espaces de Sonine associés par de Branges à la transformation de Fourier*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I **335** (2002), 689–692.
- [5] J.-F. Burnol, *Two complete and minimal systems associated with the zeros of the Riemann zeta function*. J. Théor. Nombres Bordeaux 16 (2004), n° 1, 65–94.
- [6] A. Connes, *Trace formula in noncommutative geometry and the zeros of the Riemann zeta function*. Selecta Math. (N.S.) **5** (1999), n° 1, 29–106.
- [7] A. Connes, C. Consani, *The Scaling Hamiltonian*, J. Operator Theory **851** (2021), p. 257–276.
- [8] A. Connes, M. Marcolli, *Noncommutative Geometry, Quantum Fields, and Motives*, Colloquium Publications, Vol.55, American Mathematical Society, 2008.
- [9] A. Connes, C. Consani, *Weil positivity and trace formula, the archimedean place*. Selecta Math. (N.S.) **27** (2021), n° 4, 77, 70 p.
- [10] A. Connes, C. Consani, *Spectral triples and ζ -cycles*. Enseign. Math. **69** (2023), n° 1–2, 93–148.
- [11] A. Connes, H. Moscovici, *The UV prolate spectrum matches the zeros of zeta*. Proc. Natl. Acad. Sci. USA **119** (2022), n° 22.
- [12] A. Grünbaum, *A New Property of Reproducing Kernels for Classical Orthogonal Polynomials*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 95. 491–500 (1983).
- [13] G. H. Hardy and E. C. Titchmarsh, *Self-reciprocal functions*, Quart. J. Math. (Oxford), **1** (1930), 196–231.
- [14] *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences*, <https://oeis.org>.
- [15] Osipov, Andrei ; Rokhlin, Vladimir ; Xiao, Hong *Prolate spheroidal wave functions of order zero. Mathematical tools for bandlimited approximation*. Applied Mathematical Sciences, **187**. Springer, New York, 2013.
- [16] K. Schmüdgen, *The Moment problem*, Graduate Texts in Mathematics **277** Springer.
- [17] B. Simon, *The classical moment problem as a self-adjoint finite difference operator*, Adv. Math., **137** (1998), 82–203.
- [18] G. Szego, *Orthogonal polynomials*, American Math. Soc. 4th edition (1975).