

# VALEURS PROPRES DE L'OPÉRATEUR DE DIRAC

MICHAEL ATIYAH  
MATHEMATICAL INSTITUTE  
OXFORD OX1 3LB

## § 1. Le Théorème

Ces dernières années, les mathématiciens ont beaucoup appris des physiciens et en particulier du travail d'Edward Witten. Dans un article récent [3], Vafa et Witten ont prouvé quelques résultats frappants à propos des valeurs propres de l'opérateur de Dirac, et cet exposé présentera leurs résultats. Je me concentrerai sur les parties mathématiques de leur pré-publication, en laissant de côté l'interprétation physique qui est leur motivation principale.

Le contexte mathématique est le suivant. On fixe une variété riemannienne de spins  $M$  de dimension  $d$ , et on dénote par  $D$  l'opérateur de Dirac sur  $M$  agissant sur le fibré de spin  $S$ . De plus, si un fibré vectoriel  $V$  est donné avec une connexion  $A$ , nous pouvons définir l'opérateur de Dirac étendu :

$$D_A : S \otimes V \rightarrow S \otimes V.$$

En fonction d'une base orthonormée  $e_j$  de vecteurs tangents,  $D_A$  est donné localement par  $\sum_{j=1}^d e_j V_j$ , où  $V_j$  est la dérivée covariante dans la direction  $e_j$  et  $e_j$  agit sur les spineurs par la multiplication de Clifford. En particulier,  $D_A$  dépend de  $A$  seulement dans le terme d'ordre 0, i.e. si  $B$  est une seconde connexion sur  $V$ , alors  $D_A - D_B$  est un opérateur de multiplication ne faisant pas intervenir de dérivées.

L'opérateur  $D_A$  est auto-adjoint et a des valeurs propres discrètes  $\lambda_j$ , à la fois positives et négatives, que nous supposons indexées selon des valeurs absolues croissantes de telle façon que

$$|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \dots$$

Les questions auxquelles Vafa et Witten s'intéressent concernent la manière dont les  $\lambda_j$  dépendent de  $A$  (et  $V$ ) : la métrique sur  $M$  est supposée fixée tout au long de l'étude. Plus précisément, les auteurs sont intéressés par le fait d'obtenir des bornes supérieures uniformes. Leur résultat le plus simple et basique est

**THEOREME 1.** Il existe une constante  $C$  (dépendant de  $M$  mais non de  $V$  ou  $A$ ) telle que  $|\lambda_1| \leq C$ .

Plus généralement, on peut obtenir une estimation uniforme de la  $n$ -ième valeur propre :

**THEOREME 2.** Il existe une constante  $C'$  (dépendant de  $M$  mais non de  $V$ ,  $A$  ou  $n$ ) telle que  $|\lambda_n| \leq C'n^{1/d}$ .

Remarques. 1) La formule asymptotique  $\lambda_n \sim n^{1/d}$  est un résultat très général pour les valeurs propres des opérateurs elliptiques, mais le théorème 2 est beaucoup plus précis.

2) Le Théorème 1 n'est pas vérifié par l'opérateur de Laplace  $\Delta_A$  de  $V$ . Pour voir cela, il suffit de considérer  $d = 2$  et  $V$  un fibré en droites de courbure constante  $F$  : alors  $\lambda_1 = |F| \rightarrow \infty$  avec la classe de Chern de  $V$ . Cela souligne encore que l'uniformité dans les théorèmes 1 et 2 est en lien avec le paramètre continu  $A$  et aussi avec les paramètres discrets décrivant le type topologique de  $V$ .

3) Les inégalités dans les théorèmes 1 et 2 sont dans le sens opposé par rapport aux inégalités de Kato entre les valeurs propres des opérateurs de type Laplace. Cela avait, en principe, été conjecturé par les physiciens sur la base de la dualité Boson-Fermion.

Pour les variétés de dimension impaire, il y a même des résultats encore plus forts, notamment les :

THEOREME 1\*. Si  $d$  est impair, il existe une constante  $C_*$  telle que tout intervalle de longueur  $C_*$  contient une valeur propre de  $D_A$ .

THEOREME 2\*. Si  $d$  est impair, il existe une constante  $C'_*$  telle que tout intervalle de longueur  $C'_* n^{1/d}$  contient  $n$  valeurs propres.

Notons que les théorèmes 1\* et 2\* sont définitivement faux en dimensions paires. Pour voir cela, rappelons que, quand  $d$  est pair,  $S$  se décompose en  $S^+ \oplus S^-$  et  $D_A$  est de la forme

$$(1.1) \quad D_A = \begin{pmatrix} 0 & D_A^- \\ D_A^+ & 0 \end{pmatrix}$$

de telle façon que  $D_A^2 = D_A^- D_A^+ \oplus D_A^+ D_A^-$ , et les valeurs propres non nulles des deux facteurs  $D_A^- D_A^+$  et  $D_A^+ D_A^-$  coïncident. Si  $V$  a une grande courbure positive alors typiquement,  $D_A^- D_A^+$  aura une valeur propre nulle de grande multiplicité alors que  $D_A^+ D_A^-$  aura un "grand" opérateur positif. Par conséquent,  $D_A^2$  aura un grand écart entre sa valeur propre nulle et sa première valeur propre non nulle. De plus, cet écart tend vers l'infini selon la taille de la courbure de  $V$ . Quand  $d = 2$  et  $V$  est un fibré en droites de courbure constante, c'est juste la première classe de Chern de  $V$  qui détermine la taille du premier écart.

## §2. La preuve paire

Bien que les théorèmes que nous venions d'énoncer semblent être des résultats purement analytiques, impliquant des limites supérieures de valeurs propres, il est remarquable que dans le travail de Vafa et Witten, les démonstrations soient essentiellement topologiques. Pour comprendre ce qu'il en est, je considérerai le cas où la dimension  $d$  est paire. Alors, comme observé à la fin du §1, les spineurs se décomposent et  $D_A$  prend la forme donnée en (1.1). En particulier, une valeur propre nulle de  $D_A$  advient à chaque fois soit que  $D_A^+$  soit que  $D_A^-$  a un espace nul non trivial  $N_A^+$  ou  $N_A^-$  respectivement. Maintenant rappelons que l'indice de  $D_A^+$  est défini par

$$\text{indice } D_A^+ = \dim N_A^+ - \dim N_A^-$$

de telle façon qu'une valeur non nulle pour l'indice  $D_A^+$  force  $D_A$  à avoir une valeur propre nulle. D'un autre côté, l'indice  $D_A^+$  est un invariant purement topologique, donné par une formule explicite [1] impliquant les classes de caractéristiques cohomologiques de  $V$  et  $M$ . Par conséquent, à chaque fois que l'indice, calculé topologiquement, est non-nul, on a une valeur propre nulle pour  $D_A$  (pour toutes les connexions  $A$  sur le fibré donné  $V$ ) et par conséquent le théorème 1 est vérifié de façon triviale.

Pour  $d$  pair, le Théorème 1 a donc un contenu qui fait sens seulement pour les fibrés  $V$  pour lesquels la formule de l'indice donne 0. Pour les traiter, l'idée-clef est maintenant la suivante. Supposons que nous puissions trouver une relation  $A_0$  sur  $V$  telle que

(i)  $D_{A_0}$  a une valeur propre nulle,

(ii)  $\|D_A - D_{A_0}\| \leq C$ ,

alors cela aura pour conséquence que la plus petite valeur propre de  $D_A$  n'excède pas  $C$ . Maintenant, nous ne pouvons pas vraiment trouver une telle connexion sur  $V$  elle-même, mais nous pouvons en trouver une sur l'un des multiples  $NV = V \otimes C^N$  de  $V$ , et cela reviendra au même puisque le seul effet de prendre des copies multiples de  $D_A$  est d'augmenter la multiplicité de chaque valeur propre.

Nous procédons maintenant comme suit. D'abord, choisissons un fibré  $W'$  tel que l'indice de  $D^+$  sur  $S^+ \otimes V \otimes W'$  soit non nul. De la formule de l'indice (et de la supposition que l'indice de  $D^+$  sur  $S \otimes V$  est nul), il suffit de prendre  $W'$  comme étant le pull-back vers  $M$  d'un fibré engendrant sur  $S^{2d}$  (i.e. avec  $c_{2d} = (d-1)!$ ) par une fonction  $M \rightarrow S^{2d}$  de degré 1 : cela rend l'indice égal à  $\dim V$ . Ainsi, pour toute connexion  $B'$  sur  $W'$  (qui se combine avec  $A$  pour donner une connexion, disons  $A'$  sur  $V \otimes W'$ ), l'opérateur  $D_{A'}^+$  a un indice non nul. Par conséquent,  $D_{A'}$  a une valeur propre nulle.

Maintenant choisissons un complément orthogonal  $W''$  à  $W'$ , i.e. un fibré tel que

$$(2.1) \quad W' \oplus W'' \cong M \times C^N$$

et fixons une connexion  $B''$  sur  $W''$  (définissant, avec  $A$ , une connexion  $A''$  sur  $V \otimes W''$ ). L'opérateur

$$D_{A' \oplus A''} = D_{A'} \oplus D_{A''}$$

a encore bien sûr une valeur propre nulle (puisque  $D_{A'}$  en a une). D'un autre côté,  $A_0 = A' \oplus A''$  est une connexion sur

$$V \otimes (W' \oplus W'') \cong V \otimes C^N = NV$$

et peut alors être comparée à la connexion  $NA$  (une fois que nous avons fixé l'isomorphisme (2.1)). En comparant les opérateurs de Dirac correspondant, on trouve

$$(2.2) \quad D_{A_0} - D_{NA} = B$$

où  $B$  est la matrice de forme 1-valuée qui décrit la connexion  $B' \oplus B''$  dans la trivialisatation donnée par (2.1). Puisque  $B$  est presque indépendante de  $V$  et  $A$ , nous obtenons une constante uniforme  $C = \|B\|$  et cela complète la preuve du théorème 1 dans le cas pair.

Notons que la formule simple (2.2), qui est essentielle pour la preuve, dépend du fait que la partie d'ordre le plus élevé de  $D_A$  est indépendante de  $A$ .

Pour prouver le théorème 2 (pour  $d$  pair), nous procédons de manière similaire mais cette fois, nous faisons un pull-back du fibré  $W'$  (et de son complément  $W''$ ) à partir de  $S^d$  en utilisant des applications de degré  $n$ . La formule de l'indice montre alors que  $D_A^+$  a pour indice  $n \dim V$ . Le Théorème 2 en découle alors facilement si l'on montre que les constantes  $C = \|B\|$  croissent comme  $n^{1/d}$ . Quand  $M$  est un tore  $T$  et  $n = r^d$  (avec  $r$  un entier), cela peut être déduit en utilisant la fonction de recouvrement  $T^d \rightarrow T^d$  donnée par  $x \rightarrow rx$  : puisque  $B$  est une 1-forme (avec valeurs matricielles), cela fournit un facteur  $r$ . Pour les matrices générales  $M$ , on applique cette construction à une petite boîte dans  $M$  et le cas de  $n$  général en découle par interpolation.

### §3. La preuve impaire

Si l'on remplace  $M$  par  $M \times S^1$ , où  $S^1$  est le cercle, les valeurs propres  $\lambda_j$  de  $D_A$  sont remplacées par  $\pm\sqrt{\lambda_j^2 + m^2}$  où  $m$  parcourt les entiers. Les plus petites valeurs propres sont alors les mêmes sur  $M$  et sur  $M \times S^1$ . Cela signifie que le théorème 1 pour  $d$  pair, appliqué à  $M \times S^1$  entraîne immédiatement le théorème 1 pour  $d$  impair. Un comptage similaire mais plus attentif des valeurs propres montre que le théorème 2 pour  $d$  pair entraîne aussi le théorème 2 pour  $d$  impair.

Notons qu'inversement, si nous établissons les théorèmes 1 et 2 pour  $d$  impair, alors les théorèmes pour  $d$  pair en découlent. En fait, pour  $d$  impair, on veut établir directement les résultats les plus forts obtenus par les théorèmes 1\* et 2\*. La raison pour laquelle le cas impair entraîne des résultats plus forts est grossièrement la suivante. Dans le §2, pour  $d$  est pair, on utilise le théorème de l'indice, conjointement avec un argument de déformation reliant une connexion  $A$  à une autre connexion  $A_0$ . Dans le cas impair, l'analogie du théorème de l'indice est lui-même concerné par les familles à un paramètre, comme nous allons le rappeler maintenant.

Supposons que  $D_t$  est une famille périodique à un paramètre d'opérateurs elliptiques auto-adjoints, avec le paramètre  $t \in S^1$ . Les valeurs propres  $\lambda_j$  sont maintenant des fonctions de  $t$  et quand  $t$  tourne une fois autour du cercle, les  $\lambda_j$  doivent, comme un ensemble, revenir à leur position initiale. Pourtant,  $\lambda_j$  ne doit pas nécessairement revenir à  $\lambda_j$  : on peut avoir un décalage, e.g.  $\lambda_j$  peut revenir à  $\lambda_{j+n}$  pour un certain entier  $n$ . Cet entier  $n$  est appelé le flot spectral de la famille et c'est un invariant topologique de la famille. Il représente le nombre de valeurs propres négatives qui sont devenues positives (moins le nombre de valeurs positives qui sont devenues négatives).

Le flot spectral, comme l'indice, est donné par une formule topologique explicite [2]. De plus, pour les opérateurs différentiels du premier ordre (e.g. les opérateurs de Dirac), cette formule est vraiment reliée à la formule de l'indice comme suit : si  $D_t$  est la famille, définie sur une variété  $M$ , considérons l'opérateur unique

$$\mathcal{D} = \frac{\partial}{\partial t} + D_t$$

défini sur  $M \times S^1$ . Notons que

$$\mathcal{D}^* = -\frac{\partial}{\partial t} + D_t$$

de telle façon que  $\mathcal{D}$  n'est pas auto-adjoint. Alors on a [2]

$$(2.1) \quad \text{flot spectral de } \{D_t\} = \text{indice de } \mathcal{D}.$$

Comme exemple illustratif, considérons le cas où  $M$  est aussi un cercle avec variable angulaire  $x$  et prenons

$$D_t = -i\frac{\partial}{\partial x} + t.$$

Les valeurs propres sont  $n + t$  avec  $n$  entier, et donc, puisque  $t$  croît de 0 à 1, nous obtenons un flot spectral précisément de 1. La périodicité de  $D_t$  est exprimée par la propriété de conjugaison :

$$D_{t+1} = e^{-ix} D_t e^{ix}.$$

L'opérateur  $\mathcal{D}$  agit naturellement sur les fonctions  $f(x, t)$  de telle façon que

$$(3.2) \quad \begin{aligned} f(x+1, t) &= f(x, t) \\ f(x, t+1) &= e^{-ix} f(x, t). \end{aligned}$$

En fait, ces équations décrivent les sections d'un certain fibré en droites sur le tore  $S^1 \times S^1$ .

Les fonctions satisfaisant (3.2) ont une expansion en série de Fourier

$$(3.3) \quad f(x, t) = \sum f_n(t) e^{inx}$$

où  $f_n(t+1) = f_{n+1}(t)$ .

Résoudre l'équation  $\mathcal{D}_f = 0$  amène aux relations

$$f'_n(t) + (n+t)f_n(t) = 0$$

et ainsi

$$f_n(t) = C_n \exp \left\{ -\frac{(n+t)^2}{2} \right\}.$$

En voyant les conditions (3.3),  $C_n$  est indépendant de  $n$ . Ainsi  $\mathcal{D}$  a un espace nul à une dimension couvert par la fonction theta

$$f(x, t) = \exp \left( \frac{-t^2}{2} \right) \sum_n \exp(inz - n^2/2)$$

où  $z = x - it$ . Un calcul similaire montre que  $\mathcal{D}^* f = 0$  n'a pas de  $L^2$ -solution, de telle façon que l'indice  $\mathcal{D} = 1$  est vérifié pour le flot spectral.

Après cette digression à propos du flot spectral, revenons à l'étude des opérateurs de Dirac  $D_A$  sur une variété  $M$  de dimension impaire  $d$ . Appelons  $S^d \rightarrow U(N)$  un générateur de  $\pi_d(U(N))$ , où l'on prend  $N$  dans le domaine stable, i.e,  $N \geq \frac{d+1}{2}$ , et composons maintenant avec une application  $M \rightarrow S^d$  de degré un pour obtenir une application  $F : M \rightarrow U(N)$ . Considérons  $F$  comme un opérateur multiplicatif sur le fibré  $S \otimes NV = S \otimes V \otimes C^N$ , sur lequel l'opérateur de Dirac  $D_{NA}$  est défini. Puisque les parties matricielles de  $F$  et  $D_{NA}$  agissent sur les différents facteurs dans le produit tensoriel, elles commutent, et alors

$$[D_{NA}, F] = X$$

est indépendant de  $A$ . L'opérateur multiplicatif  $X$  agit essentiellement sur  $S \otimes C^N$  (étendu trivialement à  $S \otimes V \otimes C^N$ ), et est donné localement par

$$X = \sum e_i F^{-1} \partial_i F.$$

En particulier,  $\|X\| = C$  est une constante uniforme indépendante de  $V$  et  $A$ .

Considérons maintenant la famille linéaire de connexions

$$A_t = (1-t)A + tF(A)$$

joignant  $A$  à sa transformation de jauge  $F(A)$ . La famille correspondante des opérateurs de Dirac est

$$(3.4) \quad D_t = D_A + tX.$$

Par construction,  $D_0 = D_A$  et  $D_1 = F^{-1} D_A F$  est équivalent à  $D_0$  de façon unitaire. Par conséquent, nous avons une famille périodique d'opérateurs auto-adjoints avec un flot spectral. De plus,

la formule générale pour le flot spectral (e.g. via la formule de l'indice sur  $M \times S^1$ ) montre que dans notre cas, à cause de la construction de  $F$ , nous avons un flot spectral égal à 1. Il en découle que, pour une certaine valeur de  $t$ , l'opérateur  $D_t$  a une valeur propre nulle. Par conséquent, comme précédemment, (3.4) montre que la plus petite valeur propre de  $D_A$  n'excède pas  $C$ .

L'utilisation du flot spectral pour prouver le théorème 1 pour  $d$  impair est assez similaire à l'utilisation de l'index pour prouver le théorème 1 pour  $d$  pair. Pourtant, le flot spectral présente l'avantage que 0 n'est pas un point distingué du spectre, i.e. le flot spectral de la famille est inchangé en ajoutant une constante. Remplacer 0 par une autre valeur  $\mu$  et répéter notre argument montre qu'il y a une valeur propre de  $D_A$  à l'intérieur  $C$  de  $\mu$ , et c'est le contenu du théorème 1\*.

Le théorème 2\* découle de l'extension de l'argument en utilisant des applications  $F : M \rightarrow U(N)$  de degrés plus élevés, d'une manière similaire à celle utilisée pour démontrer le théorème 2 dans le cas pair.

Enfin, il importe de souligner que les limites supérieures des valeurs propres des opérateurs de Dirac obtenues par ces méthodes sont assez précises. En fait, Vafa et Witten ont effectivement déterminé la meilleure borne quand  $M$  est un tore plat. Pour cela, ils ont utilisé le théorème de l'indice pour des familles multi-paramètres d'opérateurs elliptiques - pas seulement le flot spectral d'une famille à un paramètre.

## Références

1. M.F. Atiyah, I.M. Singer, The index of elliptic operators III, Ann. of Math. 87 (1968), 546-604.
2. M.F. Atiyah, V.K. Patodi, I.M. Singer, Spectral asymmetry and Riemannian geometry III, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 79 (1976), 71-99.
3. C. Vafa, E. Witten, Eigenvalue inequalities for fermions in gauge theories. Princeton University preprint, April 1984. (Commun. in Math. Physics, 95, No.3 (1984), p. 257-276).