Sur les zéros d'une fonction entière représentée par une intégrale de Fourier

G. Pólya.

Nous ne disposons pas d'une méthode générale pour discuter du caractère réel des zéros d'une fonction entière représentée par une intégrale de Fourier (une telle méthode devrait exister pour la fonction ξ de Riemann). Je présente ici un cas particulier où la discussion n'est pas évidente, mais où elle peut être menée à l'aide de résultats connus.

Considérons la fonction

(1) $$F_\alpha(z) = \int_0^\infty e^{-t^\alpha} \cos zt \, dt$$

Si $0 < \alpha < 1$, alors $F_\alpha(z)$ est définie par cette formule seulement pour les valeurs réelles de z. On a

$$F_1(z) = \frac{1}{1+z^2}$$

Pour $\alpha > 1$, on obtient

(2) $$F_\alpha(z) = \frac{1}{\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\Gamma\left(\dfrac{2n+1}{\alpha}\right)}{\Gamma(2n+1)} z^{2n}.$$

Ce développement montre que $F_\alpha(z)$ est une fonction entière d'ordre $\dfrac{\alpha}{\alpha-1}$. En particulier,

(3) $$F_2(z) = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi} e^{-\frac{1}{4}z^2}.$$

En suivant la méthode employée par G. H. Hardy[1] pour prouver que la fonction $\xi(t)$ de Riemann a un nombre infini de zéros réels, F. Bernstein[2] a prouvé la même chose pour $F_4(z), F_6(z), F_8(z), \ldots$. Maintenant, il est facile d'aller plus avant dans le cas de $F_\alpha(z)$ [bien que ça ne soit naturellement pas possible dans le cas de $\xi(t)$], et de prouver les résultats suivants :

(I) *Si $\alpha = 2$, alors il n'y a pas de zéro du tout.*

(II) *Si $\alpha = 4, 6, 8, \ldots$, alors il y a un nombre infini de zéros réels mais pas de zéros complexes.*

(III) *Si $\alpha > 1$, et n'est pas un entier pair, alors il y a un nombre infini de zéros complexes et un nombre fini, non inférieur à $2\left[\frac{1}{2}\alpha\right]$, de zéros réels.*

L'assertion (I) n'a pas besoin de démonstration : la comparer à (3). La preuve de (II) est basée sur le cas particulier suivant d'un théorème de Laguerre[3] :

Si $\Phi(z)$ est une fonction entière d'ordre inférieur à 2, ce qui suppose des valeurs réelles le long de l'axe réel, et si elle ne possède que des zéros réels négatifs, alors les zéros de la fonction entière

$$\Phi(0) + \frac{\Phi(1)}{1!} z + \frac{\Phi(2)}{2!} z^2 + + \frac{\Phi(n)}{n!} z^n + \ldots$$

sont aussi tous réels et négatifs.

1. *Comptes-Rendus*, 6 avril 1914.
2. *Mathematische Annalen*, vol. lxxix. (1919), pp. 265-268.
3. *Œuvres*, vol. i. (Paris, 1898), p. 200-203.

Posons

$$(4) \qquad \Phi(z) = \frac{\Gamma\left(\dfrac{2z+1}{2k}\right)\Gamma(z+1)}{\Gamma(2z+1)},$$

où k est un entier positif. Les pôles du numérateur

$$z = -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}(2k+1), -\frac{1}{2}(4k+1), \ldots, z = -\frac{2}{2}, -\frac{4}{2}, -\frac{6}{2}, \ldots,$$

sont absorbés par ceux du dénominateur.

$$z = -\frac{1}{2}, -\frac{2}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{4}{2}, -\frac{5}{2}, \ldots.$$

Ainsi $\Phi(z)$ est une fonction entière satisfaisant les conditions requises par le théorème de Laguerre, et par conséquent les zéros de

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \frac{\Gamma\left(\dfrac{2n+1}{2n}\right)\Gamma(n+1)}{\Gamma(2n+1)} = 2kF_{2k}(i\sqrt{z})$$

sont tous réels et négatifs ; nous en déduisons que les zéros de $F_{2k}(z)$ sont tous réels.

L'ordre de la fonction entière $F_{2k}(z)$ est $\dfrac{2k}{2k-1}$; si $k = 2, 3, 4, \ldots$, alors $1 < \dfrac{2k}{2k-1} < 2$. Ainsi, $F_{2k}(z)$ n'est pas d'ordre entier et par conséquent, possède une infinité de zéros ; ils sont tous réels, et par conséquent, (II) est complètement démontrée.

Supposons que x est positif. Alors on a, par intégration par parties,

$$x^{\alpha+1}F_\alpha(x) = x^\alpha \int_0^\infty \sin xt.\alpha t^{\alpha-1} e^{-t^\alpha} dt.$$

Introduisons la nouvelle variable $u = x^\alpha t^\alpha$; alors on a

$$(5) \qquad x^{\alpha+1}F_\alpha(x) = \Im \int_0^\infty \exp(iu^{1/\alpha} - ux^{-\alpha}) du,$$

où $\Im A$ dénote la partie imaginaire de A. Choisissons comme chemin d'intégration, non pas l'axe réel positif, mais une ligne droite allant de 0 à l'∞ dans le demi-plan supérieur et faisant un angle suffisamment petit avec l'axe positif réel. Avec ce chemin, on a :

$$\lim_{x=+\infty} x^{\alpha+1}F_\alpha(x) = \Im \int_0^\infty e^{iu^{1/\alpha}} du.$$

En faisant pivoter le chemin d'intégration dans le sens positif jusqu'à ce qu'il atteigne la position dans laquelle $\arg z = \frac{1}{2}\pi\alpha$, on obtient finalement

$$(6) \qquad \lim_{x=+\infty} x^{\alpha+1}F_\alpha(x) = \Im \int_0^\infty e^{-r^{1/\alpha}} e^{i\pi\alpha/2} dr$$

$$= \Gamma(\alpha+1)\sin(\pi\alpha/2).$$

Si la limite (6) est différente de 0, c'est-à-dire si α est différent de 2, 4, 6, …, alors $F_\alpha(z)$ possède

(a) un nombre fini de zéros réels et

(b) un nombre infini de zéros.

De ces assertions, (a) découle de façon évidente de (6). Pour prouver (b), nous utilisons le théorème qui énonce qu'une fonction entière d'ordre fini ayant un nombre de zéros fini est de la forme

$$P(z)e^{Q(z)}, \tag{7}$$

où $P(z), Q(z)$ sont des polynômes. Maintenant, $F_\alpha(z)$ n'est certainement pas de la forme (7), puisqu'elle converge vers 0 quand $z \to +\infty$ de la même manière qu'une puissance négative de z, comme on peut le voir à partir de (6). Les assertions (a), (b) qui viennent d'être démontrées contiennent les deux premières parties de (III).

De (1) découle, par le théorème de Fourier,

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty F_\alpha(x)\cos xt\,dx = e^{-t^\alpha} = 1 - \frac{t^\alpha}{1!} + \dots.$$

En différentiant $2m$ fois par rapport à t, où

$$2m < \alpha < 2m+2, \tag{8}$$

et en posant alors $t = 0$, nous obtenons

$$\int_0^\infty F_\alpha(x)x^2\,dx = \int_0^\infty F_\alpha(x)x^4\,dx = \ldots = \int_0^\infty F_\alpha(x)x^{2m}\,dx = 0 \tag{9}$$

La convergence des intégrales (9) est assurée par (6) et (8). Il découle de (9) que

$$\int_0^\infty F_\alpha(x)x^2P(x^2)\,dx = 0, \tag{10}$$

où $P(z)$ dénote n'importe quel polynôme en z de degré ne dépassant pas $m-1$. Supposons, maintenant, si possible, que $F_\alpha(z)$ change de signe au plus $m-1$ fois pour $x > 0$, e.g. en les points $x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}$ avec $0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{m-1}$ et posons

$$P(x^2) = (x_1^2 - x^2)(x_2^2 - x^2)\ldots(x_{m-1}^2 - x^2).$$

Alors l'intégrande dans (10) n'est jamais négatif et notre supposition amène à une contradiction. Par conséquent, $F_\alpha(x)$ change de signe au moins $m = \left[\frac{1}{2}\alpha\right]$ fois pour $x > 0$. Nous avons maintenant démontré l'entièreté du Théorème (III).

Les résultats que nous avons obtenus peuvent être complétés à de nombreux égards. Si $\alpha \geq 0$ et k est un entier non inférieur à 2, alors les zéros de la fonction entière de z

$$\int_0^\infty e^{\alpha t^2 - t^{2k}}\cos zt\,dt$$

sont tous réels ; la distribution asymptotique des zéros peut être calculée par des méthodes plus laborieuses et plus habituelles, et etc. La fonction $F_\alpha(z)$ a été considérée en relation avec des questions qui se posent en théorie des erreurs, spécialement par Cauchy [4], et P. Lévy [5] a démontré que $F_\alpha(x) \geq 0$ pour $0 < \alpha \leq 2$ et pour les valeurs réelles de x. Plus récemment, W. R. Burwell [6] a étudié l'expansion asymptotique de $F_\alpha(z)$ pour $\alpha = 3, 4, 5, \ldots$, et a montré en particulier que, quand $\alpha = 4, 6, \ldots$, le nombre de zéros complexes est fini. Ce résultat est inclus dans le Théorème (II) ci-dessus. Finalement, nous pouvons ajouter que $F_\alpha(z)$ est de la plus grande importance dans le problème de Waring [7].

4. *Comptes-Rendus*, vol. xxxvii. (1853), p. 202-206, et *passim.*
5. *Comptes-Rendus*, vol. clxxvi. (1923), p. 1118-1120.
6. *Proc. Lond. Math. Soc.* (2), vol. xxii (1923), p. 57-72.
7. G. H. Hardy and J. E. Littlewood, *Göttinger Nachrichten* (1990), p. 33-54.