Traduction des sous-titres de la vidéo *A mathematical mystery tour* (1985)

Bienvenue dans le monde des mathématiques pures, où les géométries existent dans de nombreuses dimensions et où les nombres sont plus grands que l'infini. C'est un monde où les objets se regroupent en configurations étranges. Et si vous pensiez que les lignes parallèles ne se rencontrent jamais, vous allez avoir une surprise.

Pendant plus d'une décennie, Bertrand Russell a tenté de trouver la certitude par les mathématiques en réduisant celles-ci à la logique. Dans son ouvrage dense, les *Principia Mathematica*, il lui a fallu pas moins de 362 pages pour prouver que 1 plus 1 égale 2.

Vingt ans plus tard, un autre mathématicien, Kurt Gödel, a prouvé que les mathématiques ne seraient jamais complètement certaines : il y aurait toujours des énoncés mathématiques vrais mais non démontrables.

Les objets abstraits des mathématiques ont-ils quelque chose à voir avec le monde réel ? Les mathématiques sont-elles la clé qui ouvre l'univers ?

Voici quelques-uns des problèmes mathématiques les plus connus et qui restent non résolus (*On voit défiler sur l'écran les problèmes ouverts en 1985 suivants, avec leur définition au-dessous "Le dernier théorème de Fermat"* [1] *"La conjecture de Goldbach", "L'hypothèse de Riemann", "Le problème de la classification des 4-variétés différentiables", "P=NP ?", "Le problème du sous-espace invariant pour les espaces de Hilbert".*). Ils ont résisté à la solution proposée par les plus grands esprits mathématiques du monde. Résolvez l'un d'entre eux et vous atteindrez une renommée instantanée.

Certains de ces problèmes ont des applications dans le monde réel. D'autres sont des problèmes plus abstraits créés par des mathématiciens pour les mathématiciens et étudiés pour leur propre intérêt intrinsèque.

Tout au long de l'histoire, les mathématiciens ont eu la certitude qu'en mathématiques, chaque problème, aussi difficile soit-il, pouvait être résolu. Mais au cours des 50 dernières années, certains événements ont ébranlé cette croyance.

Les problèmes abstraits des mathématiques pures ont-ils de l'importance dans le monde réel, ou bien les mathématiciens vivent-ils dans un monde qui leur est propre ? Y aura-t-il un jour des solutions à ces problèmes qui ont déjà résisté des centaines d'années ?

Au XVIIIe siècle, Bach a créé des compositions dans lesquelles on pouvait discerner des structures mathématiques. Lorsque Léonard de Vinci a dessiné les proportions parfaites du corps humain, elles s'inscrivaient dans un cercle et un carré. Et les civilisations anciennes ont construit des monuments immenses avec une précision toute mathématique. L'astronome Galilée a dit que pour comprendre

Référence de la vidéo : https://www.dailymotion.com/video/x9q3rem.
Traduction : Denise Vella-Chemla, assistée des outils Google translate, septembre 2025.

[1] Le dernier théorème de Fermat a été démontré par Andrew Wiles en 1994.

l'univers, il faut comprendre le langage dans lequel il est écrit, le langage des mathématiques. Les mathématiques permettent non seulement d'atteindre la vérité, mais elles sont aussi d'une suprême beauté. On dit qu'elles sont le travail de l'esprit humain dans sa quête pour comprendre notre monde. Certains des meilleurs mathématiciens d'aujourd'hui s'accordent sur cette définition.

Jean Dieudonné : "Un mathématicien veut vraiment comprendre les choses. Et quand on voit une solution à un problème qui améliore la compréhension de tous, alors on se dit que ce résultat est beau et important".

Michael Atiyah : "Je pense que cette branche de la science est beaucoup plus sûre que toute autre. La certitude que vous obtenez en mathématiques est très différente de celle que vous expérimentez en physique, en chimie ou en biologie. Nous, les mathématiciens, ne menons pas d'expériences. Au lieu de cela, nous avons des arguments logiques qui mènent d'une hypothèse à une conclusion. La preuve qui est la séquence logique d'étapes qui permet de déduire une chose d'une autre, est ce qui assure la cohésion de l'ensemble des mathématiques".

Greg Moore : "Les mathématiciens ont tendance à considérer les physiciens comme une catégorie d'êtres quelque peu inférieurs, qui traitent de connaissances quelque peu certaines, ou du moins assez probables, tandis que les mathématiciens pensent qu'une fois que quelque chose est prouvé, a été montré, le fait que cette chose soit vraie est certain. Il n'y a aucun doute là-dessus".

1. Preuve hors de tout doute

Sir Isaac Newton, physicien, astronome, fut l'un des plus grands mathématiciens du monde. En tant que scientifique, ses découvertes révolutionnaires sur la nature de la lumière sont un exemple clair de ce que l'on appelle la méthode scientifique. On pensait que la lumière blanche était la forme de couleur la plus pure. Newton a réalisé une expérience dans laquelle il a fait passer la lumière du soleil à travers un prisme et elle s'est séparée en un spectre de couleurs, réfutant ainsi l'hypothèse de l'époque.

En science, les expériences sont des preuves confirmatives. En mathématiques, cependant, c'est la preuve, une succession logique de pensées, qui est importante. Par exemple, si vous convenez que A est égal à B et que B est égal à C, alors vous devez conclure que A est égal à C. Les expériences ne sont pas nécessaires car la logique est irréfutable. Ce concept de preuve a rendu les mathématiques presque entièrement incontestées. C'est le cas pour toutes les branches des mathématiques, qu'il s'agisse de l'arithmétique, qui est l'étude des nombres, de la géométrie, qui est l'étude des formes ou de l'analyse, qui est l'étude de l'infini, qui inclut le calcul.

Les nombres sont la base des mathématiques, mais tous les nombres ne sont pas identiques. Certains sont appelés nombres premiers. La plupart des nombres peuvent être divisés en nombres plus petits. Ceux-ci peuvent à leur tour être décomposés. Mais en fin de compte, il ne reste que des nombres qui ne peuvent plus être divisés Deux, trois, cinq, sept, onze... On les appelle nombres premiers et ils apparaissent de manière aléatoire, devenant plus rares à mesure que les nombres augmentent. Mais comment pourriez-vous prouver que cela va toujours être le cas ? La méthode de preuve est un héritage des Grecs anciens. Euclide a prouvé qu'il existe un nombre infini de nombres premiers. Même aujourd'hui, sa preuve est considérée comme un modèle de pensée mathématique.

Jean Dieudonné : "C'est définitif, c'est exact. C'est définitif. La preuve d'Euclide en théorie des nombres dit qu'il existe une infinité de nombres premiers, c'est définitif. Cette preuve a été écrite il y a 2 500 ans. Elle est toujours vraie. Personne ne l'a jamais contestée".

Ce qu'Euclide n'a pas prouvé, ni personne depuis, c'est ceci : existe-t-il un nombre infini de jumeaux premiers ? Ce sont des paires de nombres premiers qui diffèrent de 2, comme 41 et 43, ou 59 et 61. et ainsi de suite. Il existe un autre problème faisant intervenir des nombres premiers et qui est toujours non prouvé, ce problème s'appelle la conjecture de Goldbach. C'est au XVIIIe siècle que Christian Goldbach se demande si tous les nombres pairs peuvent être obtenus en additionnant deux nombres premiers. C'est clairement vrai pour les petits nombres. En fait, cela a été vérifié par des ordinateurs jusqu'à 100 millions, et cela n'est jamais pris en défaut, jamais.

Alors, n'est-ce pas une preuve suffisante ? Pas pour les mathématiciens. Ils évoquent le cas de la conjecture de Merton. Il s'agit également de nombres premiers et lorsqu'on a vérifié la conjecture de Merton jusqu'à 10 milliards, elle s'est avérée fausse. Comme l'a rapporté la revue britannique *Nature*, malgré des résultats apparemment écrasants d'une preuve existant en sa faveur, la conjecture de Merton est fausse. Deux mathématiciens ont prouvé qu'elle échouerait, pour un nombre un peu inférieur à ce nombre énorme, 10 à la puissance 10 à la puissance 70. La preuve est incroyable car ce nombre est d'un ordre de grandeur totalement inaccessible au calcul direct. En fait, ce nombre est bien plus grand que le nombre d'atomes dans l'univers. Trouver des preuves pour ces problèmes classiques est extrêmement difficile. Mais certains mathématiciens amateurs se sont essayés à ces questions complexes.

En 1984, une publication britannique du journal *The Guardian*, a affirmé qu'un amateur avait résolu un célèbre problème de mathématiques appelé le dernier théorème de Fermat. Le problème a une histoire intrigante. Une nuit de 1631, raconte l'histoire, le mathématicien français Pierre de Fermat parcourait les écrits de l'ancien mathématicien Diophante. Il envisageait des équations de puissances différentes. Pour les équations dans lesquelles les nombres sont élevés à la puissance 2, il existait des valeurs entières de x, y et z, qui vérifient l'équation $x^2 + y^2 = z^2$. Mais cela semblait ne pas être vrai pour les puissances supérieures, les équations dans lesquelles les nombres sont élevés à la puissance 3, par exemple, n'avaient pas de solutions en nombres entiers. Mais pourrait-on prouver qu'il n'existe pas de solutions entières pour toutes les puissances supérieures ? Cette nuit-là, Fermat écrivit dans la marge du livre de Diophante que c'était effectivement le cas ; il écrivit "j'ai découvert une preuve vraiment merveilleuse de cela. Mais malheureusement, la marge est trop étroite pour le contenir." Fermat laissait souvent ses théorèmes sans preuve de cette manière, et il s'avérait généralement qu'il avait raison. Mais lorsque ces mots furent découverts après sa mort, les mathématiciens commencèrent leur quête d'une preuve de ce que l'on appelle le dernier théorème de Fermat.

Les plus grands mathématiciens de l'histoire ont cherché une telle preuve. Euler a essayé et a échoué. Lagrange aussi. Même Gauss, le prince des mathématiques, fut vaincu. Comme le fut Poincaré. Cette histoire distinguée d'échecs, avait vraiment fait réfléchir le mathématicien amateur Arnold. Avait-il réussi à démontrer le dernier théorème de Fermat ? Non : en peu de temps, les mathématiciens avaient trouvé l'erreur et Arnold avait dû s'excuser. Sa preuve était fausse.

Jean Dieudonné : "Cela arrive tout le temps, vous savez, les gens font des erreurs ou tirent des conclusions hâtives. C'est tellement douloureux d'écrire tous les détails de la preuve que parfois on se dit : "très bien, c'est évident", et on continue sans être rigoureux. C'est généralement à cet endroit-là que réside l'erreur. Quand on voit dans un article "il est évident que...", c'est louche. Habituellement, on se dit que s'il y a une erreur dans l'article, elle est là. J'en ai moi-même été coupable, et je pense que tout le monde l'a été à un moment ou à un autre. C'est tellement fastidieux d'écrire chaque détail. Parfois, on saute par-dessus un obstacle, et parfois c'est là que réside l'erreur".

René Thom : "Il faut convaincre vos collègues que vous avez vraiment raison, et cela, bien sûr, nécessite une preuve. Écrire une preuve, c'est vraiment se mettre au niveau des autres, pour ainsi dire".

Parfois, des prix sous forme de sommes d'argent sont offerts en récompense à ceux qui réussissent à résoudre des mystères mathématiques. Paul Erdös, un célèbre mathématicien hongrois, voyage dans le monde entier, offrant son propre argent, et il met au défi d'autres mathématiciens de trouver la solution de problèmes difficiles".

Paul Erdös : "En fait, on m'a demandé à plusieurs reprises ce qui se passerait si tous mes problèmes étaient résolus. Comment pourrais-je payer ? J'ai dit que je ne pourrais pas, mais qu'arriverait-il à la banque la plus solide si tous les déposants souhaitaient soudainement récupérer leur argent ? La banque serait clairement ruinée, et je pense qu'il est beaucoup plus probable que cela se produise plutôt que tous mes problèmes de mathématiques soient soudainement résolus".

Les fondements des mathématiques

Les mathématiques peuvent être faites sans preuve. Les Chinois ont conçu des tables de recettes pour raccourcir le processus de certains calculs. Les Égyptiens effectuaient des calculs compliqués dès 3000 avant J.-C., mais ils n'utilisaient pas de preuves. Leurs mathématiques étaient pratiques et utilisées pour compter, mesurer la terre et peser les produits agricoles comme les céréales.

Greg Moore : "Les premières mathématiques égyptiennes étaient essentiellement une sorte de livre de recettes. Ces livres contenaient des paragraphes ressemblant à ceci : "Prenez le nombre 2, élevez-le au carré, ajoutez 3 au résultat, divisez ce résultat par 3, etc., et telle ou telle chose se produira. Vous obtiendrez un certain résultat". Il n'y avait aucune volonté de généralisation. Ces exemples faisaient toujours mention de nombres spécifiques, mais il est clair qu'il s'agit tout autant d'une généralisation, comme si vous regardiez un livre de cuisine et qu'il disait : prenez 2 tasses de farine, ajoutez 1 quart de tasse de beurre, et ainsi de suite. Il ne s'agit pas de 2 tasses de farine spécifiques. Vous pouvez le faire avec 2 tasses de farine que vous trouvez, quelles qu'elles soient (quelle que soit leur taille). Et quand il est dit, prenez 2, en fait, cela dit, prenez n'importe quel nombre entier et faites-lui ceci, et vous obtiendrez un certain résultat".

Deux mille ans après les Égyptiens, un mathématicien grec aurait produit la première preuve mathématique. Il a prouvé que le diamètre d'un cercle divise ce cercle en deux parties égales.

Aristote a plus tard formalisé 14 règles de raisonnement à utiliser dans une preuve, et ce sont les principes directeurs employés par Euclide dans son traité de géométrie.

Le livre d'Euclide, Les Éléments, est le livre le plus largement diffusé de l'histoire de l'humanité après la Bible. Une preuve euclidienne procède par étapes logiques et ordonnées pour démontrer certaines propositions particulières. Les hypothèses peuvent être sujettes à caution, mais le raisonnement est irréfutable. Euclide a réussi à déduire tous les théorèmes connus en géométrie à partir de seulement 10 axiomes.

Un exemple d'axiome est qu'un segment de droite est tout ce qui se trouve uniformément entre deux points, y compris ces deux points eux-mêmes. Tout le monde tenait les axiomes d'Euclide pour vrais. Et ils n'ont pas été remis en question pendant plus de 2 000 ans. Mais au XIXe siècle, les mathématiciens ont essayé de reformuler certains d'entre eux pour voir ce qui pourrait arriver. Le résultat fut la conception d'étranges nouvelles géométries.

Et ces géométries non euclidiennes étaient tout aussi valables que celle d'Euclide. La géométrie n'a jamais regardé en arrière. Aujourd'hui, la géométrie traite de toutes les formes possibles dans toutes les dimensions possibles. Par exemple, un hypercube est un cube qui tourne dans l'espace à quatre dimensions.

Michael Atiyah : "Si vous vivez dans une dimension, sur une ligne, tout comme une route, des voitures circulant sur une route, alors la géométrie est assez différente de ce qu'elle est si vous avez plus de degrés de liberté. Si vous êtes un navire sur la mer, votre liberté est très différent de celle d'une voiture sur une route. Si vous êtes un avion dans le ciel, c'est encore une fois très différent d'un navire sur la mer. Vous avez plus d'espace pour vous déplacer. Et ainsi de nouvelles fonctionnalités peuvent apparaître.

De nouveaux domaines comme la topologie envisagent des objets bizarres, comme la soi-disant bouteille de Klein. Nous pensons généralement qu'une bouteille possède à la fois un intérieur et un extérieur. Mais une bouteille de Klein n'a qu'un seul côté. L'une des conséquences inattendues de l'exploration de la quatrième dimension et au-delà. L'idée la plus importante en géométrie est probablement celle de la courbure, comment les choses évoluent de place en place.

Et quand vous analysez cela, vous découvrez que vous avez besoin de quatre dimensions pour permettre à la courbure d'avoir toutes ses ramifications. Dans d'autres dimensions supérieures, rien ne change vraiment. Et d'un autre côté, avoir plus de dimensions permet en quelque sorte de dérouler les choses et de devenir plus simple. Il semble donc que les situations deviennent plus difficiles entre une, deux, trois et quatre dimensions. D'une certaine manière, cela devient plus facile par la suite.

Cela signifie que la quatrième dimension semble être la dimension la plus intéressante, la plus difficile et la plus excitante dans laquelle se trouver. Il s'agit de la dimension de l'espace-temps. Et d'une certaine manière, cela semble extrêmement suggestif. La profondeur des idées en géométrie en quatre dimensions est liée aux choses profondes en physique".

L'idée de la quatrième dimension pourrait être imaginée de cette façon. Ce segment de droite pourrait être utilisée pour représenter un objet unidimensionnel. Cette figure (*Un carré apparaît à l'écran.*) pourrait être utilisée pour décrire la deuxième dimension. Ajoutez de la profondeur et ce cube représente un objet en trois dimensions. Bien que la quatrième dimension ne puisse pas être facilement visualisée, considérez que le cube existe aussi dans le temps. Le temps est un exemple de la quatrième dimension. Les objets en quatre dimensions ou plus peuvent réellement exister, mais parce qu'ils ne font pas partie de notre expérience ordinaire, ils sont considérés comme abstraits.

Jean Dieudonné : "Il faut donc les considérer comme des objets abstraits. Ils étaient abstraits, ils sont restés abstraits et ils resteront toujours abstraits. Ainsi, à partir de 1840 environ, les mathématiciens ont dû traiter des objets qui n'étaient pas susceptibles d'une approche visuelle. Et c'est ce qui s'est passé, c'est pourquoi les mathématiques sont devenues de plus en plus abstraites, parce que les abstractions s'accumulent les unes sur les autres, et il semble que cela ne finisse pas".

Les objets abstraits des mathématiques correspondent-ils à des choses réelles ou sont-ils simplement des inventions de l'esprit mathématique ? Seraient-ils encore là même s'il n'y avait pas de mathématiciens pour les découvrir ? Ou est-ce qu'on les invente ? Le philosophe grec Platon croyait que tous les objets, aussi abstraits soient-ils, existent dans l'univers et que les mathématiques les découvrent. Cette vision est appelée platonisme. En effet, des cultures très différentes ont découvert les mêmes vérités mathématiques de manière indépendante, comme le théorème de Pythagore.

René Thom : "Mathématiquement, je suis platonicien, et je crois que les entités mathématiques existent en dehors de l'esprit des gens. Bien sûr, une telle affirmation est difficile à justifier, mais au moins le sentiment psychologique est que vous découvrez réellement des choses et que vous ne les inventez pas".

Greg Moore : "Quand ils se parlent, les mathématiciens sont platoniciens, presque purement et simplement. C'est-à-dire qu'ils agissent comme s'ils parlaient de quelque chose qui existe réellement et qui possède certaines propriétés définies ; et vous pouvez prouver quelque chose à leur sujet, quelque chose de tout à fait explicite et défini".

Un objet mathématique qui semble apparaître encore et encore est le rectangle d'or. Vous le retrouverez dans les croquis de Léonard de Vinci et dans l'architecture, de l'époque classique à l'époque moderne. Pourquoi les proportions de ce rectangle devraient-elles être si satisfaisantes ? Si vous divisez la hauteur par la largeur, vous obtenez ce qu'on appelle le nombre d'or. Et ce nombre apparaît dans les endroits les plus étranges, comme cette expression symétrique. Plus vous continuez, plus sa valeur se rapproche du nombre d'or, environ 1,618. Un autre exemple de la manière dont les idées mathématiques correspondent aux objets réels est visible dans les symétries de la nature.

Michael Atiyah : "La symétrie est quelque chose que tout le monde comprend intuitivement. Vous avez des figures comme des cercles, des triangles, des carrés, des ruches, des cristaux, qui présentent tous quelque chose que nous considérons comme une symétrie. Mais la compréhension mathématique de cela est une question très difficile. Si vous prenez un carré et que vous pouvez le tourner de 90 degrés, il ressemble toujours à la même chose. Si vous prenez un triangle équilatéral et que vous le faites pivoter vers la droite, autour de son milieu, du nombre d'angles souhaité, les points se déplaceront et le même triangle sera à nouveau obtenu. Donc, la symétrie a à voir avec la façon dont on peut déplacer les choses de telle sorte qu'elles restent inchangées. Et c'est l'idée de base que les mathématiciens ont essayé d'abstraire. Peu importe ce qui est en jeu, tant que vous pouvez considérer les différentes manières possibles de changer les choses. Et le changement ne doit pas nécessairement être considéré comme un mouvement physique dans l'espace. Si j'ai deux frères et que je pense simplement à les intervertir, c'est une symétrie".

Cette étoile illustre la manière dont le mathématicien décrit la symétrie. Les chiffres sur les pointes de l'étoile sont associés aux chiffres de leur position. Lorsque l'étoile est tournée de l'angle adéquat vers la droite, on obtient une étoile qui a le même aspect, mais le premier point correspond désormais à la deuxième position. Les mathématiciens ne se fient généralement pas à des images comme celle de cette étoile. Ils visualisent la symétrie entièrement en termes de nombres. De cette façon, ils ont pu voir des symétries dans la nature que nous ne reconnaissons pas facilement. L'étude mathématique de la symétrie est appelée théorie des groupes. Elle a été fondée par un jeune étudiant français, Évariste Galois. C'est une histoire tragique qui commence une nuit de 1832. Galois a rapidement griffonné ses idées dans une lettre à un ami. Il devait écrire vite car le matin il devait se battre en duel pour un femme. La lettre contenait les germes de la théorie des groupes, qui est devenue l'une des théories les plus puissantes de toutes les mathématiques. Galois n'avait que 21 ans, et ce fut le demier acte de sa vie tragique. Ce matin-là, il fut tué en duel.

Au cours des décennies qui ont suivi, les mathématiciens ont pu percevoir les nombreuses façons dont l'univers est symétrique. Au XIXe siècle, les mathématiciens étaient entrés dans un monde de possibilités infinies.

Une question d'infini

La question de l'infini captive l'imagination humaine depuis des milliers d'années. L'infini est utilisé pour décrire ce qui dure pour toujours. Et c'est caractéristique d'un ensemble de nombres appelés les nombres irrationnels. Si vous divisez la circonférence d'un cercle par son diamètre, vous obtenez l'un des nombres les plus célèbres des mathématiques. On l'appelle pi (π) et on le retrouve partout, même dans les jeux de hasard. Si ces lignes sont séparées par la longueur d'une aiguille. Quelles sont les chances qu'une aiguille qu'on lâcherait au hasard touche une ligne ? La réponse s'avère impliquer pi.

Ou bien considérons cette série :

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots.$$

Si vous deviez continuer ainsi indéfiniment, vous obtiendriez un résultat égal à un quart de pi.

Tout au long de l'histoire, beaucoup ont essayé de calculer la valeur de π. Les anciens Égyptiens évaluaient pi à 3,16, et les Grecs, à l'époque d'Archimède, avaient établi sa valeur à 22 sur 7. Mais ce n'est qu'une approximation. Sous forme décimale, pi est infiniment long et ses chiffres ne répètent jamais la même séquence de nombres. C'est ce qu'on appelle un nombre irrationnel. En calculant pi jusqu'à 39 décimales, vous avez largement de quoi mesurer la taille de l'univers avec une précision remarquable. Plus tôt cette année, deux scientifiques japonais ont calculé un nombre à plus de 16,5 millions de décimales. C'est le dernier plus long nombre qu'on ait calculé. C'est un nombre premier. On peut l'écrire d'une manière particulière :

$$2^{31} - 1$$

Cette abréviation pour les puissances a été inventée par le moine français Mersenne. Et vous pouvez voir comment cela fonctionne en utilisant un damier. Empilez un pion sur la première case, deux pions sur la deuxième case ; en doublant les pions au fur et à mesure, vous obtenez les nombres $2^2, 2^3, 2^4, \ldots$. Les nombres deviennent vite très grands : 2^{64} correspondrait à un amas de 37 millions de millions de kilomètres de haut, suffisamment pour atteindre l'étoile la plus proche. Comparez-le maintenant au nombre que Brian Tuckerman a trouvé en 1971 et qui s'est avéré être un nombre premier sur son ordinateur IBM 360. Mais deux lycéens californiens de 15 ans ont fait mieux, ils ont trouvé ce nombre premier.

???

Le détenteur actuel du record est David Slowinski.

Son nombre premier, $2^{132\,049} - 1$, est le plus grand nombre premier connu. Il n'a fallu qu'une semaine pour le calculer sur un superordinateur Cray, en utilisant une méthode de raccourci ingénieuse. Sans ce raccourci, un tel calcul aurait pris plus de temps que l'âge de l'univers.

Raymond Smullyan : *(donnant un cours)* "Imaginez que vous êtes tous dans l'Hades et que je suis le diable. Je fais la proposition suivante. Je dis, j'ai écrit un entier positif sur un bout de papier. Un nombre entier, soit 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, et ainsi de suite. Chaque jour, vous laissez une personne deviner quel est ce nombre. Et lorsque vous devinerez le nombre, vous serez libre".

Le professeur Raymond Smullyan utilise une histoire classique pour illustrer une découverte surprenante des mathématiciens selon laquelle il existe des nombres plus grands que l'infini. Dans les années 1880, le mathématicien allemand George Cantor a développé une méthode permettant de comparer les tailles d'ensembles infinis de nombres en mettant leurs éléments en correspondance un par un (en trouvant une bijection entre ces ensembles). Prenons par exemple l'ensemble des nombres entiers comme 1, 2, 3, etc. Il y en a un nombre infini. Comparez-le à un ensemble de ces nombres. *(On voit les premiers nombres entiers, chacun en face de son double. Puis on voit les premiers nombres entiers, chacun en face de son produit par 10.)*. L'ensemble des nombres entiers serait-il un dixième fois plus grand que l'ensemble des nombres entiers chacun étant multiplié par 10 ? En les associant par paires, Cantor a prouvé qu'en fait, les deux collections ont la même taille.

Raymond Smullyan : "Maintenant, je vais rendre le test beaucoup plus difficile. Cette fois, j'ai une victime, disons une charmante jeune femme que je souhaite garder pour toujours. Je veux faire en sorte qu'il soit très difficile pour elle de s'échapper. Et donc je dis, cette fois, "jeune femme, je pense à une fraction. Un nombre entier divisé par un autre nombre entier. Cela pourrait être 5 sur 3, ou 3 sur 7, ou 2 sur 9. Une fois chaque jour, vous pourrez me dire quel nombre vous pensez que j'ai choisi. Quand vous devinerez mon nombre, vous serez libre".

En associant l'ensemble des fractions à l'ensemble des nombres entiers, Cantor a découvert, de manière surprenante, qu'ils avaient la même taille. Mais il a découvert que d'autres ensembles de nombres connus étaient plus grands. Sur une droite numérique, il existe des nombres qui ne peuvent être exprimés ni sous forme de nombres entiers ni sous forme de fractions. Il y en a plus dans le plus petit segment de ligne qu'il n'y a de nombres dans l'univers. Ces autres nombres sont des nombres irrationnels, des nombres comme pi. Et en les associant aux nombres entiers, Cantor a prouvé qu'il resterait des nombres irrationnels. L'ensemble des nombres irrationnels était véritablement plus grand que l'infini, cela signifiait qu'au-delà de l'infini, que Cantor appelait aleph zéro ($\aleph_0$), il y avait des infinis plus grands, aleph un ($\aleph_1$), et aleph deux ($\aleph_2$), et des infinis encore plus grands au-delà. Les idées de Cantor ont été accueillies avec scepticisme au début, mais elles ont finalement évolué vers un sujet important appelé aujourd'hui théorie des ensembles.

Jean Dieudonné : "Si nous n'avions pas l'infini, il n'y aurait presque pas de mathématiques à l'heure actuelle. Nous disons que nous en avons besoin tout le temps. Eh bien, bien sûr, vous savez qu'il y avait des préconceptions philosophiques contre l'infini réel. Pour nous, cela a disparu parce que l'infini pour nous est devenu simplement une sorte de forme, nous avons un axiome de l'infini, mais nous ne lui attachons pas de signification matérielle, je veux dire, nous ne prétendons pas qu'il existe des objets, une infinité d'objets d'une certaine sorte quelque part. C'est pourquoi les gens, je pense, étaient si réticents à accepter l'infini, parce qu'ils disaient que si l'infini existe, il doit y avoir une infinité de choses quelque part, et puis ils sont entrés dans des contradictions".

5. Des fissures dans les fondements

D'autres mathématiciens ont été inspirés par les travaux de Cantor et ont appliqué ses nouvelles idées à l'ensemble des mathématiques. Peu de temps après les révélations de Cantor, un manuscrit apparut, que peu de gens purent comprendre. Son auteur, Gottlob Frege, avait emprunté la définition des ensembles de Cantor et avait tenté quelque chose d'assez remarquable : réduire toute l'arithmétique à quelque chose qu'il croyait plus fondamental, la logique, un sujet qui existait depuis Aristote.

Greg Moore : "Or, chez Aristote, vous avez essentiellement la notion de syllogisme. Un exemple de syllogisme est : "tous les hommes sont mortels, Socrate est un homme, donc Socrate est mortel". Et on pensait que tout raisonnement pouvait être exprimé sous une forme ou une autre de syllogisme, et que tout raisonnement, même en mathématiques, était de ce type. Avec Frege, vous avez l'exemple de la première véritable compréhension du fait que tout raisonnement en mathématiques n'est pas de ce genre, qu'il existe des types de raisonnement qui nécessitent d'autres modes pour les décrire, et que ces modes peuvent être rendus très précis, et que, étant donné cette précision, l'arithmétique sera alors considérée comme faisant partie de la logique".

C'est à ce moment-là que Bertrand Russell entre dans l'histoire.

Greg Moore : "Eh bien, alors que le deuxième volume de l'ouvrage principal de Frege sur ce sujet allait paraître sous forme imprimée, Bertrand Russell, qui à l'époque est un philosophe plutôt jeune et peu connu, écrit à Frege en disant qu'il a lu certains de ses travaux et les a trouvés très intéressants, et, soit dit en passant, qu'il a trouvé lors de sa lecture un paradoxe qu'il n'est pas capable de résoudre".

Le paradoxe de Russell conceme la théorie des ensembles, mais peut être raconté comme l'histoire d'une bibliothécaire à qui l'on a ordonné de compiler un catalogue de chaque livre de sa bibliothèque. Alors qu'elle termine, une idée lui vient à l'espri t: devrait-elle inclure le catalogue lui-même dans le catalogue ? Après tout, c'est un livre. Elle décide de ne pas le faire. La Bibliothèque nationale reçoit de tels catalogues de toutes les bibliothèques du pays. Certains catalogues, jaunes, où le bibliothécaire régional a répertorié le catalogue complet lui-même. Certains catalogues, bleus, là où le bibliothécaire régional ne l'a pas fait. Le bibliothécaire de la Bibliothèque Nationale a maintenant la tâche formidable de compiler un catalogue principal des catalogues bleus, les des catalogues qui ne se répertorient pas eux-mêmes. Mais en y réfléchissant, il se rend compte que c'est impossible, car que fait-il du catalogue principal lui-même ? S'il ne l'énumère pas, alors ce catalogue des catalogues qui ne se répertorient pas eux-mêmes ne sera pas complet. Mais s'il le fait, c'est une erreur, car alors ce n'est plus un catalogue de catalogues qui ne se répertorient pas eux-mêmes.

Pourquoi Russell aurait-il dû penser que ce paradoxe était si important ? C'est parce que la manière la plus générale de penser à tout objet mathématique était de le considérer en termes de collections ou d'ensembles d'objets mathématiques. Un catalogue de livres n'est, en principe, pas différent d'un ensemble de nombres. Ironiquement, l'effort de logique conduisait les mathématiciens non pas à la certitude, comme ils s'y attendaient, mais à l'incertitude. Les idées de logique et d'ensembles étaient si fondamentales pour les mathématiques que se retrouver face à une telle contradiction à ce niveau des mathématiques était très inquiétant. L'entreprise entière pourrait s'avérer construite sur du sable.

Greg Moore : "Frege était absolument dévasté par la lettre de Russell et la considérait comme, en substance, détruisant l'œuvre de sa vie. Frege et Russell ont ensuite correspondu, et Frege a proposé diverses possibilités de solution, tout comme Russell. Mais Frege n'a plus jamais été le même après cela".

Russell, cependant, restait optimiste quant à la possibilité de résoudre son paradoxe et de rétablir la certitude logique.

Pendant la décennie suivante, avec Alfred North Whitehead, il travailla à la production des *Principia Mathematica*. Cet ouvrage très conséquent visait à déduire toutes les mathématiques à partir des principes fondamentaux de la logique. Cela prend du temps de pouvoir avancer : quelques 362 pages sont nécessaires avant d'arriver à démontrer que $1 + 1 = 2$.

Ivor Grattan-Guinness : "Personne n'avait rien fait à l'échelle de détail qui est celle des *Principia Mathematica*. Je veux dire que les *Principia* sont constituées de 2 000 pages de ce qui ressemble la plupart du temps à du papier peint. Je veux dire que parfois, il n'y a pas plus d'un mot en prose sur la page. Et il y a ces monceaux de formules partout. Du coup, il peut arriver ce genre de chose. Oh, mon Dieu, vous faites une erreur en prouvant la proposition 47.275. Avez-vous déja fait la même erreur ailleurs ? Je veux dire que vous pourriez facilement passer une matinée à vérifier des choses comme ça. Je peux comprendre exactement comment cela a dû se passer lors de la production d'un tel ouvrage. Russell lui-même n'y a travaillé que par intermittence par la suite. En fait, il a dit que cette rédaction l'avait brisé". Après la sortie des *Principia*, intellectuellement, il n'était plus aussi vif qu'avant".

Mais le projet a-t-il été un succès ?

Ivor Grattan-Guinness : “Ce que font Russell et Whitehead dans *Principia Mathematica*, c'est en quelque sorte se préparer à faire des mathématiques, sans jamais vraiment aller jusqu'à faire des mathématiques. Et d'une certaine manière, l'œuvre est comme une vaste ouverture d'un opéra qui n'a jamais été écrit”.

Russell lui-même a écrit : “Je voulais une certitude, de la même manière que les gens recherchent la foi religieuse. Je pensais que la certitude était plus susceptible d'être trouvée en mathématiques qu'ailleurs. Et après une vingtaine d'années de travail très pénible, je suis arrivé à la conclusion qu'il n'y avait plus rien que je puisse faire”.

6. Revenir aux bases

En France, la réponse au programme logique de Russell fut une série de volumes mathématiques publiés sous le nom de Bourbaki. Pendant des siècles, la France s'est vantée d'avoir l'une des plus belles traditions mathématiques d'Europe. Cette tradition s'est perdue lorsque le déclenchement de la Première Guerre mondiale a interrompu les activités intellectuelles. Après la guerre, un groupe de mathématiciens français de haut niveau a décidé de se réunir pour relancer la tradition, avec un projet outrageusement ambitieux, celui de débarrasser les mathématiques de tous leurs paradoxes. Ils ont choisi pour leur groupe le nom de Bourbaki.

Michael Atiyah : Bourbaki, vous savez, était l'un des généraux de Napoléon, je crois, et ils ont pris son nom simplement comme une sorte de pseudonyme pour leur groupe de mathématiciens français.

Ils travaillent d'une manière très intéressante : ils se réunissent et écrivent leurs livres ensemble. J'ai déjà assisté à l'une de leurs réunions : ils parcourent les manuscrits page par page, en discutant en détail. Ils sont très, très, eh bien, on pourrait dire, très prudents. Et ils ont déployé d'énormes efforts pour parvenir à obtenir une telle rigueur. On pourrait presque dire que c'est trop de rigueur parfois. Ils se sont peut-être pris un peu trop au sérieux”.

Pour Russell, la logique était au-delà de tout soupçon. Pour Bourbaki, cependant, tout, y compris les règles ancestrales de la logique, doit être soumis à un examen minutieux. Bourbaki a souligné la nécessité d'une terminologie et d'un langage corrects. Les membres du groupe avaient une approche très formelle des mathématiques.

Jean Dieudonné : “Nous, Français, avons été élevés dans la tradition du respect de la langue. Nous avons considéré que la langue française a évolué à travers les siècles jusqu'à un point où elle est un bon outil et qu'elle a vraiment des qualités qui lui sont propres. Et mal utiliser la langue est très grave, nous considérons cela comme une sorte de péché”.

Mais d'autres, comme René Thom, expriment un certain scepticisme quant à l'influence de Bourbaki.

René Thom : “Si on me demandait quelle est peut-être la principale réussite de Bourbaki en mathématiques, je dirais que Bourbaki a clarifié la différence entre le cercle et le disque et entre la sphère et la boule. Et c’est quelque chose de très important à mon avis”.

Le besoin de précision et de rigueur du langage employé intéressait beaucoup Bourbaki, et leurs œuvres publiées ont une certaine influence encore aujourd’hui.

Pendant ce temps, David Hilbert, l’un des plus grands mathématiciens du début du xxe siècle, s’inquiétait également des paradoxes. Hilbert pensait que les paradoxes étaient survenus parce que les mathématiciens essayaient de décrire des idées mathématiques en utilisant un langage ordinaire. Pour lui, les mathématiques ne pouvaient être correctement décrites qu’en termes symboliques abstraits.

Jean Dieudonné : “C’est une chose complètement fausse de dire que je peux imaginer ce que signifie dix à la puissance dix. Pour moi, c’est simplement un système de chiffres, mais cela n’a pas de signification réelle. Le nombre trois a une signification, car je peux voir immédiatement trois objets. Mais le nombre dix à la puissance dix n’a aucun sens, sauf celui que vous lui donnez, à travers les axiomes”.

Les idées de Hilbert peuvent être comprises si l’on compare les mathématiques à une partie d’échecs. Lorsque les humains jouent aux échecs, ils utilisent leur intuition, ils forment des images mentales, ils sont émotifs. Mais le jeu d’échecs lui-même peut être décrit en termes complètement abstraits, de sorte qu’une machine peut y jouer. Un micro-ordinateur n’a aucune intuition ni aucune image mentale des pièces. Les axiomes des échecs, les règles, suffisent à définir tous les coups possibles. Et si le programme a été écrit correctement, la machine n’enfreindra jamais les règles.

De la même manière, Hilbert pensait que les mathématiques pouvaient être transformées en une sorte de jeu. Ses principes, pensait-il, pouvaient être exprimés entièrement en termes de symboles abstraits et manipulès mécaniquement. Il espérait qu’en éliminant le sens des mathématiques, en s’en tenant rigoureusement aux règles, il les libérerait une fois pour toutes des paradoxes et de la contradiction.

Jean Dieudonné : “Historiquement, il est tout à fait vrai que la plupart des mathématiques proviennent de questions ou de théories qui avaient également une signification en physique. Si vous prenez les équations aux dérivées partielles, par exemple, d’accord, elles sont très abstraites, mais la plupart d’entre elles proviennent de problèmes concrets de physique ou de mécanique ou de ce genre de choses. Mais une fois que les assertions ont été traduites en mathématiques pures, c’est-à-dire dérivées d’un système d’axiomes, leur signification n’a plus d’importance. Nous devons travailler en fonction des hypothèses que nous avons formulées, c’est tout”.

Le prix de la rigueur pourrait être de retirer le sens des mathématiques, un prix dont certains mathématiciens estiment qu’il est tout simplement trop élevé.

René Thom : La rigueur n’a rien à voir avec l’intérêt. Il y a beaucoup de choses intéressantes qui ne sont pas rigoureuses et beaucoup de choses rigoureuses qui sont dénuées de tout intérêt. D'ailleurs, une de mes maximes préférés est, en français, "tout ce qui est rigoureux est insignifiant". Tout ce qui est rigoureux est dénué de sens. Et c'est là, en quelque sorte, la philosophie de Hilbert, du programme de Hilbert poussé à l'extrême. On n'atteint la rigueur que par l'absurdité".

En 1930, les mathématiciens de Russell à Hilbert tentaient de restaurer la certitude du raisonnement mathématique. Mais un jeune mathématicien allait les choquer tous en prouvant que cela ne pourrait jamais être fait. En 1931, un mathématicien autrichien, Kurt Gödel, publia un théorème de logique qui démolit le programme de Hilbert pour résoudre les contradictions. Le théorème d'incomplétude de Gödel a montré que les mathématiques resteraient toujours en proie à une sorte de paradoxes. Il y aura toujours des questions que les mathématiques ne pourront pas résoudre. Considérez cet ensemble de principes. Gödel a prouvé que ni cet ensemble ni aucun autre ensemble ne serait jamais complètement adéquat pour résoudre toutes les questions mathématiques. Hilbert n'accomplirait jamais ce qu'il avait entrepris de faire.

Michael Atiyah : "Cela démoralise complètement ou sape tout ce programme visant à établir les fondements des mathématiques. Bien sûr, il y a depuis lors beaucoup de discussions sur les fondements des mathématiques et sur la manière dont vous devriez les établir. Mais comme ce programme initial a échoué, la plupart des mathématiciens en activité adoptent une attitude plus pragmatique. Ils disent "eh bien, si nous ne pouvons pas atteindre une certitude ultime en mathématiques, en définissant leurs fondements, ce n'est pas une raison pour arrêter de faire des mathématiques.

Les physiciens s'entendent plutôt bien, même si les fondements de la physique sont beaucoup plus fragiles que celles des mathématiques. Ainsi, la plupart des mathématiciens s'en sortent très bien avec leurs mathématiques, même s'ils savent que dans un sens profond et ultime, les fondements sont peut-être un peu incertains".

Tout comme Einstein avait transformé la physique, Gödel a changé les mathématiques pour toujours. Un exemple du XIXe siècle est l'hypothèse du continuum. Les mathématiciens n'ont pas réussi à prouver qu'elle était vraie ou fausse.

Cette hypothèse du continu a un troisième statut.

Raymond Smullyan : elle est indécidable. Vous ne pouvez pas prouver l'hypothèse du continu. Vous ne pouvez pas réfuter l'hypothèse du continu à partir des axiomes actuels de la théorie des ensembles. Maintenant, certains mathématiciens très formalistes disent que cela signifie que l'hypothèse du continuum n'est ni vraie ni fausse. Eh bien, je ne le crois pas, et la plupart des mathématiciens ne le croient pas non plus. Nous voulons savoir si l'hypothèse du continuum est vraie ou non. Supposons que vous construisiez un pont et que les physiciens et les ingénieurs se réunissent et veulent savoir, car le lendemain, l'armée va traverser le pont, si le pont supportera le poids ou non.

Cela ne leur servira à rien de dire : "eh bien, dans certains systèmes d'axiomes, vous pouvez prouver que le pont résistera au poids de l'armée le traversant. Et dans certains systèmes d'axiomes, vous pouvez prouver qu'il ne supportera pas ce poids". Les physiciens et les ingénieurs veulent savoir si le supportera le poids ou pas, point. Et les soi-disant platoniciens ou classicistes mathématiques, dont la plupart des mathématiciens en activité font partie, et dont je suis assurément, considèrent l'hypothèse du continu comme définitivement vraie ou fausse, mais ne savent pas quelle est la bonne réponse. Ce n'est pas parce que c'est indécidable sur la base de l'axiome présent que cela signifie que ce n'est ni vrai ni faux. Cela signifie que les axiomes, les axiomes actuels de la théorie des ensembles, ne nous en disent pas assez sur les ensembles pour trancher la question. La situation est tout à fait remarquable.

Jean Dieudonné : Les mathématiciens travaillent peut-être sur des problèmes qui ne peuvent pas être résolus. Ils perdent peut-être simplement leur temps. Eh bien, dans un sens, je devrais dire que pour nous, la plupart des mathématiciens, nous pensons que c'est assez avantageux. Dites-leur simplement : "N'essayez pas de résoudre ce problème, vous perdrez votre temps". Parce qu'avant cela, beaucoup de gens travaillaient, par exemple, sur l'hypothèse du continuum, et parfois ils pensaient qu'ils allaient résoudre ce problème. Il y a un mathématicien français, pas très bon, qui a passé toute sa vie à travailler sur le probleme du continu, et à produire de nouvelles épreuves à l'époque, et les épreuves ont été examinées et toutes se sont avérées fausses, bien sûr. Il n'a pas abandonné et a continué jusqu'à la fin de sa carrière. Eh bien, pour éviter cela, il vaut mieux savoir à l'avance que s'attaquer à tel problème est sans espoir, autant que nous le sachions".

Certains grands problèmes non résolus ne sont pas indécidables, même si plusieurs dizaines d'autres peuvent l'être. Loin de rendre les mathématiques certaines, la logique telle que nous la connaissons a exposé ses limites, et la logique a eu une autre conséquence imprévue. L'utilisation de la logique reste peut-être notre meilleur moyen d'obtenir à des réponses à des questions réelles et des questions abstraites. En fait, la logique symbolique s'est avérée être l'ingrédient essentiel du développement en temps de guerre de ce qui est devenu la technologie la plus dynamique de notre époque, l'ordinateur. Et tout comme l'ordinateur a changé tout le reste, il peut changer les mathématiques.

Jusqu'en 1976, le problème des quatre couleurs n'était pas résolu. Ce problème vieux d'un siècle nécessite une preuve que quatre couleurs suffisent pour colorier n'importe quelle carte sur un plan ou une sphère, afin que deux pays adjacents ne soient jamais de la même couleur. Cela doit être prouvé, pas seulement pour les cartes que nous voyons dans les atlas, mais pour toute carte concevable qui pourrait être dessinée, comme celle-ci. Et en fait, il a été prouvé que quatre couleurs suffisent. La nouveauté, c'est que cela a été fait sur ordinateur. L'ordinateur a participé en dessinant des milliers de configurations. Mais est-ce une preuve ?

Michael Atiyah : "C'est peut-être le premier exemple d'un ordinateur utilisé pour améliorer quelque chose en mathématiques. Et il est assez clair qu'avec l'avènement d'ordinateurs de plus en plus puissants, cela va se produire de plus en plus souvent.

Je pense qu'il y a des avantages et des dangers là-dedans, et d'un côté, il est clair que les mathématiciens ne devraient pas rejeter les nouveaux outils, et si un ordinateur peut les aider à mieux comprendre quoi que ce soit, ils devraient évidemment l'utiliser, et le feront. D'un autre côté, si nous faisons venir des ordinateurs pour vérifier certaines choses pour nous, alors nous n'atteignons pas le même niveau de compréhension. Nous disons simplement que l'ordinateur nous a dit que c'était vrai".

René Thom : "Tout d'abord, on pourrait se demander si une preuve faite par ordinateur, en calculant sur un ordinateur, est vraiment une preuve. Car, après tout, si l'ordinateur fait une erreur, alors la preuve est erronée. Ainsi, à cet égard, les preuves réalisées par des moyens informatiques ne doivent pas être considérées strictement comme des preuves, à mon goût.".

Michael Atiyah : "Nous ne sommes pas simplement des mathématiciens qui cherchent à obtenir des réponses, et à notre goût. Nous voulons comprendre. Et la compréhension est quelque chose que vous ne pouvez pas faire, que vous ne pouvez pas atteindre, à moins d'être réellement impliqué dans le processus, tout au long du processus. Si vos ordinateurs prennent en charge une grande partie de ce processus, les êtres humains seront alors tout simplement exclus du processus de compréhension. Ils seront simplement les gens qui alimentent les choses au début, et prennent les choses qui sont renvoyées par l'ordinateur à la fin. Et ça, je pense, c'est un danger pour les mathématiques, un danger potentiel. Et avec l'attrait et les avantages évidents des ordinateurs pour la jeune génération qui les utilise, on voit que c'est un danger qui est à l'horizon, certainement, si je puis dire".

La plupart des mathématiciens ne se préoccupent pas uniquement des solutions. Ils s'intéressent aux problèmes eux-mêmes. La question n'est pas de savoir si quelqu'un d'autre pense qu'ils sont importants ou non.

Greg Moore : "La question n'est pas de savoir s'ils vont construire une meilleure automobile ou un meilleur ordinateur. Il s'agit de savoir si c'est un problème important dans un certain sens, qui n'est réellement explicable que par un mathématicien. Et les mathématiciens, en particulier les mathématiciens de premier ordre, ne sont généralement pas intéressés par le fait de s'attaquer à tel ou tel problème, à moins qu'ils ne soient de ce type. Or, souvent, l'une des choses qui leur donne ce caractère, c'est que certains mathématiciens ont essayé de les résoudre, de très bons mathématiciens, et n'ont pas été capables de le faire.

Vous mentionniez donc six problèmes, vous savez, le dernier théorème de Fermat, la conjecture de Goldbach, l'hypothèse de Riemann, etc. Pourquoi ces problèmes sont ils importants ? L'une de leurs caractéristiques les plus importantes, c'est que de très bons mathématiciens ont essayé de les résoudre sur une longue période de temps et qu'ils ont échoué. Donc si vous pouvez les résoudre, et que vous êtes mathématicien, vous avez déjà bâti votre réputation. Je veux dire, vous pouvez être un mathématicien de premier ordre et ne faire cela qu'avec l'un des problèmes. Et si vous ne faites rien d'autre pour le reste de votre vie, Oxford vous voudra, Cambridge vous voudra, Harvard vous voudra, etc".

Raymond Smullyan : "Donc, le chiffre quatre n'appartient pas à l'ensemble indiqué à la page quatre. Donc, le chiffre quatre fait partie de cet ensemble".

Les mathématiciens du futur devront vivre avec l'indécidable, avec les preuves informatiques et avec des mathématiques toujours plus abstraites. Un élève de Smullyan : "Eh bien, vous avez dit que l'ensemble, ce que vous disiez, était l'ensemble de tous les ensembles qu'il avait écrits dans le livre. Alors il n'aurait pas été possible pour lui d'écrire cet ensemble dans le livre parce que..."

Greg Moore : “Maintenant, comme les mathématiques deviennent beaucoup plus abstraites, comme cela a été le cas au cours des cent dernières années, il est alors fort probable que certains des problèmes ouverts occasionneront de nombreuses recherches, tandis que certains d’entre eux deviendront très abscons et baroques. Et qu’est-ce qui empêchera que cela arrive ?

D’une certaine manière, la réponse est probablement rien. Il est inévitable que cela se produise. Et la question est simplement : dans quelle mesure cela se produira-t-il ? Et cela constituera-t-il un fragment significatif des mathématiques dans leur ensemble ? Je pense que, d’une certaine manière, la réponse à cette question est en partie très pragmatique. Le manque de financement à lui seul empêchera que cela se produise.

L’autre aspect de la question est que ce qui est réellement important en mathématiques et ce qui ne l’est pas est très relatif à l’époque”.

Malgré ses défauts, la tradition mathématique a conduit à l’ensemble de connaissances le plus sûr que nous possédions. Mais c’est manifestement une entreprise humaine, les mathématiciens établissent les règles et décident des objectifs, même si au final ils semblent incapables de contrôler exactement ce qu’ils ont créé. D’autres systèmes d’axiomes cohérents pourraient être prouvés comme étant faux.

Jean Dieudonné : “D’un point de vue philosophique, il est très important de savoir que les mathématiques, après tout, sont quelque chose qui doit rester incomplet à certains égards. On ne peut rien y faire. Nous en sommes tout à fait satisfaits. Nous ne voulons pas qu’il soit complet. Nous sommes satisfaits que cela nous donne beaucoup de résultats très beaux et importants. C’est tout. On ne se soucie plus de savoir si ce n’est pas complet. Et il y a beaucoup de choses indécidables. D’accord. Nous n’essaierons pas de les décider. C’est tout. Nous allons examiner d’autres problèmes, d’autres questions que nous devons comprendre...”.