Deux extraits du livre *Projective geometry* de H. S. M. COXETER, chez Springer.

5.3 Involutions ¹

Les travaux de Desargues n'ont pas été bien accueillis de son vivant. Ce manque d'appréciation était peut-être dû à son style obscur; il a introduit environ soixante-dix nouveaux termes, dont seule l'involution a survécu. Selon sa définition, formulée en termes du concept non projectif de distance et du concept arithmétique de multiplication, une "involution" est la relation entre des paires de points sur une droite dont les distances à un point fixe ont un produit constant (positif ou négatif). Il aurait très bien pu ajouter "ou une somme constante". Une définition équivalente, n'utilisant pas de distances, a été donnée par von Staudt : une involution est une projectivité de période deux, c'est-à-dire une projectivité qui intervertit des paires de points. Il est remarquable que cette relation

$$XX' \overline{\wedge} X'X$$

est valable pour toutes les positions de X si elle est valable pour une position quelconque :

5.31 Toute projectivité qui intervertit deux points distincts est une involution.

Preuve. Soit $X \overline{\wedge} X'$ la projectivité donnée qui intervertit deux points distincts A et A', de sorte que

$$AA'X \overline{\wedge} A'AX'$$

où X est un point arbitraire de la droite AA'. D'après le théorème 1.63, il existe une projectivité pour laquelle $AA'XX' \ \overline{\wedge}\ A'AX'X$. D'après le théorème fondamental 4.12, cette projectivité, qui intervertit X et X', est identique à la projectivité donnée. Puisque X a été choisi arbitrairement, la projectivité donnée est une involution.

Quatre points colinéaires A, A', B, B' déterminent une projectivité $AA'B \overline{\wedge} A'AB'$, que nous savons maintenant être une involution. Ainsi,

5.32 Une involution est déterminée par deux de ses paires.

Par conséquent, il est commode de noter l'involution $AA'B \overline{\wedge} A'AB'$ par

ou (A'A)(BB'), ou (BB')(AA'), et ainsi de suite. Cette notation reste valable lorsque B' coïncide avec B; autrement dit, l'involution $AA'B \ \overline{\wedge}\ A'AB$, pour laquelle B est invariant, peut être notée par

$$(AA')(BB)$$
.

Si (AD)(BE)(CF), comme dans la figure 2.4A, on peut combiner la projectivité $AECF \land BDCF$ de 5.11 avec l'involution (BD)(CF) pour obtenir

$$AECF \overline{\wedge} BDCF \overline{\wedge} DBFC$$
,

^{1.} p. 45 à 47.

qui montre qu'il existe une projectivité pour laquelle $AECF \overline{\wedge} DBFC$. Puisque cela intervertit C et F, il s'agit d'une involution, à savoir

$$(BE)(CF)$$
 ou $(CF)(AD)$ ou $(AD)(BE)$.

Ainsi, la relation quadrangulaire (AD)(BE)(CF) équivaut à affirmer que la projectivité $ABC \overline{\wedge} DEF$ est une involution, ou que

$$ABCDEF \overline{\wedge} DEFABC.$$

Autrement dit,

5.33 Les trois paires de côtés opposés d'un quadrangle complet rencontrent une droite quelconque (ne passant pas par un sommet) dans trois paires d'une involution. Inversement, trois points colinéaires, avec leurs homologues dans une involution, forment un ensemble quadrangulaire.

Il s'ensuit que la construction de F, lorsque A, B, C, D, E sont donnés (comme dans le préambule de 2.41), peut être considérée comme une construction du conjugué de C dans l'involution (AD)(BE). (Voir Figure 2.4A ou 5.1A)

Nous avons vu que CF est un couple de l'involution (AD)(BE) si et seulement si $AECF \overline{\wedge} BDCF$. Il faut s'habituer à utiliser d'autres lettres dans le même contexte. Par exemple, MN est un couple de l'involution (AB')(BA') si et seulement si $AA'MN \overline{\wedge} BB'MN$. Puisque (AB')(BA') est identique à (AB')(A'B), il s'ensuit que les deux énoncés

$$AA'MN \overline{\wedge} BB'MN$$
 et $ABMN \overline{\wedge} A'A'MN$

sont équivalents (remarque : seuls les énoncés sont équivalents : les deux projectivités sont, bien sûr, distinctes).

Si deux involutions, (AA')(BB') et $(AA_1)(BB_1)$, ont une paire commune MN, on en déduit

$$A'B'MN \overline{\wedge} BAMN \overline{\wedge} A_1B_1MN.$$

Par conséquent

5.34 Si MN est un couple de chacune des involutions (AA')(BB') et $(AA_1)(BB_1)$, il est aussi un couple de $(A'B_1)(B'A_1)$.

Tous ces résultats restent valables lorsque M et N coïncident, de sorte que nous avons affaire à des projectivités paraboliques (au lieu d'hyperboliques). Ainsi, M est un point invariant de l'involution (AB')(BA') si et seulement si $AA'MM \ \overline{\wedge} \ BB'MM$, c'est-à-dire si et seulement si $ABMM \ \overline{\wedge} \ A'B'MM$; et si M est un point invariant de chacune des involutions (AA')(BB') et $(AA_1)(BB_1)$, il est également un point invariant de $(A'B_1)(B'A_1)$.

Si deux involutions ont une paire commune MN, leur produit est évidemment hyperbolique, avec des points invariants M et N. En effet, en observant leur effet sur A, M, N tour à tour, nous voyons que le produit de (AB)(MN) et (BC)(MN) est $AMN \overline{\wedge} CMN$. Plus intéressant encore,

5.35 Toute projectivité unidimensionnelle peut être exprimée comme le produit de deux involutions.

Preuve. Soit la projectivité donnée $ABC \overline{\wedge} A'B'C'$, où ni A ni B ne sont invariants. En observant l'évolution de A, B, C, on constate que cette projectivité a le même effet que le produit des deux involutions

$$(AB')(BA')$$
 et $(A'B')(C'D)$,

où D est le correspondant de C dans (AB')(BA'). (J. L. Coolidge, A Treatise on the Circle and the Sphere, Clarendon Press, Oxford, 1916, p. 200.)