

Quelques transcriptions en $\text{\LaTeX}$ ou traductions d'articles ou d'extraits de livres au sujet de la notion d'involution

Sur les involutions d'espèce quelconque

Max Genty

1. M. Guccia définit, dans ses *Leçons de Géométrie supérieure*, les involutions de degré n et d'espèce k . Une pareille involution, qu'il désigne par le symbole I_n^k , est une série linéaire k fois indéterminée de groupes de n points pris sur une droite ou sur une courbe unicursale donnée ; c'est-à-dire, telle que k points arbitraires de la droite ou de la courbe déterminent un groupe unique de n points appartenant à l'involution.

Analytiquement, une équation de la forme

$$\lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2 + \dots + \lambda_{k+1} U_{k+1} = 0,$$

dans laquelle les λ_i sont des paramètres arbitraires, et les U_i des polynômes de degré n par rapport à la variable t , au moyen de laquelle peuvent s'exprimer rationnellement les coordonnées de la courbe unicursale donnée, représente une involution de degré n et d'espèce k . Cette définition de l'involution I_n^k n'est autre que la traduction analytique de la définition géométrique donnée primitivement.

2. De la définition précédente, nous déduisons immédiatement qu'il existe une infinité de groupes d'une involution I_n^k possédant en un point donné un point multiple d'ordre $k' < k$. De plus, tous ces groupes appartiennent évidemment à une involution $I_{n-k'}^{k-k'}$, qui est dite *adjointe* au point multiple donné.

En particulier, un point donné considéré comme point multiple d'ordre k détermine un groupe unique de l'involution I_n^k . Nous voyons, d'après cela, qu'il doit exister un nombre fini de groupes d'une involution I_n^k possédant un point multiple d'ordre $k + 1$. Nous allons rechercher ce nombre, que nous désignerons par u_n^k .

3. Nous emploierons dans ce but une démonstration plus courte que celle de M. Guccia. Le seul lemme analytique auquel nous aurons recours, et qui nous servira pour toutes les démonstrations qui suivent, est le principe de correspondance de Chasles que nous énonçons une fois pour toutes :

Si deux séries de points X et Y se correspondent algébriquement, de telle sorte qu'à un point X correspondent β points Y et à un point Y , α points X , le nombre des coïncidences des points X et Y sera $\alpha + \beta$.

Soit A un point donné de la courbe unicursale. Ce point considéré comme point multiple d'ordre k détermine un groupe unique de l'involution I_n^k et, par conséquent, $n - k$ points M différents de A et appartenant à ce groupe. Il s'agit de déterminer, quand A parcourt la courbe donnée, le nombre des coïncidences du point A avec un des points M . Un des points M étant donné, les groupes de l'involution contenant ce point appartiennent à une involution I_{n-1}^{k-1} possédant u_{n-1}^{k-1} points multiples d'ordre k . Les points A et M se correspondent donc algébriquement entre eux, de telle façon qu'à un point A correspondent $n - k$ points M , et à un point M , u_{n-1}^{k-1} points A .

Donc, d'après le principe de correspondance de Chasles, le nombre des coïncidences du point A avec un des points M est $u_{n-1}^{k-1} + n - k$.

Nous avons donc l'équation de récurrence

$$u_n^k = u_{n-1}^{k-1} + n - k$$

qui, au moyen de l'équation initiale évidente

$$u_{n-k}^0 = n - k$$

nous donne

$$u_n^k = (k+1)(n-k).$$

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME 1. *Dans une involution de degré n et d'espèce k , il existe $(k+1)(n-k)$ groupes possédant un point multiple d'ordre $k+1$.*

4. Nous allons maintenant démontrer que, si $n \geq 2k$, il existe un nombre fini de groupes d'une involution I_n^k possédant k points doubles et nous allons rechercher ce nombre que nous désignerons par ν_n^k . Soit A un point donné ; les groupes de l'involution contenant ce point appartiennent à une involution I_{n-1}^{k-1} . Il existe ν_{n-1}^{k-1} groupes de cette dernière involution possédant $k-1$ points doubles. En dehors de ces points doubles et du point A , tous ces groupes déterminent $\nu_{n-1}^{k-1}(n-2k+1)$ points M correspondants à A , et il s'agit de déterminer le nombre des coïncidences du point A avec un des points M . Or, rien ne différenciant le point A des points M , à un point M correspondent également $\nu_{n-1}^{k-1}(n-2k+1)$ points A . Donc le nombre des coïncidences est

$$2\nu_{n-1}^{k-1}(n-2k+1).$$

Chacune de ces coïncidences fournit un groupe de l'involution I_n^k possédant k points doubles.

Mais on voit facilement que nous obtiendrons k fois le même groupe en faisant coïncider successivement le point A avec chacun des k points doubles. Nous avons donc, en définitive, l'équation de récurrence suivante

$$\nu_n^k = \frac{2}{k} \nu_{n-1}^{k-1}(n-2k+1),$$

qui, avec l'équation initiale

$$\nu_{n-k+1}^1 = 2(n-k),$$

donne

$$\nu_n^k = \frac{2^k(n-k)!}{k!(n-2k)!}.$$

Nous avons donc l'énoncé suivant :

THÉORÈME II. *Dans toute involution de degré n et d'espèce k , si $n \geq 2k$, il existe $\frac{2^k(n-k)!}{k!(n-2k)!}$ groupes de cette involution possédant k points doubles.*

Ce théorème a été démontré par M. Émil Weyr, et M. Guccia l'énonce sans en donner de démonstration.

5. Nous allons continuer dans le même ordre d'idées et démontrer qu'il existe un nombre fini de groupes d'une involution I_n^k possédant deux points multiples d'ordres respectivement égaux à $k' + 1$ et $k - k' + 1$, k' étant un nombre quelconque plus petit que k .

Appelons X_1 le nombre cherché; les groupes de I_n^k ayant en un point donné A un point multiple d'ordre h' appartiennent à une involution $I_{n-k'}^{k-k'}$. Il existe $(k - k' + 1)(n - k)$ groupes de cette involution possédant un point multiple d'ordre $k - k' + 1$. En dehors de ces points multiples et du point A , tous ces groupes déterminent donc $(k - k' + 1)(n - k)(n - k - 1)$ points M qui correspondent au point A . Il s'agit de déterminer le nombre des coïncidences du point A avec les points M . Or le point M étant donné, les groupes de I_n^k contenant ce point appartiennent à une involution I_{n-1}^{k-1} , et il existe un nombre X_2 de groupes de cette involution possédant deux points multiples d'ordres respectivement égaux à k' et $k - k' + 1$.

Donc, d'après le principe de correspondance de Chasles, nous avons

$$X_1 = (n - k)(n - k - 1)(k - k' + 1) + X_2$$

Nous obtiendrons, par des raisonnements analogues,

$$X_2 = (n - k)(n - k - 1)(k - k' + 1) + X_3$$

X_3 étant le nombre des groupes d'une involution I_{n-2}^{k-2} possédant deux points multiples d'ordres $k' - 1$ et $k - k' + 1$. Nous arriverons successivement ainsi à l'équation finale

$$X_{k'+1} = (n - k)(n - k - 1)(k - k' + 1)$$

car $X_{k'+1}$ n'est autre que le nombre des combinaisons des groupes d'une involution possédant un point simple et un point multiple d'ordre $k - k' + 1$. Nous déduirons donc, par addition des équations précédentes,

$$X_1 = (k' + 1)(k - k' + 1)(n - k)(n - k - 1)$$

Nous avons, par suite, cette proposition :

THÉORÈME III. *Dans une involution de degré n et d'espèce k , il existe*

$$(k' + 1)(k - k' + 1)(n - k)(n - k - 1)$$

groupes possédant deux points multiples d'ordres respectivement égaux à $k' + 1$ et $k - k' + 1$.

6. Si nous appliquons le théorème 1 à l'involution particulière I_n^{n-1} , nous en déduisons qu'une pareille involution a n points multiples d'ordre n . Représentons par $t_1, t_2, \dots, t_n$ les n valeurs du paramètre t qui correspondent aux n points de l'involution I_n^{n-1} , et désignons, pour abrégé, par $[t]^n, [t]^{n-1}, [t]^{n-2}, \dots$ la somme des produits n à n , $n - 1$ à $n - 1$, $n - 2$ à $n - 2$, $\dots$ de ces n quantités t_i . On voit facilement que l'involution I_n^{n-1} pourra être représentée par une équation de la forme

$$A_0[t]^n + A_1[t]^{n-1} + \dots + A_{n-1}[t]^1 + A_n = 0. \quad (1)$$

Les valeurs de t qui correspondent aux n points multiples s'obtiendront en faisant, dans l'équation (1),

$$t_1 = t_2 = \dots = t_n = z.$$

Ces n valeurs de t sont donc les racines de l'équation

$$A_0 z^n + C_n^1 A_1 z^{n-1} + \dots + C_n^{n-1} A_{n-1} z + A_n = 0, \quad (2)$$

C_n^i représentant le nombre des combinaisons de n objets i à i . Soient $z_1, z_2, \dots, z_n$ les racines de l'équation (2); en prenant pour les quantités z_i les mêmes notations que pour les quantités t_i , nous tirons de l'équation précédente

$$\begin{aligned} A_0 [z]^1 &= -C_n^1 A_1, \\ A_0 [z]^2 &= C_n^2 A_2, \\ \dots\dots\dots &\dots\dots\dots, \\ A_0 [z]^{n-1} &= (-1)^{n-1} C_n^{n-1} A_{n-1}, \\ A_0 [z]^n &= (-1)^n A_n. \end{aligned}$$

Remplaçons, dans le premier membre de l'équation (1), les quantités $[t]^i$ par les $[z]^i$ correspondants; nous obtenons, au facteur A_0 près,

$$A_0 [(-1)^n A_0 A_n + (-1)^{n-1} A_1 A_{n-1} + \dots - C_n^1 A_1 A_{n-1} + A_0 A_n].$$

Cette expression s'annule identiquement dans le cas où n est impair; nous obtenons donc le théorème suivant :

THÉORÈME IV. *Toute involution d'ordre n et d'espèce $n - 1$ présente n points multiples d'ordre n . Dans le cas où n est impair, ces points multiples appartiennent à un même groupe de l'involution.*

M. Appell a démontré ce théorème dans le cas de $n = 3$ et il l'a appliqué fort élégamment à la recherche des propriétés polaires des cubiques gauches. On conçoit que le théorème IV puisse conduire à un grand nombre de propriétés géométriques.

Prenons, par exemple, une conique Γ et un point A de cette courbe. Tous les cercles passant par ce point ont, en commun avec Γ , trois points M , autres que A , formant évidemment une involution I_3^2 . Appliquons à cette involution le théorème IV; nous en déduisons la propriété suivante qui est bien connue :

Par un point A d'une conique Γ , on peut mener à cette courbe trois cercles osculateurs dont les points de contact M_1, M_2, M_3 sont différents de A . Ces trois points sont situés avec le point A sur un même cercle.

7. Les théorèmes que nous venons de démontrer dans les paragraphes précédents permettent de déterminer immédiatement le nombre des surfaces algébriques de degré donné soumises à des conditions déterminées et ayant, avec une courbe gauche unicursale donnée, un contact d'ordre supérieur..

Soit une courbe gauche unicursale de C_n de degré n . Le théorème I nous donne les nombres suivants :

Nombre de plans tangents menés à C_n par une droite donnée D :

$$2(n - 1).$$

Si la droite D a r points communs avec C_n , le nombre précédent doit être diminué de $2r$.

Nombre de plans osculateurs menés à C_n par un point donné P :

$$3(n - 2).$$

Si le point P est un point multiple d'ordre r de la courbe C_n , le nombre précédent doit être diminué de $3r$.

Nombre de plans surosculateurs à la courbe C_n :

$$4(n - 3).$$

Nombre de sphères osculatrices à C_n et passant par un point donné P :

$$4(2n - 3).$$

Si le point P est un point multiple d'ordre r de C_n , le nombre précédent doit être diminué de $4r$.

Nombre de sphères surosculatrices à C_n :

$$5(2n - 4).$$

Le théorème II nous conduira également, et avec autant de facilité, aux nombres suivants :

Nombre de plans tritangents à une courbe C_n :

$$\frac{4}{3}(n - 3)(n - 4)(n - 5).$$

Nombre de sphères quadritangentes à C :

$$\frac{2}{3}(2n - 4)(2n - 5)(2n - 6)(2n - 7).$$

Enfin, le théorème III nous conduira, de la même façon, aux nombres suivants :

Nombre de plans à la fois osculateurs et tangents à C_n :

$$6(n - 3)(n - 4).$$

Nombre de sphères à la fois osculatrices et tangentes à C_n :

$$8(2n - 4)(2n - 5).$$

Nous arrêtons cette énumération un peu longue, en faisant remarquer avec quelle facilité la méthode que nous venons de donner permet d'arriver à la détermination de ces nombres.

Sur la structure des points unis d'une involution appartenant à la surface des couples de points d'une courbe algébrique

Lucien Godeaux
Membre de l'Académie

Résumé. Si la surface F représente les couples de points d'une courbe algébrique L contenant une involution cyclique γ_p d'ordre premier impair p , il existe sur F une involution cyclique I_p d'ordre p . À un point uni de γ_p compté deux fois correspond un point uni de I_p . On démontre qu'à ce point est infiniment voisin un point uni de première espèce.

Dans des notes récentes¹, nous avons considéré l'involution cyclique I_p , d'ordre premier impair p , appartenant à la surface F représentant les couples de points non ordonnés d'une courbe algébrique L contenant une involution cyclique γ_p d'ordre p . Nous nous étions attaché, dans les deux dernières notes citées, à déterminer la structure des points unis de l'involution I_p ; nous avons partagé ceux-ci en trois catégories. Dans cette note, nous allons complètement déterminer la structure des points unis de la troisième catégorie.

D'une manière précise, si V' est un point uni de γ_p , à ce point compté deux fois correspond sur F un point uni U de l'involution I_p . Ce point U est uni de seconde espèce. Nous démontrons qu'il possède, dans son domaine du premier ordre, un point uni de première espèce².

Ajoutons que dans nos notes citées, nous avons supposé que l'involution γ_p était irrationnelle; nous laissons actuellement tomber cette hypothèse.

1. Rappelons brièvement la construction de l'involution I_p . Soient L une courbe algébrique de genre π contenant une involution cyclique γ_p d'ordre premier impair. Désignons par F la surface qui représente les couples de points non ordonnés de la courbe L . Un point P de F représente un couple de points P_1, P_2 de L . La transformation birationnelle de L en soi, génératrice de γ_p fait correspondre à P_1, P_2 , deux points P'_1, P'_2 , représentés par un point P' de F . Le point P' est rationnellement déterminé par le point P et il existe donc une transformation birationnelle T de F en soi, faisant passer de P à P' . Cette transformation a la période p et engendre sur F une involution I_p d'ordre p .

Par hypothèse, p est impair, donc I_p possède un nombre fini de points unis; ce sont les points qui représentent les couples de points unis, distincts ou non, de l'involution γ_p .

Référence : Godeaux Lucien, *Sur la structure des points unis d'une involution appartenant à la surface des couples de points d'une courbe algébrique*, Bulletin de la Classe des sciences, tome 36, 1950. pp. 383-387.

https://www.persee.fr/doc/barb_0001-4141_1950_num_36_1_70379.

Traduction : Denise Vella-Chemla, assistée des outils Google traduction, octobre 2025.

1. *Sulla costruzione di certe superficie algebriche irregolari* (RENDICONTI ACCAD. NAZ. DEI LINCEI, juin 1949, p. 694-696); *Applications de la théorie des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (COLLOQUE DE GÉOMÉTRIE ALGÈBRIQUE DE LIÈGE, 1949, p. 117-195); *Involutions irrégulières appartenant à la surface des couples de points d'une courbe algébrique* (BULL. DE L'ACAD. ROY. DE BELGIQUE, 1950, p. 102-112).

2. Un point uni isolé d'une involution exclique est de première espèce et tous les points de son domaine du premier ordre sont unis; il est de seconde espèce dans le cas contraire.

En particulier, si U' est un point uni de γ_p , le point U de F qui représente le point U' compté deux fois, est un point uni de I_p . Ce sont ces points que nous étudierons ici.

2. Nous pouvons, sans restriction, supposer que la courbe L est gauche ; la surface F représente alors les bisécantes de la courbe.

Aux couples de points de L contenant un point fixe correspondent sur F les points d'une courbe K . On obtient ainsi sur F un système continu $\{K\}$, de degré un et d'indice deux.

Aux couples de points de L formés de deux points confondus correspondent sur F les points d'une courbe K_0 .

Les courbes K représentent les cônes circonscrits à L dont les sommets appartiennent à cette courbe. La courbe K_0 représente la développable circonscrite à L . Celle-ci étant l'enveloppe des cônes précédents, la courbe K_0 est l'enveloppe du système $\{K\}$. Une courbe K est donc tangente à la courbe K_0 au point qui représente le sommet, compté deux fois, du cône dont K est l'image.

Nous supposons dans la suite que L appartient à un espace S_r , où r peut être choisi aussi grand qu'on le veut. On obtiendra un modèle projectif de F en rapportant projectivement les complexes linéaires de droites de S_r , aux hyperplans d'un espace linéaire à $\binom{r}{2} - 1$ dimensions.

3. Soient U' un point de L uni pour l'involution γ_p , t la tangente en ce point à la courbe, U le point de K_0 qui représente le point U' compté deux fois et K_1 la courbe K passant par U et représentant donc le cône projetant L de U' . Les courbes K_0 et K_1 sont évidemment transformées en elles-mêmes par T et U est un point uni de I_p .

Les cordes de L s'appuyant sur un espace linéaire S_{r-2} rencontrant t en un point, formant une réglée représentée sur F par une courbe passant par U , cette courbe n'est pas en général transformée en soi par T , donc U est un point uni de seconde espèce.

Appelons U_1 le point infiniment voisin de U appartenant aux courbes K_0, K_1 ; ce point est uni pour l'involution I_p . Supposons qu'il soit un point uni de seconde espèce.

Dans cette hypothèse, l'involution I_p possède, dans le domaine du second ordre de U , deux points unis U_{11}, U_{12} , infiniment voisins de U_1 . La courbe K_0 étant unie pour T , doit passer par l'un des points U_{11}, U_{12} ; supposons qu'elle passe par le premier U_{11} . La courbe K_1 , qui est également transformée en soi par T et qui ne peut osculer K_0 en U , doit alors passer par le point U_{12} .

Le point U étant simple pour chacune des courbes K_0, K_1 est, sur chacune de celles-ci, l'origine d'une branche linéaire. Or, il résulte de la théorie des points unis isolés des involutions cycliques³, que si U_{11} se trouve sur une branche linéaire d'origine U , le point U_{12} se trouve sur une branche su-

3. Voir nos notes *Sur les points de diramation des surfaces multiples* (BULL. DE L'ACAD. ROY. DE BELGIQUE, 1949, p. 15-30, 270-284, 285-292, 532-541, 636-641, 828-833, 837-840) ; *Osservazioni sui punti uniti delle involuzioni cicliche appartenenti ad una superficie algebrica* (en cours d'impression dans les RENDICONTI DEL SEMINARIO MATEMATICO DI ROMA).

perlinéaire, et inversement. Nous parvenons donc à une contradiction et les courbes K_0, K_1 doivent passer soit par U_{11} , soit par U_{12} . Elles s'oscüleraient alors en U , ce qui est impossible. On en conclut que le point U_1 est uni de première espèce pour l'involution I_p .

Nous avons déterminé la structure des points unis U possédant un point uni de première espèce dans son domaine du premier ordre. Si nous posons $p = 2\nu + 1$, il existe une suite de ν points unis infiniment voisins successifs de U , dont le premier est distinct de U_1 , et dont le dernier est uni de première espèce, les autres étant unis de seconde espèce⁴.

4. Nous allons maintenant, en utilisant le résultat qui vient d'être obtenu, faire une remarque sur le n° 6 de notre note citée plus haut, parue dans le Bulletin de février 1950 de l'Académie. Nous conservons les notations de ce travail. Nous avons considéré un point uni U'_i de γ_p et supposé que la tangente t_i à L en ce point coupe en P_i l'espace σ_j . Le point U'_i appartient à l'espace σ_h et σ_j, σ_h sont deux axes de l'homographie τ engendrant γ_p sur L . On suppose que cette courbe est la courbe canonique, d'ordre $2\pi - 2$ de $S_{\pi-1}$. Désignons par ξ le plan osculateur à la courbe L au point U'_1 . D'après ce que nous avons vu, la droite passant par U'_1 , infiniment voisine de t_i dans ξ est unie pour l'homographie τ . Ce résultat est obtenu si le plan ξ rencontre l'axe σ_j de τ suivant une droite, car τ détermine alors dans ξ une homologie de centre U'_i . Supposons qu'il n'en soit pas ainsi ; le plan ξ s'appuie sur un troisième axe σ_k de τ . Si P'_i est le point d'appui, τ détermine dans ξ une homographie non homologique ayant pour points unis U'_i, P_i, P'_i . Pour notre objet, le point infiniment voisin de P_i sur la droite $P_i P'_i$ doit être uni de première espèce pour cette homographie.

Rapportons le plan ξ au triangle $U'_i P_i P'_i$ et soient $(1, 0, 0)$ les coordonnées de P_i , $(0, 1, 0)$ celles de P'_i et $(0, 0, 1)$ celles de U'_i . Nous avons attaché aux espaces $\sigma_h, \sigma_j, \sigma_k$ les nombres $\epsilon^h, \epsilon^j, \epsilon^k$, où ϵ est une racine primitive d'ordre p de l'unité. L'homographie déterminée par τ dans ξ a donc comme équations

$$x'_1 : x'_2 : x'_3 = \epsilon^j x_1 : \epsilon^k x_2 : \epsilon^h x_3,$$

ou encore

$$x'_1 : x'_2 : x'_3 = x_1 : \epsilon^{k+p-j} x_2 : \sigma^{h+p-j} x_3. \quad (3)$$

Pour que le point infiniment voisin de P_i sur la droite $x_3 = 0$ soit uni de première espèce pour l'homographie (1), il faut et il suffit que l'on ait

$$h + p - j = 2(k + p - i) \pmod{p}.$$

LIÈGE, LE 10 AVRIL 1950.

4. *Recherches sur les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (BULL. DE L'ACAD. ROY. DE BELGIQUE, 1930, p. 450-467).