

# Les pavages d’Ammann-Beenker revisités

Nicolas Bédardie, Thomas Fernique

**Résumé :** Cet article introduit deux tuiles dont les pavages forment une famille de pavages à un paramètre qui peuvent également être vus comme la numérisation de plans en deux dimensions dans le plan euclidien à 4 dimensions. Cette famille contient les pavages d’Ammann-Beenker comme solutions d’un problème simple d’optimisation.

## 1 Introduction

Ayant décidé de carrelé votre salle-de-bains ce week-end, vous vous rendez dans votre magasin de bricolage favori. Là, vous voyez une offre particulièrement inhabituelle sur deux tuiles étrangement crantées (Fig. 1): “Payez les carrés cash et on vous offre le losange !”

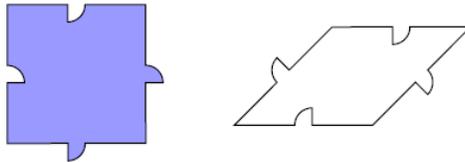


Figure 1: Deux tuiles crantées.

Craignant que ça ne soit une escroquerie, vous essayez d’imaginer comment vous pourriez carrelé votre salle-de-bains à moindre coût. Après une réflexion attentive, vous voyez que les pavages possibles sont exactement ceux dans lesquels deux losanges adjacents ou connectés par des carrés alignés ont des orientations différentes (voir Fig. 2). En particulier, les losanges seuls ne permettent pas de paver, et vous devriez donc acheter quelques carrés. Vous pourriez bien sûr n’utiliser que des carrés seuls, mais alors vous rateriez l’offre !

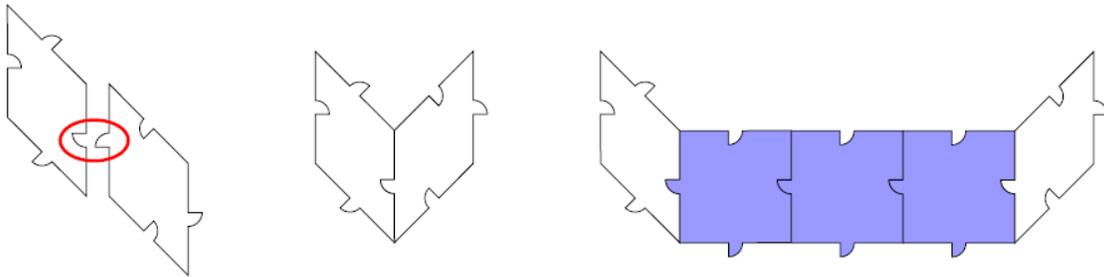


Figure 2: Deux losanges ne s’emboîtent que s’ils ont des orientations différentes. Cela continuera de marcher avec des carrés alignés entre eux, puisque ceux-ci ne font que transporter les entailles.

---

Nicolas Bédardie, LATP, Univ. Aix-Marseille, Thomas Fernique, LIPN, CNRS & Univ. Paris 13.  
Traduction Denise Vella-Chemla, octobre 2022, de l’article arxiv : 1208.3545.

On va montrer que la façon la moins chère (sinon la plus simple) de carrelé la salle de bains est de former un pavage non périodique, notamment un *pavage d’Ammann-Beenker*. De plus, on montrera que l’ensemble de tous les pavages possibles forment une famille de pavages à un paramètre qui peuvent toutes être vues comme les numérisations de plans à deux dimensions dans le plan euclidien à 4 dimensions. La figure 3 dépeint quelques pavages possibles, avec le pavage d’Ammann-Beenker tout à fait à droite.

Cela n’est pas seulement intéressant pour le carrelage des salles de bains, mais cela fournira un nouvel aperçu de la théorie des quasi-cristaux. En effet, la numérisation des plans irrationnels dans des espaces de dimension plus grande (également appelée *pavages de projection*) sont un modèle commun de quasi-cristaux, et les résultats ci-dessus donnent un exemple de la façon dont des contraintes locales très simples peuvent renforcer un ordre à plus grande distance, avec la non-périodicité provenant simplement des proportions des tuiles. En particulier, des variations légères dans les proportions des tuiles autour de celles d’un pavage non périodique peuvent amener à des pavages périodiques qui en seraient proches, ceci rappelant les approximations des quasi-cristaux.

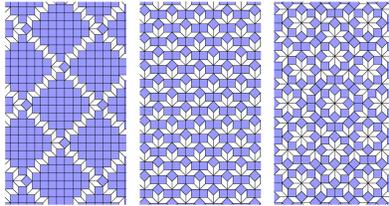


Figure 3: Trois pavages différents (les entailles ne sont pas dessinées).

La suite de cet article s’organise comme suit. La section 2 rappelle brièvement l’histoire des pavages d’Ammann-Beenker. Les sections 3 et 4 introduisent les notions principales, la section 5 établit une connexion simple mais puissante avec les résultats classiques de la géométrie algébrique, et la partie technique de notre preuve est exposée dans la section 6. On conclut en section 7 en établissant formellement notre résultat principal (le théorème 7).

## 2 Pavages d’Ammann-Beenker

Les pavages d’Ammann-Beenker sont des pavages non-périodiques du plan par un carré et un losange à angle de  $45^\circ$ . Présentant une 8-symétrie (locale), ils sont devenus un modèle populaire des 8-quasi-cristaux [8]. Ils ont été introduits par Ammann dans les années 1970 et Beenker en 1982, indépendamment et selon des points de vue différents.

D’un côté, Ammann a défini ces pavages comme ceux qui peuvent être fabriqués à partir de deux tuiles à entailles, et une tuile “clef”, avec une non-périodicité découlant de la structure hiérarchique contrainte par les entailles. On peut comparer cela à la première (et concomitante) définition des pavages de Penrose [7].

D’un autre côté, suivant l’approche algébrique de de Bruijn pour les pavages de Penrose [2], Beenker a défini ces pavages, qu’il a appelés *grilles losanges*, comme les numérisations de plans

parallèles dans  $\mathbb{R}^4$ , avec la non périodicité découlant de l'irrationalité des pentes de ces plans [1]. Malheureusement, Beenker ignorait le travail du mathématicien amateur Ammann, il publia seulement quelques années plus tard [4], et il fut incapable de trouver des tuiles crantées qui ne peuvent permettre de former que ces seuls pavages. À la place, il introduisit les pavages que l'on peut faire avec des tuiles présentant l'entaille de la figure 1, appelés *losanges fléchés* et il démontra que leur ensemble contient strictement l'ensemble des pavages grilles losanges.

Pour conclure ce court aperçu, mentionnons que les pavages d'Ammann-Beenker ne peuvent pas être caractérisés par leurs motifs locaux, c'est-à-dire que, pour tout  $r \geq 0$ , il existe un pavage dont les motifs de rayon  $r$  apparaissent tous dans un pavage d'Ammann-Beenker mais qui n'est pas lui-même un pavage d'Ammann-Beenker [3]. Les entailles des tuiles doivent donc transporter une certaine information sur des distances arbitrairement longues !

### 3 Pavages octogonaux et planarité

Soient  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_4$  des vecteurs unitaires deux à deux non colinéaires du plan euclidien. On définit les six losanges  $\{\lambda\vec{v}_i + \mu\vec{v}_j \mid 0 \leq \lambda, \mu \leq 1\}$ , avec  $1 \leq i < j \leq 4$ , et on appelle *pavage octogonal* tout recouvrement du plan euclidien par des losanges translattés, dans lesquels les losanges peuvent s'intersecter seulement sur un sommet ou sur un côté complet (Fig. 3).

Soit  $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_4$  la base canonique de  $\mathbb{R}^4$ . Un *relèvement* d'un pavage octogonal s'obtient en envoyant ses losanges sur les faces d'hypercubes unité de  $\mathbb{Z}^4$  de telle façon que n'importe quels deux losanges adjacents le long de  $\vec{v}_k$  s'envoient sur deux faces unitaires adjacentes le long de  $\vec{e}_k$ . On obtient une surface en deux dimensions de  $\mathbb{R}^4$  qui est définie de manière unique à translation près.

Un pavage octogonal est dit *planaire* s'il y a un plan en 2 dimensions  $E \subset \mathbb{R}^4$  et  $t \geq 1$  tel qu'on puisse le relever dans la "tranche"  $E + [0, t]^4$ . Le plan  $E$  est appelé sa *pente* et la plus petite pente convenable  $t$  est appelée son *épaisseur* (toutes deux sont uniques). Un pavage octogonal planaire peut être vu comme une numérisation de sa pente.

Par exemple, les pavages d'Ammann-Beenker sont les pavages planaires octogonaux d'épaisseur 1 dont la pente est générée par  $(\cos \frac{k\pi}{4})_{0 \leq k < 4}$  et  $(\sin \frac{k\pi}{4})_{0 \leq k < 4}$ .

Les pavages planaires octogonaux forment une sous-classe de la classe des pavages dits *pavages de projection*. Ceux d'épaisseur 1 sont périodiques pour une pente rationnelle, *quasi-périodiques* sinon, *i.e.*, n'importe quel motif de rayon  $r$  qui apparaît quelque part dans un pavage réapparaît dans ce pavage à une distance uniformément bornée par  $r$ . Cet ordre parfait s'affaiblit quand l'épaisseur augmente, mais l'ordre à longue distance persiste néanmoins.

### 4 Ombres et sous-périodes

La  $k$ -ième ombre d'un pavage octogonal est la projection orthogonale de son relèvement le long de  $\vec{e}_k$ . Formellement, la  $k$ -ième ombre est un relèvement d'un pavage octogonal, *i.e.* une surface

deux-dimensionnelle de  $\mathbb{R}^4$ , mais puisqu'elle ne contient pas de face unité avec comme côté  $\vec{e}_k$ , il peut ˆetre pratique de la voir comme une surface deux-dimensionnelle de  $\mathbb{R}^3$ .

Une *période* d'une ombre est un vecteur de translation laissant l'ombre invariante. Les *sous-périodes* d'un pavage octogonal sont les périodes de ses ombres.

La figure 4 montre les quatre ombres du pavage de la figure 3 : elles sont périodiques. Effectivement, l'alternance des orientations des losanges dans ces pavages, discutée dans l'introduction, renforce précisément une période pour chaque ombre. Formellement, on vérifie qu'avec  $\vec{v}_k = e^{i\frac{k\pi}{4}}$  (en notation complexe) pour  $1 \leq k \leq 4$ , la  $k$ -ième ombre de tout tel pavage admet une période  $\vec{p}_k$  définie par

$$\vec{p}_1 = \vec{e}_2 - \vec{e}_4, \quad \vec{p}_2 = \vec{e}_1 + \vec{e}_3, \quad \vec{p}_3 = \vec{e}_2 + \vec{e}_4, \quad \vec{p}_4 = \vec{e}_1 - \vec{e}_3.$$

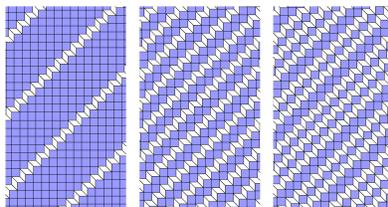


Figure 4: Ombres du pavage défini sur la figure 3.

## 5 Coordonnées de Grassmann et relations de Plücker

D'abord, rappelons (voir *e.g.*, [5], chap. 7) qu'un plan deux-dimensionnel  $E$  de  $\mathbb{R}^4$  engendr e par  $(u_1, u_2, u_3, u_4)$  et  $(v_1, v_2, v_3, v_4)$  a pour *coordonnées de Grassmann* les nombres  $G_{ij} = u_i v_j - u_j v_i$ ,  $1 \leq i < j \leq 4$ . Ces coordonnées sont unique à une constante multiplicative commune près ; on écrit  $E = (G_{12}, G_{13}, G_{14}, G_{23}, G_{24}, G_{34})$ . Inversement, tous les  $G_{ij}$  non tous nuls sont les coordonnées de Grassmann d'un certain plan deux-dimensionnel de  $\mathbb{R}^4$  si et seulement s'ils satisfont la *relation de Plücker*

$$G_{12}G_{34} = G_{13}G_{24} - G_{14}G_{23}.$$

Alors, il n'est pas difficile de voir que si la  $l$ -ième ombre d'un pavage octogonal planaire de pente  $E$  admet une période  $(p, q, r)$ , alors les coordonnées de Grassmann satisfont

$$pG_{jk} - qG_{ik} + rG_{ij} = 0,$$

où  $l \notin \{i, j, k\}$ . En effet, si  $E$  est engendr e par  $(u_1, u_2, u_3, u_4)$  et  $(v_1, v_2, v_3, v_4)$ , alors la  $l$ -ième ombre peut ˆetre vue comme la numérisation du plan de  $\mathbb{R}^3$  engendr e par  $(u_i, u_j, u_k)$  et  $(v_i, v_j, v_k)$ . Si  $(p, q, r)$  est une période de ce plan, il appartient à ce plan et a ainsi un produit tensoriel nul avec le vecteur  $(G_{jk}, -G_{ik}, G_{ij})$ .

On peut aussi utiliser des ombres pour montrer que dans tout pavage planaire octogonal de pente  $E$ , le ratio entre les proportions de pavage de côtés  $\vec{v}_i$  et  $\vec{v}_j$  et ceux de côtés  $\vec{v}_k$  et  $\vec{v}_l$  est  $|G_{ij}/G_{kl}|$ .

Maintenant, considérons un pavage par les tuiles de la figure 1 : il est octogonal à entaillement près. Si on suppose qu'il est planaire, alors ses sous-périodes amènent

$$G_{23} = G_{34}, \quad G_{14} = G_{34}, \quad G_{12} = G_{14}, \quad G_{12} = G_{23},$$

et en faisant entrer cela dans la relation de Plücker, un calcul court montre que la pente doit être l'un des plans

$$E_0 := (0, 0, 0, 0, 1, 0), \quad E_{t \neq 0} := (1, t, 1, 1, 2/t, 1), \quad E_\infty := (0, 1, 0, 0, 0, 0).$$

Inversement, tout pavage octogonal planaire avec l'une de ces pentes et épaisseur satisfait l'alternance des orientations des losanges (deux losanges avec la même orientation ne peuvent s'emboîter), et peut donc être pavé par les tuiles de la figure 1.

Par exemple, les pavages de la figure 3 ont pour pente respective  $E_{1/4}$ ,  $E_1$  et  $E_{\sqrt{2}}$ . Dans le dernier cas, qui est un pavage d'Ammann-Beenker, il y a donc  $\sqrt{2}$  losanges pour chaque carré (puisque la surface du carré est  $\sqrt{2}$  fois plus grande que celle du losange, chaque tuile couvre exactement la moitié du plan). Les pavages par des carrés ont seulement pour pente  $E_0$  ou  $E_\infty$ .

Pourtant, rien n'assure encore la planarité des pavages par les tuiles de la figure 1 !

## 6 Planarité

**Lemme 1 :** Les tuiles de la figure 1 forment seulement des pavages planaires d'épaisseur uniformément bornée.

*Preuve :* Soit  $E := E_{\sqrt{2}}$ . On vérifie que la projection orthogonale des  $\vec{e}_i$  sur  $E$  sont des vecteurs deux à deux non colinéaires. Identifions  $E$  avec le plan euclidien deux-dimensionnel et les projections ci-dessus (à remise à l'échelle près) avec les  $\vec{v}_i$  qui définissent les tuiles, de telle façon que la projection orthogonale sur  $E$  soit un homéomorphisme de tout relèvement de n'importe quel pavage du plan euclidien par ces tuiles sur  $E$ . Soit  $\mathcal{T}$  un tel pavage et  $\mathcal{S}$  un de ses relèvements. Définissons

$$\vec{q}_1 = \vec{p}_1 + \sqrt{2}\vec{e}_1, \quad \vec{q}_2 = \vec{p}_2 + \sqrt{2}\vec{e}_2, \quad \vec{q}_3 = \vec{p}_3 + \sqrt{2}\vec{e}_3, \quad \vec{q}_4 = \vec{p}_4 - \sqrt{2}\vec{e}_4.$$

Ce sont des vecteurs deux à deux non colinéaires de  $E$ . Soit également  $\vec{r}_i$  obtenu en changeant  $\sqrt{2}$  en  $-\sqrt{2}$  dans  $\vec{q}_i$ . Les  $\vec{r}_i$  sont des vecteurs deux à deux non colinéaires de  $E' := E_{-\sqrt{2}}$ . On vérifie que  $E$  et  $E'$  sont des plans orthogonaux, de telle façon qu'il existe deux fonctions réelles  $z_1$  et  $z_2$  définies sur  $E$  telles que le relèvement  $\mathcal{S}$  est l'image de  $E$  par

$$\rho : \vec{x} \mapsto \vec{x} + z_1(\vec{x})\vec{r}_1 + z_2(\vec{x})\vec{r}_2.$$

Montrons que les sous-périodes de  $\mathcal{T}$  forcent l'application  $\rho$  à être presque linéaire. Soit  $\pi_i$  la projection orthogonale le long de  $\vec{e}_i$ . On a  $\pi_i(\vec{q}_i) = \pi_i(\vec{r}_i) = \vec{p}_i$ . Pour tout  $\vec{x} \in E$ , le plan  $\pi_i(\vec{x} + E')$  intersecte l'ombre  $\pi_i(\mathcal{S})$  le long de la courbe

$$\mathcal{C}_i(\vec{x}) = \{\pi_i(\vec{x}) + z_1(\vec{x} + \lambda\vec{q}_i)\pi_i(\vec{r}_1) + z_2(\vec{x} + \lambda\vec{q}_i)\pi_i(\vec{r}_2) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Puisque à la fois  $\pi_i(\mathcal{S})$  et  $\pi_i(\vec{x} + E')$  sont  $\vec{p}_i$ -périodiques, il en est de même de  $\mathcal{C}_i(\vec{x})$ . En particulier, il reste à distance bornée d'une certaine droite de vecteur directeur  $\vec{p}_i$ . Comme  $i = 1$ , puisque  $\pi_1(\vec{r}_1) = \vec{p}_1$ , cela assure que  $\lambda \mapsto z_2(\vec{x} + \lambda\vec{q}_1)$  est uniformément borné. En d'autres termes,  $z_2$  a des fluctuations bornées dans la direction  $\vec{q}_1$ . De façon similaire, pour  $i = 2$ ,  $\pi_2(\vec{r}_2) = \vec{p}_2$  amène que  $z_1$  a des fluctuations bornées dans la direction  $\vec{q}_2$ . Pour  $i = 3$ , on calcule

$$\vec{p}_3 = -\pi_3(\vec{r}_1) - \sqrt{2}\pi_3(\vec{r}_2),$$

qui amène des fluctuations bornées pour  $z_2 - \sqrt{2}z_1$  dans la direction  $\vec{q}_3$ . Puisque  $\vec{q}_1$  et  $\vec{q}_2$  forment une base de  $E$ , utilisons  $z_i(\lambda, \mu)$  pour dénoter  $z_i(\lambda\vec{q}_1 + \mu\vec{q}_2)$ ,  $i \in \{1, 2\}$ , et écrivons  $f \equiv g$  si la différence entre deux fonctions  $f$  et  $g$  est uniformément bornée. Les fluctuations bornées de  $z_1$  et  $z_2$  dans les directions  $\vec{q}_1$  et  $\vec{q}_2$  amènent l'existence de fonctions réelles  $f$  et  $g$  telles que  $z_2(\lambda, \mu) \equiv f(\mu)$  et  $z_1(\lambda, \mu) \equiv g(\lambda)$ . De plus, puisque  $\vec{q}_3 = \sqrt{2}\vec{q}_2 - \vec{q}_1$ , les fluctuations bornées de  $z_2 - \sqrt{2}z_1$  dans la direction  $\vec{q}_3$  amènent l'existence d'une fonction réelle  $h$  telle que  $(z_2 - \sqrt{2}z_1)(\lambda, \mu) \equiv h(\sqrt{2}\mu - \lambda)$ . Ainsi

$$f(\mu) - \sqrt{2}g(\lambda) \equiv h(\sqrt{2}\mu - \lambda).$$

Fixons  $\lambda = 0$  pour obtenir  $f(\mu) \equiv h(\sqrt{2}\mu)$ . Fixons  $\mu = 0$  pour obtenir  $-\sqrt{2}g(\lambda) \equiv h(-\lambda)$ . Par conséquent,

$$h(\sqrt{2}\mu) + h(-\lambda) \equiv h(\sqrt{2}\mu - \lambda).$$

De ceci, il découle aisément que  $h$ , donc  $f$ ,  $g$ ,  $z_1$ ,  $z_2$  et  $\rho$ , sont linéaires (à fluctuations bornées près). Le pavage  $\mathcal{T}$  est donc planaire. L'épaisseur ( *i.e.*, les fluctuations de  $\rho$ ) est uniformément bornée parce que les relèvements sont lipschitzien avec une constante qui dépend seulement de  $E$ .  $\square$

## 7 Conclusion

Le théorème suivant résume les résultats obtenus dans les sections 5 et 6:

**Théorème 1 :** *Dans la figure 1, les tuiles ne peuvent former que des pavages planaires de pente dans  $\{E_t\}_{t \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}}$  et d'épaisseur uniformément bornée, et elles forment au moins les pavages dont l'épaisseur est égale à 1.*

De plus, les pavages d'Ammann-Beenker ont une pente qui maximise l'aire couverte par les losanges : ils fournissent la manière la plus économique de carreler votre salle de bains ! Faisons quelques remarques pour terminer. D'abord, bien que nous ayons seulement prouvé que l'épaisseur des tuiles de la figure 1 est uniformément bornée, on conjecture que l'épaisseur est 1, de telle façon qu'exactement tous les pavages puissent être réalisés. Deuxièmement, notons que parmi les pavages de la figure 1, les pavages d'Ammann-Beenker sont exactement (à l'épaisseur près) ceux dont la pente satisfait la relation  $G_{13} = G_{24}$ , *i.e.* ceux dans lesquels les carrés apparaissent avec la même fréquence dans leurs deux orientations possibles. Le résultat mentionné ci-dessus de la référence bibliographique [3] montre que cette relation, bien que simple, ne peut être forcée par des motifs locaux : quand  $t$  tend vers  $\sqrt{2}$ , les pavages de pente  $E_t$  et  $E_{\sqrt{2}}$  (et d'épaisseur 1) deviennent localement indistingables. Enfin, soulignons que, à notre connaissance, ceci est le premier exemple d'un ensemble fini de tuiles qui permet de n'obtenir que des pavages planaires, présentant un nombre

infini de pentes possibles.

**Remerciements :** Nous souhaiterions remercier Thang T. Q. Le de nous avoir envoyé la version non publiée [6], qui a inspiré la preuve du lemme 6.

### Références bibliographiques

- [1] F. P. M. Beenker, *Algebraic theory of non periodic tilings of the plane by two simple building blocks: a square and a rhombus*, TH Report 82-WSK-04 (1982), Technische Hogeschool, Eindhoven.
- [2] N. G. de Bruijn, *Algebraic theory of Penrose's nonperiodic tilings of the plane*, Nederl. Akad. Wetensch. Indag. Math. **43** (1981), pp. 39–66.
- [3] S. E. Burkov, *Absence of weak local rules for the planar quasicrystalline tiling with the 8-fold rotational symmetry*, Comm. Math. Phys. **119** (1988), pp. 667–675.
- [4] B. Grünbaum, G. C. Shephard, *Tilings and patterns*, Freeman, NY 1986.
- [5] W. V. D. Hodge, D. Pedoe, *Methods of algebraic geometry*, vol. 1, Cambridge University Press, Cambridge, 1984.
- [6] T. T. Q. Le, *Necessary conditions for the existence of local rules for quasicrystals*, preprint (1992).
- [7] R. Penrose, *The Role of aesthetics in pure and applied research*, Bull. Inst. Maths. Appl. **10** (1974).
- [8] N. Wang, H. Chen, K. Kuo, *Two-dimensional quasicrystal with eightfold rotational symmetry*, Phys Rev Lett. **59** (1987), pp. 1010–1013.