

Traduction de la Section 7.9 du livre de H. R. Edwards *Riemann's zeta function*, au sujet de la formule intégrale de Riemann-Siegel

7.9. La formule intégrale de Riemann-Siegel

En 1926, Bessel-Hagen a trouvé (selon Siegel [1]) dans les articles de Riemann une nouvelle représentation de la fonction zêta en termes d'intégrales définies. Naturellement, Siegel a inclus une explication de cette formule dans son exposé de 1932 sur les parties du Nachlass de Riemann relatives à la théorie analytique des nombres. Comme l'a indiqué Siegel, la formule est essentiellement

$$\frac{2\xi(s)}{s(s-1)} = F(s) + \overline{F(1-\bar{s})} \quad (1)$$

où F est définie par la formule

$$F(s) = \Pi\left(\frac{s}{2} - 1\right) \pi^{-s/2} \int_{0 \searrow 1} \frac{e^{-i\pi x^2} x^{-s} dx}{e^{i\pi x} - e^{-i\pi x}}$$

dans laquelle le symbole $0 \searrow 1$ signifie que le chemin d'intégration est une droite de pente -1 traversant l'axe réel entre 0 et 1 et dirigée du coin supérieur gauche vers le coin inférieur droit, et dans laquelle x^{-s} est défini sur le plan de la fente (à l'exclusion de 0 et des nombres réels négatifs) de la manière habituelle en prenant $\log x$ comme réel sur l'axe réel positif et en posant $x^{-s} = e^{-s \log x}$.

Puisque $\exp(-i\pi x^2)$ tend très rapidement vers zéro lorsque $|x| \rightarrow \infty$ le long de toute droite de la forme $0 \searrow 1$ et que l'intégrande est non singulière sur le plan de la fente, sauf pour les pôles simples aux entiers positifs, on voit facilement que $F(s)$ est une fonction analytique de s définie pour tout s , sauf peut-être pour $s = 0, -2, -4$ où le facteur précédent possède des pôles simples. [La formule (1), une fois démontrée, implique que $F(s)$ est analytique à $-2, -4, \dots$ et possède un pôle simple en 0.]

Siegel déduit la formule (1) d'une forme alternative de l'identité

$$e^{i\pi/8} e^{-2\pi i p^2} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{e^{iu^2/4\pi} e^{2\pi i u} du}{e^u - 1} = \frac{\cos 2\pi(p^2 - p - \frac{1}{16})}{\cos 2\pi p} \quad (2)$$

[formule (5) de la section 7.4]. Le changement de variable $u = 2\pi i w$ rend le chemin d'intégration Γ de la forme $0 \searrow 1$ mais avec l'orientation inversée, et rend l'identité elle-même de la forme

$$\int_{0 \searrow 1} \frac{e^{-i\pi w^2} e^{4\pi i p w} dw}{e^{2\pi i w} - 1} = -e^{-i\pi/8} e^{2\pi i p^2} \frac{\cos 2\pi(p^2 - p - \frac{1}{16})}{\cos 2\pi p}$$

qui avec $p = \frac{1}{2}(v + \frac{1}{2})$ peut être simplifié en posant $2p = v + \frac{1}{2}$, $4p^2 - 4p - \frac{1}{4} = (v + \frac{1}{2})^2 - 2(v + \frac{1}{2}) - 1/4 = v^2 - v - 1$ en

$$\begin{aligned} \int_{0 \searrow 1} \frac{e^{-i\pi w^2} e^{2\pi i[v+(1/2)]w} dw}{e^{i\pi w} (e^{i\pi w} - e^{-i\pi w})} &= -e^{-i\pi/8} e^{i\pi[v+(1/2)]^2/2} \frac{\cos[\pi(v^2 - v - 1)/2]}{\cos \pi(v + \frac{1}{2})} \\ &= -e^{i\pi v^2/2} e^{i\pi v/2} \frac{e^{i\pi(v^2-v-1)/2} + e^{-i\pi(v^2-v-1)/2}}{e^{i\pi[v+(1/2)]} + e^{-i\pi[v+(1/2)]}} \\ &= -\frac{e^{i\pi v^2} e^{-i\pi/2} + e^{i\pi v} e^{i\pi/2}}{e^{i\pi v} e^{i\pi/2} + e^{-i\pi v} e^{-i\pi/2}} \end{aligned}$$

et finalement

$$\int_{0 \searrow 1} \frac{e^{-i\pi w^2} e^{2\pi i v w} dw}{e^{i\pi w} - e^{-i\pi w}} = \frac{e^{i\pi v^2}}{e^{i\pi v} - e^{-i\pi v}} - \frac{1}{1 - e^{-2\pi i v}} \quad (3)$$

qui est la forme alternative de (2). Soit s un nombre réel négatif, multiplions les deux côtés de cette égalité par $v^{-s} dv$ et intégrons le long du rayon de $v = 0$ à $v = \infty i^{1/2}$. L'intégrale double de gauche converge absolument, l'ordre d'intégration peut donc être inversé. Puisque, par manipulation élémentaire d'intégrales définies,

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty i^{1/2}} v^{-s} e^{2\pi i v w} dv &= \int_0^{\infty w i^{-1/2}} \left(\frac{ix}{2\pi w} \right)^{1-s} e^{-x} d \log x \\ &= \left(\frac{i}{2\pi w} \right)^{1-s} \int_0^{\infty} x^{-s} e^{-x} dx \\ &= i e^{-i\pi s/2} (2\pi)^{s-1} w^{s-1} \Pi(-s) \end{aligned}$$

(pour w sur $0 \searrow 1$), il s'ensuit que le côté gauche devient

$$\int_0^{\infty i^{1/2}} \int_{0 \searrow 1} \frac{e^{-i\pi w^2} e^{2\pi i v w} v^{-s} dw dv}{e^{i\pi w} - e^{-i\pi w}} = i e^{-i\pi s/2} (2\pi)^{s-1} \Pi(-s) \int_{0 \searrow 1} \frac{e^{-i\pi w^2} w^{s-1} dw}{e^{i\pi w} - e^{-i\pi w}}.$$

Le deuxième terme à droite devient ¹

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty i^{1/2}} \left(\frac{-1}{1 - e^{-2\pi i v}} \right) v^{-s} dv &= \int_0^{\infty i^{1/2}} \sum_{n=1}^{\infty} e^{2\pi i n v} v^{-s} dv \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty i^{1/2}} e^{2\pi i n v} v^{-s} dv \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty i^{1/2}} e^{2\pi i w} \left(\frac{w}{n} \right)^{1-s} d \log w \\
&= \zeta(1-s) \int_0^{\infty i^{1/2}} w^{-s} e^{2\pi i w} dw \\
&= \zeta(1-s) i e^{-i\pi s/2} (2\pi)^{s-1} 1^{s-1} \Pi(-s)
\end{aligned}$$

par le même calcul. Le premier terme à droite peut être exprimé par l'intégrale définie

$$\int_{0 \nearrow 1} \frac{e^{i\pi u^2} u^{-s} du}{e^{i\pi u} - e^{-i\pi u}} \quad (4)$$

(où $0 \nearrow 1$ désigne le conjugué complexe d'un chemin $0 \searrow 1$) car, pour un réel s négatif, le chemin $0 \nearrow 1$ peut être déplacé vers la droite de pente 1 passant par l'origine, de sorte que (4) peut s'exprimer ainsi :

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty i^{1/2}}^0 \frac{e^{i\pi u^2} u^{-s} du}{e^{i\pi u} - e^{-i\pi u}} + \int_0^{\infty i^{1/2}} \frac{e^{i\pi u^2} u^{-s} du}{e^{i\pi u} - e^{-i\pi u}} &= \int_{\infty i^{1/2}}^0 \frac{e^{i\pi(-u)^2} (-u)^{-s} d(-u)}{e^{-i\pi u} - e^{i\pi u}} + \int_0^{\infty i^{1/2}} \frac{e^{i\pi u^2} u^{-s} du}{e^{i\pi u} - e^{-i\pi u}} \\
&= \int_0^{\infty i^{1/2}} \frac{e^{i\pi u^2} [u^{-s} - (-u)^{-s}] du}{e^{i\pi u} - e^{-i\pi u}} \\
&= (1 - e^{i\pi s}) \int_0^{\infty i^{1/2}} \frac{e^{i\pi v^2} v^{-s} dv}{e^{i\pi v} - e^{-i\pi v}}
\end{aligned}$$

car $\log(-u) = \log u - i\pi$ pour u sur le rayon $\Im \log u = \pi/4$, et donc $(-u)^{-s} = u^{-s} e^{-s(-i\pi)}$. Ainsi (3) devient

$$i e^{-i\pi s/2} (2\pi)^{s-1} \Pi(-s) \int_{0 \searrow 1} \frac{e^{-i\pi w^2} w^{s-1} dw}{e^{i\pi w} - e^{-i\pi w}} = \frac{1}{1 - e^{i\pi s}} \int_{0 \nearrow 1} \frac{e^{i\pi u^2} u^{-s} du}{e^{i\pi u} - e^{-i\pi u}} + i e^{-i\pi s/2} (2\pi)^{s-1} \Pi(-s) \zeta(1-s).$$

Maintenant

$$(1 - e^{i\pi s}) i e^{-i\pi s/2} (2\pi)^{s-1} \Pi(-s) = 2[\sin(s\pi/2)] (2\pi)^{s-1} \Pi(-s)$$

1. La justification de l'inversion de la sommation et de l'intégration n'est pas tout à fait élémentaire. Une méthode consiste à observer que $\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^{\infty i^{1/2}} (e^{2\pi i N v} / e^{-2\pi i v} - 1) v^{-s} dv = 0$ par le lemme de Riemann-Lebesgue.

est le facteur qui apparaît dans la fonctionnelle de ζ [formule (4) de la section 1.6] et, par conséquent, comme dans la section 1.6, il peut s'écrire ainsi

$$\frac{\Pi \left[\frac{1}{2}(1-s) - 1 \right] \pi^{-(1-s)/2}}{\Pi \left(\frac{1}{2}s - 1 \right) \pi^{-s/2}}.$$

Par conséquent, lorsque la formule ci-dessus est multipliée d'abord par $(1-e^{i\pi s})$ puis par $\Pi \left(\frac{s}{2} - 1 \right) \pi^{-s/2}$, elle devient

$$\Pi \left(\frac{1-s}{2} - 1 \right) \pi^{-(1-s)/2} \int_{0 \searrow 1} \frac{e^{-i\pi w^2} w^{s-1} dw}{e^{i\pi w} - e^{-i\pi w}} = \Pi \left(\frac{s}{2} - 1 \right) \pi^{-s/2} \int_{0 \nearrow 1} \frac{e^{i\pi u^2} u^{-s} du}{e^{i\pi u} - e^{-i\pi u}} + \frac{2\xi(1-s)}{(1-s)(-s)}$$

car, par définition

$$\frac{2\xi(s)}{s(s-1)} = \Pi \left(\frac{s}{2} - 1 \right) \pi^{-s/2} \zeta(s). \quad (5)$$

Le membre de gauche de cette équation est $F(1-s)$ et le premier terme à droite est $-\overline{F(\bar{s})}$; par conséquent

$$\frac{2\xi(1-s)}{(1-s)(-s)} = F(1-s) + \overline{F(\bar{s})}$$

et la formule (1) souhaitée est démontrée en remplaçant s par $1-s$.

La formule de Riemann-Siegel met en évidence le fait que ξ satisfait l'équation fonctionnelle $\xi(s) = \overline{\xi(1-s)}$ car elle montre que

$$\begin{aligned} \frac{2\xi(s)}{s(s-1)} &= F(s) + \overline{F(1-\bar{s})} = \overline{F(1-\bar{s})} + F(s) \\ &= \text{complexe conjug. de } \frac{2\xi(1-\bar{s})}{(1-\bar{s})(-\bar{s})} = \frac{\overline{2\xi(1-\bar{s})}}{s(s-1)}. \end{aligned}$$

Par ailleurs, ξ est réel sur l'axe des réels d'après (5), et donc, d'après le principe de réflexion, $\overline{\xi(s)} = \xi(\bar{s})$. La formule intégrale de Riemann-Siegel donne donc une nouvelle preuve de l'équation fonctionnelle $\xi(s) = \xi(1-s)$. Cette preuve diffère de la première preuve de Riemann en ce qu'elle utilise s et $1-s$ de manière plus symétrique, et elle diffère de sa deuxième preuve en ce qu'elle ne dépend pas de l'identité $1 + 2\psi(x) = x^{-1/2}[1 + 2\psi(x^{-1})]$ de la théorie des fonctions thêta.

Étant donné que l'identité de la fonction thêta $1 + 2\psi(x) = x^{-1/2}[1 + 2\psi(x^{-1})]$ peut être déduite de $\xi(s) = \xi(1-s)$ assez facilement (par inversion de Fourier, voir Chapitre 10), la preuve de cette section donne une preuve alternative de l'identité de la fonction thêta basée sur l'évaluation de l'intégrale définie (2). Plus généralement, Siegel affirme que Riemann, dans ses cours inédits, a dérivé la théorie des transformations des fonctions thêta à partir de l'étude de l'intégrale

$$\Phi(\tau, u) = \int_{0 \searrow 1} \frac{e^{i\pi \tau x^2} e^{2\pi i u x} dx}{e^{-i\pi x} - e^{i\pi x}}$$

dont le cas particulier $\tau = -1$ a été considéré ci-dessus.

Formule de Riemann-Siegel sur wikipedia

En mathématiques, et plus précisément en analyse, la formule de Riemann-Siegel est une estimation asymptotique de l'erreur de l'équation fonctionnelle d'approximation de la fonction zêta de Riemann, c'est-à-dire une approximation de la fonction zêta par la somme de séries de Dirichlet finies.

Histoire

Cette formule a été découverte par Carl Siegel en 1932 alors qu'il analysait les notes manuscrites non publiées de Bernhard Riemann, lesquelles dataient des années 1850.

Siegel l'a obtenue en partant de l' "intégrale de Riemann-Siegel", une expression de la fonction zêta qui fait appel à une intégrale curviligne. Au début du XXI^e siècle, cette formule est régulièrement utilisée pour calculer les valeurs de la fonction zêta, dans le but de rechercher la position de ses zéros (voir l'article wikipedia sur l'hypothèse de Riemann). Elle est parfois combinée à l'algorithme de Odlyzko-Schönhage, ce qui rend le calcul plus rapide.

Description

Si M et N sont des entiers strictement positifs, alors la fonction zêta peut être définie par

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^s} + \gamma(1-s) \sum_{n=1}^M \frac{1}{n^{1-s}} + R(s)$$

où

$$\gamma(s) = \pi^{1/2-s} \Gamma(s/2) / \Gamma((1-s)/2)$$

est le facteur qui apparaît dans l'équation fonctionnelle $\zeta(s) = \gamma(s)\zeta(1-s)$ et où

$$R(s) = \frac{-\Gamma(1-s)}{2\pi i} \oint \frac{(-x)^{s-1} e^{-Nx} dx}{e^x - 1}$$

est une intégrale curviligne sur une ligne commençant et se terminant en ∞ et encerclant les pôles de module inférieur ou égal à $2\pi M$.

L'équation fonctionnelle d'approximation produit une estimation de la taille de l'erreur. Siegel en 1932 et Edwards en 1974 ont obtenu la formule de Riemann-Siegel en appliquant la méthode du point col à cette intégrale pour en déduire un développement asymptotique de l'erreur $R(s)$ en série de puissances négatives de $\Im(s)$.

Dans la pratique, s est habituellement sur la ligne critique et les entiers positifs M et N ont comme valeur $2\pi\Im(s)^{1/2}$. En 1979, Gabcke a découvert de bonnes limites pour l'erreur de la formule de Riemann-Siegel.

Formule intégrale de Riemann

Riemann a démontré que

$$\int_{0 \searrow 1} \frac{e^{-i\pi u^2 + 2\pi i p u}}{e^{\pi i u} - e^{-\pi i u}} du = \frac{e^{i\pi p^2} - e^{i\pi p}}{e^{i\pi p} - e^{-i\pi p}}$$

où la courbe d'intégration est une droite de pente 1 qui passe entre 0 et 1.

Il a utilisé cette équation pour donner une formule intégrale de la fonction zêta :

$$\pi^{-s/2} \Gamma(s/2) \zeta(s) = \pi^{-s/2} \Gamma(s/2) \int_{0 \swarrow 1} \frac{x^{-s} e^{\pi i x^2}}{e^{\pi i x} - e^{-\pi i x}} dx + \pi^{-(1-s)/2} \Gamma((1-s)/2) \int_{0 \searrow 1} \frac{x^{s-1} e^{-\pi i x^2}}{e^{\pi i x} - e^{-\pi i x}} dx.$$

Références

- [1] H. M. Edwards, *Riemann's Zeta Function*, New York, Dover Publications, 1974, 315 p.
- [2] (de) Wolfgang Gabcke, *Neue Herleitung und Explizite Restabschätzung der Riemann-Siegel-Formel*, Georg-August-Universität Göttingen, 1979.
- [3] (de) Carl Ludwig Siegel, *Über Riemanns Nachlaß zur analytischen Zahlentheorie*, 1932, 80 p., p. 45–80.