Traduction de la démonstration du problème de Bâle, page 47 et 48 du livre "Euler, the master of us all", de William Dunham, chapitre "Euler et les séries infinies", éditions MAA (Mathematical Association of America), Dolciani Mathematical expositions n° 22 (Denise Vella-Chemla, avril 2024).

Théorème.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Preuve. Euler introduit

$$P(x) = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \frac{x^8}{9!} - \dots$$

qu'il regarde comme un "polynôme infini". De façon évidente, $P(0) = 1$. Pour trouver les racines de $P(x) = 0$, notons que pour $x \neq 0$,

$$\begin{aligned} P(x) &= x \left[\frac{1 - x^2/3! + x^4/5! - x^6/7! + x^8/9! - \dots}{x} \right] \\ &= \frac{x - x^3/3! + x^5/5! - x^7/7! + x^9/9! - \dots}{x} \\ &= \frac{\sin\ x}{x} \end{aligned}$$

Donc $P(x) = 0$ implique que $\sin x = 0$, ce qui signifie en retour que $x = \pm k\pi$ pour $k = 1, 2, \dots$. Notons que $x = 0$ *n'est pas* une solution de $P(x) = 0$ parce que $P(0) = 1$.

À la lumière de l'observation ci-dessus, Euler factorise maintenant $P(x)$ comme étant égal à :

$$\begin{aligned} P(x) &= 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots \\ &= \left(1 - \frac{x}{\pi}\right)\left(1 - \frac{x}{-\pi}\right)\left(1 - \frac{x}{2\pi}\right)\left(1 - \frac{x}{-2\pi}\right) \times \left(1 - \frac{x}{3\pi}\right)\left(1 - \frac{x}{-3\pi}\right) \\ &= \left[1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right]\left[1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right]\left[1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right]\left[1 - \frac{x^2}{16\pi^2}\right]\dots. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Ceci est la formule la plus importante du présent chapitre. Euler a écrit $P(x)$ de deux manières différentes, égalisant la somme infinie à gauche et le produit infini à droite.

Que faire ensuite ? Pour Euler, rien n'est plus naturel que de développer le côté droit de (3.3) pour obtenir :

$$1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \frac{x^8}{9!} - \ldots = 1 - \left(\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{4\pi^2} + \frac{1}{9\pi^2} + \frac{1}{16\pi^2} + \ldots \right) x^2 + \ldots \tag{3.4}$$

où les coefficients de x^4 et les puissances (paires) plus élevées sont inutiles et, pour le moment, inconnues. Il utilise l'égalité des coefficients de x^2 dans (3.4) pour obtenir

$$\begin{aligned} -\frac{1}{3!} &= -\left(\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{4\pi^2} + \frac{1}{9\pi^2} + \frac{1}{16\pi^2} + \ldots \right) \\ &= -\frac{1}{\pi^2} \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \ldots \right). \end{aligned}$$

et conclut de façon dramatique que

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \ldots = \frac{\pi^2}{6}.$$

C.Q.F.D.