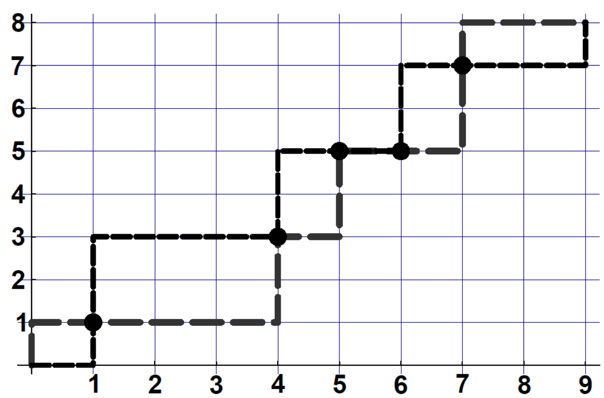
Comptage de paires de chemins dans un quadrillage par leurs intersections

Ira Gessel [1], Wayne Goddard [2], Walter Shur, Herbert S. Wilf [3] et Lily Yen [4]

Sur un rectangle quadrillé de taille $r \times (n-r)$, considérons d'abord les chemins qui commencent au coin sud-ouest, se poursuivent par pas unitaires dans l'une des directions E ou N et se terminent au coin nord-est du rectangle. Pour chaque entier k, on cherche la valeur de $N_k^{n,r}$, le nombre de paires ordonnées de ces chemins qui se croisent en exactement k points. Le nombre de points à l'intersection de deux de ces chemins est défini comme le cardinal de l'intersection de leurs deux ensembles de sommets, à l'exclusion des sommets initial et terminal. La figure ci-dessous montre une paire de ces chemins où $r = 9, n = 17$ et $k = 5$.



Dans les sections 1 et 2 ci-dessous, on trouvera deux formules explicites pour les nombres $N_k^{n,r}$. Ces formules sont

$$N_k^{n,r} = \frac{2(k+1)}{(n-k-1)} \sum_i \binom{k}{i} \binom{n-k+i-1}{r} \binom{n-i-1}{n-r}, \qquad (0 \leq k \leq n-2) \tag{1a}$$

et

$$N_k^{n,r} = \frac{2(k+1)}{r} \sum_i (-1)^i \frac{\binom{k}{i}\binom{k-i}{i}\binom{n-i-2}{r-1}\binom{n-i-1}{r-i-1}}{\binom{n-i-2}{i}} \qquad (0 \leq k \leq n-2). \tag{1b}$$

Dans la section 2, on prouvera l'égalité de (1a) et (1b) dans leur domaine de validité commun.

Ensuite, notons que ces formules révèlent le fait intéressant que $N_1^{n,r} = 2N_0^{n,r}$, c'est-à-dire qu'il y a exactement deux fois plus de paires de chemins qui ont une seule intersection qu'il y a de chemins qui n'en ont pas. Une telle relation mérite clairement une preuve bijective, et nous en fournirons une dans la section 3 ci-dessous.

---

[1] Soutenue par la National Science Foundation.
[2] Soutenu par le Bureau de la recherche navale.
[3] Soutenu par le Bureau de la recherche navale.
[4] Soutenu par une bourse du CRSNG, Canada.
Transcription : Denise Vella Chemla, août 2025.

Dans les sections 4 et 5, on discutera d'un certain nombre de résultats connexes. Dans la première de ces sections, on spécifie que les chemins des marcheurs doivent se terminer en des points différents ; dans la seconde, on ignore où les deux chemins se terminent.

Enfin, dans la section 6, on discutera d'une variante dans laquelle on trouve la probabilité que deux marcheurs indépendants sur un rectangle de quadrillage donné ne se rencontrent pas, sous une hypothèse différente. Dans cette situation, les marcheurs commencent aux deux points $(a, b+x+1)$ et $(a+x+1, b)$ dans le premier quadrant, et marchent vers l'ouest ou le sud à chaque pas, sauf que lorsqu'un marcheur atteint l'axe des x (resp. l'axe des y), tous les pas futurs sont contraints d'être vers le sud (resp. l'ouest) jusqu'à ce que l'origine soit atteinte On trouvera (théorème 4 ci-dessous) que si la probabilité $p(i,j)$ qu'un pas de (i,j) aille vers l'ouest ne dépend que de $i+j$, alors la probabilité que les deux marcheurs ne se rencontrent pas avant d'atteindre l'origine est la même que la probabilité qu'un seul marcheur (sans contrainte) qui commence à $(a, b+x+1)$ et fait $a+b+x$ pas, termine à l'un des points $(0,1), (-1,2), \ldots, (-x, 1+x)$.

1. Dérivation de la formule (1a)

On utilise une fonction génératrice pour aborder le problème. Si on trie les paires de marches qui ont k intersections selon le point (m,q) qui est leur dernière intersection (c'est-à-dire l'intersection la plus au nord-est), alors on a la récurrence

$$N_k^{n,r} = \sum_{q,m} N_{k-1}^{m,q} N_0^{n-m,r-q}. \tag{2}$$

Introduisons la fonction génératrice $u_k(x,y) = \sum_{n,r} N_k^{n,r} x^n y^r$.

Alors (2) dit simplement que $u_k = u_{k-1} u_0$, pour $k \geq 1$.

Ainsi $u_k(x,y) = u_0(x,y)^{k+1}$ pour $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Maintenant, u_0 est bien connu, il a été calculé par Narayana [3]. (En effet, les valeurs $N_0^{n,r}/2$ sont parfois appelées les nombres de Narayana). Mais il est plus intéressant de trouver u_0 en observant que le coefficient de $x^n y^r$ dans $\sum_k u_k(x,y)$ est le nombre total de paires de chemins, puisque chaque paire a un certain nombre d'intersections.

Le nombre total des paires de chemins est $\binom{n}{r}^2$, on a donc

$$\begin{aligned}
1 + \sum_k u_k(x,y) &= \sum_{k \geq 0} u_0(x,y)^k = \frac{1}{1 - u_0(x,y)} \\
&= \sum_{n,r} \binom{n}{r}^2 x^n y^r \\
&= \sum_{n \geq 0} x^n (y-1)^n P_n\left(\frac{y+1}{y-1}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{1 - 2x(y+1) + x^2(y-1)^2}},
\end{aligned}$$

où les P_n sont les polynômes de Legendre, et où on a utilisé leur fonction génératrice classique. Ainsi

$$u_0(x,y) = 1 - \sqrt{1 - 2x(y+1) + x^2(y-1)^2}.$$

Il s'ensuit que le nombre de paires de chemins qui ont exactement k intersections est le coefficient de $x^n y^r$ dans

$$u_k(x,y) = \left(1 - \sqrt{1 - 2x(y+1) + x^2(y-1)^2}\right)^{k+1}. \tag{3}$$

Si on pose $x = z$ et $y = y/z$, on peut reformuler cette conclusion comme suit.

Proposition. *Le nombre $N_k^{n,r}$ est le coefficient de $y^r z^{n-r}$ dans $(y+z+2f)^{k+1}$, où*

$$f = \frac{(1-y-z) - \sqrt{(1-y-z)^2 - 4yz}}{2}$$

satisfait l'équation $f = (y+f)(z+f)$.

Pour extraire les coefficients de cette fonction génératrice, on utilise la formule d'inversion de Lagrange pour la solution de $f = xg(f)$ sous la forme (voir, par exemple, [5], équation (5.1.2))

$$[x^n]\phi(f) = \frac{1}{n}[t^{n-1}]\phi'(t)g(t)^n. \tag{4}$$

Introduisons d'abord une variable auxiliaire x et considérons l'équation $f = x(y+f)(z+f)$. Appliquons (4) en utilisant $\phi(t) = (y+z+2t)^{k+1}$, et la formule (1a) en résulte.

2. Égalité de (1a) et (1b)

Cette section est consacrée à la preuve de l'égalité des deux formules (1a), (1b), dans l'intervalle $0 \le k \le n-2$. Notons qu'on adopte la convention habituelle selon laquelle tout terme ayant la factorielle d'un entier négatif à son dénominateur est considéré comme nul.

Théorème 1. *Pour $0 \le k \le n-2$, on a*

$$\frac{k+1}{n-k-1}\sum_i \binom{k}{i}\binom{n-k+i-1}{r}\binom{n-i-1}{n-r}$$
$$= \frac{k+1}{r}\sum_j (-1)^j \frac{\binom{k}{j}\binom{k-j}{j}\binom{n-j-2}{r-1}\binom{n-j-1}{r-j-1}}{\binom{n-j-2}{j}}. \tag{5}$$

Preuve. On obtient les deux côtés de (5) en évaluant de deux manières la double somme

$$S = \sum_{j,l} (-1)^j \frac{(k+1)!\,(n-k-2)!\,(n-j-1)!}{r!\,(n-r)!\,j!\,l!\,(r-j-l-1)!\,(k-2j-l)!\,(n-k-r+j+l-1)!},$$

où la somme est sur tous les entiers non négatifs j et l avec $j \le n-1$.

On aura besoin de deux formes du théorème de Vandermonde :

$$\sum_i \binom{a}{i}\binom{b}{m-i} = \binom{a+b}{m} \tag{6}$$

et

$$\sum_i (-1)^i \binom{a}{i}\binom{c-i}{m-i} = \binom{c-a}{m} \tag{7}$$

On calcule d'abord la somme sur l. On a

$$\begin{aligned} S &= \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \frac{(k+1)!\,(n-j-1)!}{r!\,(n-r)!\,j!\,(k-2j)!} \sum_l \binom{k-2j}{l}\binom{n-k-2}{r-j-l-1} \\ &= \sum_{j \le k/2} (-1)^j \frac{(k+1)!(n-j-1)!}{r!(n-r)!j!(k-2j)!}\binom{n-2j-2}{r-j-1} \qquad \text{par (6)}, \end{aligned}$$

et on voit facilement que cela est égal au côté droit de (5).

Ensuite, on pose $l = i - j$ dans S et on somme sur j. Cela donne

$$\begin{aligned} S &= \sum_{i,j} (-1)^j \frac{(k+1)!\,(n-k-2)!\,(n-j-1)!}{r!\,(n-r)!\,j!\,(i-j)!\,(r-i-1)!\,(k-i-j)!\,(n-k-r+i-1)!} \\ &= \sum_i \frac{(k+1)!\,(n-k-2)!}{r!\,(n-r)!\,(r-i-1)!\,(n-k-r+i-1)!} \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \frac{(n-j-1)!}{j!\,(i-j)!\,(k-i-j)!} \\ &= \sum_i \frac{(k+1)!\,(n-k-2)!\,(n-i-1)!}{r!\,(n-r)!\,(r-i-1)!\,(n-k-r+i-1)!\,(k-i)!} \sum_{j=0}^{i} (-1)^j \binom{k-i}{j}\binom{n-j-1}{i-j} \\ &= \sum_i \frac{(k+1)!\,(n-k-2)!\,(n-i-1)!}{r!\,(n-r)!\,(r-i-1)!\,(n-k-r+i-1)!\,(k-i)!}\binom{n-k+i-1}{i} \qquad \text{par (7)} \end{aligned}$$

et on voit facilement que cela est égal au côté gauche de (5).

On peut noter que le théorème peut également être obtenu à partir de la formule (1), p. 30 de [1] en prenant la limite lorsque $c \to \infty$ puis en posant $m = r-1, a = -k, w = 1-n$ et $b = n-k$. Enfin, on remarque que l'algorithme de Zeilberger (voir [6]) est, en principe, capable de vérifier que les deux côtés de (5) satisfont la même relation de récurrence. En fait, cependant, les ordinateurs ne sont pas encore capables de produire des certificats pour de tels termes à deux variables dans des temps d'exécution raisonnables.

3. Une bijection

Les formules (1a) et (1b) montrent que

$$N_0^{n,r} = \frac{2}{n-1}\binom{n-1}{r}\binom{n-1}{n-r}$$

et que $N_1^{n,r} = 2N_0^{n,r}$. Donnons maintenant une preuve bijective de cette dernière assertion. Par commodité, on définit $s = n - r$ de telle façon qu'on ait à traiter un rectangle de dimension $r \times s$.

On dira que (x, y) est un point intérieur du rectangle si $0 < x < r$ et $0 < y < s$. La distance en x entre deux chemins du quadrillage P_1 et P_2 est

$$d_x(P_1, P_2) = \min\{|y_2 - y_1| \ ; \ (x, y1) \in P_1, (x, y_2) \in P_2\}.$$

On désigne les arêtes est et nord des chemins par les termes "arêtes E" et "arêtes N", respectivement. Par la *forme* d'une paire de chemins du quadrillage, on entend la région plane comprise entre eux.

Définition de l'application. Définissons maintenant notre application ϕ qui envoie des paires de chemins sans intersection vers des paires de chemins avec une intersection. Soit donc (P, Q) une paire de chemins qui ne se croisent pas. On peut supposer que P est au nord de Q. Supposons que $d_x(P, Q) \geq 2$ pour tout $1 \leq x \leq r - 1$. Alors ϕ envoie (P, Q) sur (P', Q) et (P, Q'), avec

(i) P' s'obtient à partir de P comme suit. Commencer par translater P vers le bas d'une unité, puis supprimer sa première arête N, puis concaténer une arête N au dernier sommet du nouveau chemin. La paire (P', Q) est intersectée en $(r, s - 1)$ et seulement là.

(ii) Q' s'obtient à partir de Q comme suit. Commencer par translater Q vers le haut d'une unité, puis supprimer sa dernière arête N, puis joindre une arête N à son premier sommet. La paire (P, Q') est intersectée en $(0, 1)$, et seulement là.

Supposons maintenant que P soit au nord de Q et que $d_x(P, Q) = 1$ pour un certain x, $1 \leq x \leq r - 1$. Soit x_0 le plus petit de ces x, et soit $y_0 = \max_y\{(x_0, y) \in Q\}$.

Supposons d'abord que $(x_0, y_0) \neq (1, 0)$. Diminuons alors d'une unité la partie de P qui va de $(0, 0)$ à $(x_0, y_0 + 1)$, et déplaçons la première arête N de P pour joindre (x_0, y_0) et $(x_0, y_0 + 1)$, afin d'obtenir le nouveau chemin P'. La paire (P', Q) est intersectée en (x_0, y_0) et seulement là. Pour obtenir une autre paire de chemins qui se coupent en (x_0, y_0), échangeons le chemin supérieur avec le chemin inférieur entre (x_0, y_0) et (n, s), dans (P', Q).

Enfin, supposons que $(x_0, y_0) = (1, 0)$. Ensuite, produisons d'abord (P', Q) exactement comme dans le paragraphe précédent, de sorte que (P', Q) est intersectée en $(1, 0)$ et seulement là. Pour produire une deuxième paire qui se coupe en $(r - 1, s)$ et seulement là, l'arête double-E de $(0, 0)$ à $(1, 0)$ dans (P', Q) est, dans ce cas, déplacée vers le coin nord-est comme une autre arête double-E. Ensuite, la paire résultante est translatée d'une unité vers l'ouest, de sorte que les chemins commencent en $(0, 0)$, se terminent en (r, s) et se coupent en $(r - 1, s)$ et seulement là.

Inversibilité de l'application. Partitionnons l'ensemble de toutes les paires de chemins qui se coupent exactement une fois en groupes de deux comme suit

(i) Si (P, Q) est intersectée en $(1, 0)$, alors la paire (P, Q) avec (P', Q'), où (P', Q') est intersectée en $(r - 1, s)$ et la suppression des arêtes doubles-E des deux paires (P, Q), (P', Q') donne la même paire de chemins non sécants sur un rectangle $(r - 1) \times s$.

(ii) Si (P, Q) est intersectée en $(0, 1)$, alors la paire (P, Q) avec (P', Q'), où (P', Q') est intersectée en $(r, s - 1)$ et la suppression des arêtes doubles-N des deux paires (P, Q), (P', Q') donne la même paire de chemins non sécants sur un rectangle $r \times (s - 1)$.

(iii) Supposons que (P, Q) est intersectée en un point intérieur. Si P est au nord de Q entre $(0, 0)$ et l'intersection, alors associons (P, Q) à (P', Q') où les deux chemins ont été intervertis du point d'intersection à (r, s), donc P' est toujours au nord de Q'.

Nous pouvons maintenant définir l'application inverse $\psi = \phi^{-1}$. Étant données deux paires de chemins $(P, Q), (P', Q')$ du groupe (i) ci-dessus, alors ψ ne concerne que (P, Q). Supprimons l'intersection en élevant l'une des arêtes doubles d'une unité dans (P, Q), et en déplaçant la deuxième arête de P, qui est une arête E, pour joindre $(0, 0)$ et $(0, 1)$.

Pour (P, Q), (P', Q') du groupe (ii) ci-dessus, ψ concerne la paire (P', Q') qui est intersectée en $(r, s-1)$. Élevons le chemin supérieur, à l'exception de son arête N finale, d'une unité, puis déplaçons cette arête N pour joindre $(0, 0)$ et $(0, 1)$.

Enfin, pour $(P, Q), (P', Q')$ du groupe (iii) ci-dessus, ψ concerne (P, Q) de telle façon que P soit toujours au nord de Q, et supposons qu'ils se rencontrent en (x_0, y_0). Ensuite, élevons la partie de P qui précède l'intersection d'une unité, supprimons l'arête N de P de (x_0, y_0) vers $(x_0, y_0 + 1)$, et ajoutons une arête N pour joindre $(0, 0)$ et $(0, 1)$.

Narayana [4] a montré que la valeur $N_0^{n,r}/2$ est égale au nombre d'arbres planaires à n sommets et r feuilles. Une preuve de ceci à l'aide de chemins dans des quadrillages est donnée dans [2].

4. Terminaison en des extrémités différentes

Dans cette section, on étend la formule pour $N_k^{n,r}$ en considérant des paires de chemins où les deux marcheurs commencent au même point mais terminent leur marche en des points différents. Supposons que les marcheurs commencent tous les deux en $(0, 0)$, et que le premier marcheur termine en $(r, n-r)$ et le second en $(s, n-s)$. Alors, pour $r < s$, soit $M_{r,s}^{n,k}$ le nombre de paires (non ordonnées) de ces chemins qui se coupent en exactement k points, sans compter le point de départ ; pour $r = s$, soit $M_{r,r}^{n,k} = N_{k-1}^{n,r}$.

Théorème 2. *Pour $r \geq s$, les nombres $M_{r,s}^{n,k}$ sont donnés par*

$$2 \sum_t \sum_j (-1)^j \frac{(s-j-r+1+2t)}{n-1-j-2t} \binom{k}{2t+1} \binom{k-1-2t}{j} \binom{n-1-j-2t}{s-j} \binom{n-1-j-2t}{r-1-2t} + \frac{s-r}{n-k} \sum_j \binom{k}{j} \binom{n-k}{r-j} \binom{n-k}{s-j}.$$

Le deuxième terme compte le nombre de paires qui se croisent en chacun des k premiers pas ; l'autre expression compte les paires restantes. Pour $k = 0$, on retrouve la formule familière :

$$M_{r,s}^{n,0} = \frac{s-r}{n} \binom{n}{r} \binom{n}{s}.$$

La preuve est simple (du moins conceptuellement) et on omettra les détails. On montre d'abord que la formule proposée est correcte pour $r = s$ en montrant que l'expression ci-dessus est équivalente à l'expression de (1b). Ensuite, pour $r < s$, on obtient facilement une relation de récurrence pour $M_{r,s}^{n,k}$ en considérant la dernière et l'avant-dernière étape des deux parcours. Le reste de la preuve consiste à montrer que la formule ci-dessus satisfait la récurrence et remplit les conditions aux limites appropriées.

5. Remarques complémentaires

Dans cette section, on discute de quelques variantes du problème original.

Commençons par le cas où les marches ne sont pas restreintes à un rectangle quadrillé donné. Plus précisément, fixons $n > 0$ et considérons deux marches sur un quadrillage plan qui commencent toutes deux à l'origine, qui se terminent au même point, et qui sont constituées de n pas, chacun étant un pas N ou un pas E, et qui se coupent en exactement k points. On va compter ces paires.

D'après la proposition de la section 1 ci-dessus, on a que

$$(x + y + 2f)^{k+1} = \sum_{i,j} N_k^{i+j,j} x^i y^j.$$

Si on pose $y = x$, on obtient

$$\begin{aligned} 2^{k+1}(x + f(x,x))^{k+1} &= \sum_{i,j} N_k^{i+j,j} x^{i+j} \\ &= (1 - \sqrt{1-4x})^{k+1} = (2x)^{k+1} \sum_{m \geq 0} \frac{(k+1)(2m+k)!}{m!\,(m+k+1)!} x^m. \end{aligned}$$

En faisant correspondre maintenant $[x^n]$,

$$\sum_{i+j=n} N_k^{i+j,j} = 2^{k+1}(k+1)\frac{(2n-k-2)!}{n!\,(nk-1)!}$$

Puisqu'il existe $\binom{2n}{n}$ paires de marches qui commencent à l'origine et se terminent au même point, on exprime cela en langage probabiliste de la façon suivante :

Si deux marcheurs indépendants commencent à l'origine, et si chacun effectue n pas, chaque pas étant un pas N ou un pas E avec une probabilité égale, et s'ils terminent au même point, alors la probabilité que les intérieurs de leurs chemins se coupent en k points est

$$p(n,k) = \frac{2^{k+1}(k+1)(2n-k-2)!\,n!}{(n-k-1)!\,(2n)!} \qquad (n \geq 1\ ;\ 0 \leq k \leq n-1).$$

Le fait que $P(n) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{0 \leq k \leq n} p(n,k)$ vaille 1 pour tout $n \geq 1$ peut se prouver en adaptant la méthode WZ (voir [5]) comme suit. (Quelques adaptations sont nécessaires puisque l'intervalle de sommation ne coïncide pas avec le support complet du sommande). Commençons par le fait, vérifiable de façon routinière, que

$$p(n+1,k) - p(n,k) = g(n,k+1) - g(n,k),$$

où $g(n,k) = -(k+2)p(n,k)/(2n+1)$, et sommons de $k = 0$ à $n+1$. Le côté droit se télescope vers zéro, et on a $P(n+1) - P(n) = 0$ pour $n \geq 1$.

Il est intéressant de noter que $P(n,1) = 2p(n,0)$ si $n > 1$.

Le résultat suivant supprime la condition selon laquelle les marches se terminent au même point.

Théorème 3. *Le nombre de paires de marches qui commencent à l'origine et se poursuivent avec des pas de type N ou E, chacune comportant n pas, et qui se coupent exactement k fois en excluant l'origine, est* $2^k \binom{2n-k}{n}$.

Corollaire 1. *Puisqu'il y a 4^n paires de marches de n pas, on a une interprétation combinatoire de l'identité bien connue*

$$\sum_{k\geq 0} 2^k \binom{2n-k}{n} = 4^n.$$

Corollaire 2. *La probabilité que deux de ces marches n'aient aucune intersection est* $\binom{2n}{n}/4^n$.

Corollaire 3. *Le nombre moyen de fois que deux marches aléatoires indépendantes de n pas, commençant à l'origine, se croisent est*

$$\frac{(2n+1)!}{4^n\, n!^2} - 1 = 2\sqrt{\frac{n}{\pi}} - 1 + \mathrm{o}(1).$$

Preuve. Si $f(n,k)$ est le nombre de paires de marches de $(0,0)$, de n pas, qui se coupent k fois, et si $\phi(n,k)$ est le nombre de paires de telles marches qui se coupent k fois et se terminent au même point, alors

$$\sum_j \phi(j,k-1) f(n-j,0) = f(n,k). \tag{8}$$

Si on somme sur k, on trouve que $4^n = \sum_j f(n-j,0)\binom{2j}{j}$. Donc, la fonction génératrice pour les paires de marches avec 0 intersection est $F_0(x) = (1-4x)^{-\frac{1}{2}}$, et $f(n,0) = \binom{2n}{n}$. Maintenant, d'après (8), puisque $\Phi(x) = (1-\sqrt{1-4x})^{k+1}$, on a

$$F_k(x) = \frac{(1-\sqrt{1-4x})^k}{\sqrt{1-4x}} = 2^k \sum_j \binom{2j-k}{j} x^j$$

donc $f(n,k) = 2^k \binom{2n-k}{n}$.

Pour une autre preuve, on peut examiner la différence des deux marches. Si (x', y') et (x'', y'') sont les coordonnées des marcheurs sur les deux marches, posons $(x,y) := (x'-x'', y'-y'')$. Alors (x,y) marche vers (x,y) avec une probabilité de $1/2$, vers $(x+1, y-1)$ avec une probabilité de $1/4$, et vers $(x-1, y+1)$ avec une probabilité de $1/4$. Ainsi, la marche différence se déroule entièrement sur la droite $x+y=0$. Les statistiques des intersections de la paire de marches originale sont identiques à celles des retours à 0 d'une seule marche unidimensionnelle de deux fois plus de pas, et sont bien connues.

6. Marches sans intersection avec un obstacle

Dans cette section, on considère une variante du problème original. Par commodité, on considèrera les marcheurs comme se déplaçant vers l'origine au lieu de s'en éloigner.

Considérons donc deux marcheurs, U et L, qui partent des points respectifs du quadrillage $(a, b+x+1)$ et $(a+x+1, b)$ (où $a, b, x \geq 0$). Ils se déplacent indépendamment vers l'ouest ou vers le sud jusqu'à atteindre l'axe des x ou des y, où ils sont contraints de se déplacer le long de cet axe jusqu'à l'origine. En chaque point du quadrillage $A = \{(r, s) \ : \ r, s > 0\}$, la probabilité de se déplacer vers l'ouest est $p(r, s)$ et la probabilité de se déplacer vers le sud est $1 - p(r, s)$. On souhaite connaître la probabilité $B(a, b, x)$ que la première rencontre des marcheurs ait lieu à l'origine. On dit qu'une telle paire de marches est "valide".

Arrêtons les marches après $a + b + x$ pas. Un marcheur s'arrête alors soit au point $(0, 1)$, soit au point $(1, 0)$. La condition selon laquelle une paire de marches est valide est donc équivalente aux trois conditions suivantes : (1) les marcheurs ne se rencontrent jamais en A, (2) U termine en $(0, 1)$ et (3) L termine en $(1, 0)$.

Maintenant, on affirme que la probabilité que (2) et (3) soient vraies mais que les chemins se croisent est égale à la probabilité que U termine en $(1, 0)$ et L termine en $(0, 1)$. Car, si une paire P de chemins satisfait (2) et (3) mais si ces chemins se croisent, on peut créer une nouvelle paire de chemins P' en intervertissant les segments du début à la première intersection ("segments initiaux") des deux chemins dans P. Le P' résultant est une paire de chemins dans laquelle U termine en $(1, 0)$ et L termine en $(0, 1)$, où P' a la même probabilité d'occurrence que P. De même, les chemins d'une paire P' tels que U termine en $(1, 0)$ et L termine en $(0, 1)$ doivent se croiser quelque part ; si on intervertit leurs segments initiaux, on obtient une paire P de chemins dans laquelle U termine en $(0, 1)$ et L termine en $(1, 0)$.

Par conséquent, si u désigne la probabilité que U se termine en $(0, 1)$, et l désigne la probabilité que L se termine en $(1, 0)$, alors la probabilité qu'une paire de marches soit valide est

$$B = ul - (1 - u)(1 - l) = u + l - 1.$$

Maintenant, pour simplifier ce qui précède, procédons comme suit. Supprimons les contraintes sur les axes et étendons $p(r, s)$ aux points tels que $r \leq 0$ ou $s \leq 0$ arbitrairement. Alors la probabilité u est la probabilité qu'un seul marcheur commençant en $(a, b+x+1)$ et se déplaçant soit vers l'ouest, avec une probabilité $p(r, s)$, soit vers le sud, avec une probabilité $1-p(r, s)$, soit, après $a+b+x$ pas, à l'un des sommets de l'ensemble des points du quadrillage sur la ligne $x + y = 1$ qui se trouvent sur ou à gauche de l'axe des y. De même, l est la probabilité qu'un marcheur unique partant de $(a+x+1, b)$ se trouve, après $a+b+x$ pas, dans l'ensemble des points du quadrillage $x+y = 1$ situés sur ou sous l'axe des x. Si les probabilités de transition $p(r, s)$ dans A sont des fonctions de $r + s$ uniquement, disons $p(r, s) = p_{r+s}$, alors on peut étendre $p(r, s)$ pour que cela reste vrai. Dans ce cas, l est la probabilité qu'un marcheur unique partant de $(a, b + x + 1)$ se trouve, après $a + b + x$ pas, dans l'ensemble des points du quadrillage $x + y = 1$ situés sur ou sous le point $(-x, 1 + x)$. L'expression $u + l - 1$ se simplifie donc et donne le théorème suivant :

Théorème 4. *Si la probabilité de transition en (r, s) est une fonction de $r + s$ seulement, alors $B(a, b, x)$ est égal à la probabilité qu'un seul marcheur sans contrainte commençant en $(a, b + x + 1)$*

et effectuant $a+b+x$ pas finisse à l'un des $x+1$ points $\{(-t, 1+t) : 0 \leq t \leq x\}$.

Corollaire. *Si toutes les probabilités de transition ont la même valeur p, alors*

$$B(a,b,x) = \sum_{t=0}^{x} \binom{a+b+x}{a+t} p^{a+t} q^{b+x-t} \qquad (q = 1-p)$$

En particulier, le cas spécifique qui nous intéressait à l'origine était celui de deux marcheurs partant du même point $(a+1, b+1)$ et se déplaçant comme ci-dessus : dans ce cas, la réponse est simplement $2\binom{a+b}{a} p^{a+1} q^{b+1}$.

Références

1. W. N. Bailey, Generalized Hypergeometric Series. New York : Hafner, 1972 (initialement publié en 1935 par Cambridge University Press).
2. Nachum Dershowitz et Shmuel Zaks, Énumération des arbres ordonnés, *Discrete Math.* 31 (1980) 9-28.
3. T.V. Narayana, Sur les treillis formés par les partitions d'un entier et leurs applications à la théories des probabilités, *C. R. Acad. Sci. Paris* 240 (1955) 1188-1189.
4. T. V. Narayana, A partial order and its application to probability, Sankhya 21 (1959) 91-98.
5. Herbert S. Wilf, Generatingfunctionology (2e éd.), Academic Press, New York, 1993.
6. Doron Zeilberger, The method of creative telescoping, *J. Symb. Comput.* 11 (1991) 195-201.

Université Brandeis, Waltham, MA 02254-9110
Université de Pennsylvanie, Philadelphie, PA 19104-6395
New York Life Insurance Co., New York, NY 10010
Université de Pennsylvanie, Philadelphie, PA 19104-6395
Université de Waterloo, Waterloo, Ontario, Canada N2L 3G1