Algèbres de Hecke, facteurs de type III et transitions de phase avec brisure spontanée de symétrie en théorie des nombres

Jean-Benoît BOST - Alain CONNES

Résumé Dans cet article, nous construisons un système C^*-dynamique naturel, dont la fonction de partition est la fonction ζ de Riemann. Notre construction est générale et associe à une inclusion d'anneaux (sous une condition adéquate de finitude) une inclusion de groupes discrets (les groupes $ax+b$ associés) et les algèbres de Hecke correspondantes de fonctions bi-invariantes. Cette algèbre est munie d'un groupe canonique à un paramètre d'automorphismes qui mesure le manque de normalité du sous-groupe. L'inclusion d'anneaux $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ fournit le système C^*-dynamique souhaité, qui admet la fonction ζ comme fonction de partition et le groupe de Galois $Gal(\mathbb{Q}^{\mathrm{cycl}}/\mathbb{Q})$ de l'extension cyclotomique $\mathbb{Q}^{\mathrm{cycl}}$ de $\mathbb{Q}$ comme groupe de symétrie. En outre, ce système présente une transition de phase avec brisure spontanée de symétrie à température inverse $\beta = 1$ (cf. [Bos-C]). La motivation initiale de ces résultats vient des travaux de B. Julia [J] (cf. aussi [Spe]).

1 Description du système et de sa transition de phase

Rappelons d'abord les notions générales de mécanique quantique statistique et des transitions de phase. Un système statistique quantique consiste en :
(α) une C^*-algèbre d'observables : A ;
(β) une évolution dans le temps $(\sigma_t)_{t\in\mathbb{R}}$, qui est un groupe à un paramètre d'automorphismes de A.
Un état d'équilibre, ou état KMS$_\beta$, à température inverse β sur (A, σ_t) est un état φ sur A qui satisfait la condition KMS$_\beta$ relativement à σ_t, c'est-à-dire tel que pour tous $x, y \in A$, il existe une fonction bornée holomorphe (continue sur la bande fermée), $F_{x,y}(z), 0 \leq \mathfrak{Im}\, z \leq \beta$ telle que

$$\begin{aligned} F_{x,y}(t) &= \varphi(x\sigma_t(y)) \quad \forall t \in \mathbb{R} \\ F_{x,y}(t+i\beta) &= \varphi(\sigma_t(y)x) \quad \forall t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Dans le cas le plus simple où $A = M_N(\mathbb{C})$ est l'algèbre des matrices $N \times N$, tout groupe à un paramètre d'automorphismes $(\sigma_t)_{t\in\mathbb{R}}$ de A est de la forme

$$\sigma_t(x) = e^{itH} x e^{-itH} \qquad \forall x \in A, t \in \mathbb{R}$$

pour un élément auto-adjoint $H = H^* \in A$. Alors pour tout $\beta \in [0, \infty[$, on a un unique état KMS$_\beta$ pour σ_t, et il est donné par

$$\varphi_\beta(x) = \frac{\mathrm{Trace}\left(e^{-\beta H}x\right)}{\mathrm{Trace}\left(e^{-\beta H}\right)} \qquad \forall x \in A.$$

Noter ici que la normalisation additive de H peut être fixée en imposant que $H \geq 0$ et $0 \in \mathrm{Sp}H$. Alors le facteur de normalisation $\mathrm{Trace}(\mathrm{e}^{-\beta \mathrm{H}})$ est appelé la fonction de partition de (A,σ_t). La formule suivante est vérifiée :

$$\mathrm{Log\ Trace}\left(e^{-\beta H}\right) = \sup_\varphi (S(\varphi) - \beta\varphi(H))$$

article original de référence Selecta Mathematica, New Serie, Vol.1, No.3 (1995), 1995, Birkhäuser Verlag, Basel.
lisible ici : ~~http://alainconnes.org/docs/bostconnesscan.pdf~~.
Transcription corrigée en décembre 2020, Denise Vella-Chemla.
https://alainconnes.org/wp-content/uploads/bostconnesscan.pdf

où φ varie sur tous les états de A et $S(\varphi)$ est l'entropie de l'état

$$S(\varphi) = -\mathrm{Trace}(\rho \mathrm{Log} \rho) \qquad \text{pour} \qquad \varphi = \mathrm{Trace}(\rho).$$

Plus généralement, si (A, σ_t) est un système C^*-dynamique quelconque et si φ est un état KMS$_\beta$ tel que la fermeture faible de A est un facteur de type I, alors les conditions ci-dessus s'appliquent et l'énergie libre $S(\varphi) - \beta\varphi(H)$ est bien définie.

Dans une situation un peu plus contrainte que celle où $A = M_N(\mathbb{C})$, notamment pour les *systèmes sans interaction*, il est encore vrai que pour n'importe quel $\beta \in [0, \infty[$, il existe un unique état KMS$_\beta$. Plus précisément, on a comme conséquence immédiate la :

Proposition 1. *Soit $A = \otimes_{\nu \in I} A_\nu$, un produit tensoriel infini d'algèbres de matrices $A_\nu = M_{n_\nu}(\mathbb{C})$, et $\sigma_t = \otimes_{\nu \in I} \sigma_t^\nu$ un produit d'évolutions temporelles. Alors pour tout $\beta \geq 0$, il existe un unique état KMS$_\beta$ φ_β pour (A, σ_t), et on a $\varphi_\beta = \otimes_\nu \varphi_{\beta,\nu}$, où $\varphi_{\beta,\nu}$ est l'unique état KMS$_\beta$ pour (A_ν, σ_t^ν).*

Pour les systèmes intéressants *avec interaction*, on s'attend en général à ce que pour les *hautes* températures, i.e. pour les β petits, le désordre prédominera de telle façon qu'il existera seulement un état KMS$_\beta$. Pour les températures suffisamment faibles, un certain ordre devrait apparaître qui autorisera l'existence de phases thermodynamiques variées, i.e., d'états KMS$_\beta$ variés. C'est un fait important très général de la formulation C^*-algébrique de la mécanique quantique statistique qui fait que, pour un certain β donné, tout état KMS$_\beta$ se décompose *de manière unique* comme une superposition d'états KMS$_\beta$ *extrêmes* :

Proposition 2. ([Br-R] [H]) *Soit (A, σ_t) un système C^*-dynamique et $\beta \in [0, \infty[$. Alors l'espace des états KMS$_\beta$ est un simplexe convexe compact de Choquet. Les points extrêmes sont les facteurs d'états KMS$_\beta$ et, quand ils sont de type I, ils cèdent une énergie libre bien définie.*

Pour un exposé détaillé du lien entre les états KMS$_\beta$ extrêmes et les phases thermodynamiques, nous renvoyons le lecteur à [H].

Comme exemple simple illustrant la coexistence des phases aux températures basses, on peut penser au diagramme des phases de l'eau et de la vapeur ou mieux aux matériaux ferromagnétiques. Dans ce dernier exemple, quand la température T est supérieure à la température *critique* T_c, de l'ordre de $10^3 K$, le désordre domine, alors que pour $T < T_c$, les moments des spins individuels ont tendance à s'aligner les uns avec les autres, ce qui dans le cas classique à 3 dimensions amène un ensemble de phases thermodynamiques homogènes paramétré par la sphère en 2 dimensions des directions dans l'espace à 3 dimensions.

Cet exemple sert à illustrer le phénomène de *brisure spontanée de symétrie* : le groupe $SO(3)$ des rotations dans $\mathbb{R}^3$ est le groupe de symétrie du système dynamique avec lequel on commence et, pour les grandes valeurs de $T, T > T_c$, l'état d'équilibre est unique et par conséquent invariant par rotation. Pour les petites valeurs de T cependant, $T < T_c$, le groupe $SO(3)$ agit de façon non triviale sur l'ensemble des phases thermodynamiques et le choix d'un état d'équilibre brise la symétrie.

La formulation C^*-algébrique de cela est évidente. On a un groupe (compact) G d'automorphismes de la C^*-algèbre A qui commute avec l'évolution temporelle

$$\alpha_g \in \mathrm{Aut}A, \qquad \forall g \in G, \qquad \alpha_g \sigma_t = \sigma_t \alpha_g \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Un tel groupe agit de façon évidente sur l'espace compact convexe des états KMS_β et par conséquent sur ses points extrêmes.

Nous allons maintenant décrire (la motivation précise sera expliquée ci-dessous) un système C^*-dynamique intimement relié à la distribution des nombres premiers et exhibant le comportement ci-dessus de brisure spontanée de symétrie.

La C^*-algèbre A est une *algèbre de Hecke*, qui contient l'algèbre des opérateurs de Hecke usuels de la théorie des nombres, i.e., ceux qui sont reliés aux correspondances de Hecke pour les treillis dans $\mathbb{C}$ ([Sh], [Ser$_1$]). Cette dernière algèbre est commutative et c'est l'algèbre de composition des classes doubles

$$\gamma \in GL(2,\mathbb{Z})\backslash GL(2,\mathbb{Q})/GL(2,\mathbb{Z}).$$

Plus généralement, étant donné un groupe discret Γ et un sous-groupe Γ_0 qui est *presque normal*, c'est-à-dire qui satisfait la condition que

"les orbites de Γ_0 agissant à gauche sur Γ/Γ_0 sont *finies*",

on définit l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}(\Gamma,\Gamma_0)$ comme l'algèbre de convolution de fonctions ($\mathbb{C}$-valuées pour notre objectif) à support fini sur $\Gamma_0\backslash\Gamma/\Gamma_0$. Plus spécifiquement, étant données 2 telles fonctions $f, f' \in \mathcal{H}(\Gamma,\Gamma_0)$, leur convolution est

$$(f * f')(\gamma) = \sum_{\gamma_1 \in \Gamma_0\backslash\Gamma} f(\gamma\gamma_1^{-1}) f'(\gamma_1) \qquad \forall \gamma \in \Gamma.$$

Dans cette formule, f et f' sont vues comme des fonctions Γ_0-bi-invariantes sur Γ et à support fini dans $\Gamma_0\backslash\Gamma/\Gamma_0$.

Pour compléter $\mathcal{H}$ en une C^*-algèbre, on la ferme en norme dans la *représentation régulière* de $\mathcal{H}$ dans $\ell^2(\Gamma_0\backslash\Gamma)$ (cf. [Bi]) :

PROPOSITION 3. Soit $\Gamma_0 \subset \Gamma$ un sous-groupe presque normal du groupe discret Γ. Alors la formule suivante définit une représentation (involutive) λ de $\mathcal{H}(\Gamma,\Gamma_0)$ dans $\ell^2(\Gamma_0\backslash\Gamma)$:

$$(\lambda(f)\xi)(\gamma) = \sum_{\Gamma_0\backslash\Gamma} f(\gamma\gamma_1^{-1})\xi(\gamma_1) \qquad \forall \gamma \in \Gamma_0\backslash\Gamma, \qquad \forall f \in \mathcal{H}.$$

On vérifie que $\lambda(f)$ est bornée pour tout $f \in \mathcal{H}(\Gamma,\Gamma_0)$. L'involution sur $\mathcal{H}$ telle que

$$\lambda(f^*) = \lambda(f)^* \qquad \forall f \in \mathcal{H}$$

est donnée par l'égalité suivante :

$$f^*(\gamma) = \overline{f(\gamma^{-1})} \qquad \forall \gamma \in \Gamma_0\backslash\Gamma/\Gamma_0.$$

Alors, prenons A la C^*-algèbre fermée en norme de $\mathcal{H}(\Gamma,\Gamma_0)$ dans $\ell^2(\Gamma_0\backslash\Gamma)$. Une bonne notation pour cette algèbre, compatible avec le cas des groupes discrets est

$$\overline{\mathcal{H}}(\Gamma,\Gamma_0)=C_r^*(\Gamma,\Gamma_0).$$

Définissons maintenant le groupe à un paramètre d'automorphismes $\sigma_t\in\operatorname{Aut}A$. Nous avons d'abord besoin d'introduire les notations. Puisque toute Γ_0 orbite sur Γ/Γ_0 est finie, nous noterons, pour $\gamma\in\Gamma$

$$\begin{aligned}L(\gamma)&=\text{cardinalité de l'image de } \Gamma_0\gamma\Gamma_0 \text{ dans } \Gamma/\Gamma_0\\ R(\gamma)&=\text{cardinalité de l'image de } \Gamma_0\gamma\Gamma_0 \text{ dans } \Gamma_0\backslash\Gamma.\end{aligned}$$

Alors, par construction, $L(\gamma)\in\mathbb{N}^*$, $R(\gamma)\in\mathbb{N}^*$, $R(\gamma)=L(\gamma^{-1})$, L et R sont toutes deux des fonctions Γ_0-bi-invariantes.

Proposition 4. Soit $\Gamma_0\subset\Gamma$ un sous-groupe presque normal du groupe discret Γ.
Il existe un seul groupe à un paramètre d'automorphismes $\sigma_t\in\operatorname{Aut}(\mathrm{C}_\mathrm{r}^*(\Gamma,\Gamma_0))$ tel que

$$(\sigma_t(f))(\gamma)=\left(\frac{L(\gamma)}{R(\gamma)}\right)^{-it}f(\gamma)\qquad\forall\gamma\in\Gamma_0\backslash\Gamma/\Gamma_0$$

En fait, comme nous le verrons plus tard, σ_{-t} est la réduction du groupe modulaire d'automorphismes σ_t^φ pour l'état sur $M=\lambda(\mathcal{H})''$ donnés par le vecteur unité correspondant à la classe $\Gamma_0\in\Gamma_0\backslash\Gamma$.
Considérons maintenant l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}$ pour les groupes :

$$\Gamma=P_\mathbb{Q}^+,\qquad\Gamma_0=P_\mathbb{Z}^+$$

où P est le groupe des matrices 2×2 défini par $P=\left\{\begin{bmatrix}1&b\\0&a\end{bmatrix};aa^{-1}=a^{-1}a=1\right\}$ et où le $+$ indique que nous nous restreignons aux cas pour lesquels $a>0$. On vérifie que $P_\mathbb{Z}^+$ est presque normal dans $P_\mathbb{Q}^+$ (cf. Lemme 13).
Nous allons maintenant décrire la transition de phase avec brisure spontanée de symétrie pour le système dynamique correspondant à $\Gamma=P_\mathbb{Q}^+,\Gamma_0=P_\mathbb{Z}^+$. Notons par ψ_β la fonction suivante sur le groupe $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Étant donné $n=\frac{a}{b}\in\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, avec $a,b\in\mathbb{Z}$, avec a premier à $b>0$, soit

$$b=\prod_{p\in\mathcal{P}}p^{k_p}$$

la décomposition en facteurs premiers de b et posons

$$\psi_\beta(n)=\prod_{p\in\mathcal{P},k_p\neq0}p^{-k_p\beta}(1-p^{\beta-1})(1-p^{-1})^{-1}.$$

L'inclusion du sous-groupe unipotent

$$\left\{\begin{bmatrix}1&n\\0&1\end{bmatrix};n\in\mathbb{Q}\right\}\subset P_\mathbb{Q}^+$$

définit un plongement $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}\subset\Gamma_0\backslash\Gamma/\Gamma_0$ et des morphismes injectifs d'algèbres involutives

$$\mathbb{C}[\mathbb{Q}/\mathbb{Z}]\subset\mathcal{H}(\Gamma,\Gamma_0)$$

et

$$C^*(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})\subset C_r^*(\Gamma,\Gamma_0).$$

Le résultat principal de cet article est le

THÉORÈME 5. *Soit* (A, σ_t) *le système* C^**-dynamique associé au sous-groupe presque normal* $P_{\mathbb{Z}}^+$ *de* $P_{\mathbb{Q}}^+$. *Alors*

(a) *Pour* $0 < \beta \leq 1$, *il existe un unique état* KMS$_\beta$ φ_β *sur* (A, σ_t). *Sa restriction à* $C^*(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \subset C_r^*(\Gamma, \Gamma_0)$ *est donnée par la fonction ci-dessus de type positif* ψ_β *sur* $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. *Chaque* φ_β *est un facteur d'états et le facteur associé est le facteur hyperfini de type* III$_1$, R_∞.

(b) *Pour* $\beta > 1$ *les états* KMS$_\beta$ *sur* (A, σ_t) *forment un simplexe dont les points extrêmes* $\varphi_{\beta,\chi}$ *sont paramétrés par les plongements complexes* $\chi : \mathbb{Q}^{\mathrm{cycl}} \to \mathbb{C}$ *du sous-corps* $\mathbb{Q}^{\mathrm{cycl}}$ *de* $\mathbb{C}$ *engendré par les racines de l'unité et dont les restrictions à* $C^*(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ *sont données par la formule suivante :*

$$\varphi_{\beta,\chi}(\gamma) = \zeta(\beta)^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\beta} \chi(\gamma)^n$$

Ces états sont des facteurs d'états de type I$_\infty$.

(c) *La fonction de partition est la fonction zêta de Riemann.*

Le facteur de normalisation est l'inverse de la fonction ζ de Riemann évaluée en β. En d'autres termes, la température critique est ici $T_c = 1$ et à basse température ($\beta > 1$), les phases du système sont paramétrées par tous les plongements possibles de $K = \mathbb{Q}^{\mathrm{cycl}}$ dans le corps des nombres complexes.

Comme nous le verrons ci-dessous, le groupe de Galois $G = Gal(\mathbb{Q}^{\mathrm{cycl}}/\mathbb{Q})$ agit naturellement comme un groupe d'automorphismes de $C_r^*(\Gamma, \Gamma_0)$ qui commute avec l'évolution temporelle $(\sigma_t)_{t\in\mathbb{R}}$, et la brisure spontanée de symétrie a lieu pour $\beta > 1$.

Avant que nous ne commencions la démonstration du théorème 5, nous allons expliquer comment le système C^*-dynamique ci-dessus est relié à la distribution des nombres premiers.

2 Seconde quantification des bosons et nombres premiers comme sous-ensemble de $\mathbb{R}$

E. Nelson a dit que la première quantification est un mystère tandis que la seconde est un *foncteur*. Dans le cas des bosons, ce foncteur $\mathbf{S}$, de la catégorie des espaces de Hilbert vers elle-même, assigne à chaque espace de Hilbert $\mathcal{H}$ un nouvel espace de Hilbert $\mathbf{S}\mathcal{H}$ donné par

$$\mathbf{S}\mathcal{H} = \oplus_{n=0}^{\infty} S^n \mathcal{H}$$

où $S^n\mathcal{H}$ est la n-ième puissance symétrique de $\mathcal{H}$ munie du produit intérieur suivant :

$$\langle \xi_1 \dots \xi_n, \eta_1 \dots \eta_n \rangle = \sum_{\sigma} \prod_{1}^{n} \langle \xi_i, \eta_{\sigma(i)} \rangle \qquad \forall \xi_j, \eta_j \in \mathcal{H}$$

(voir par exemple [G]). Étant donné un opérateur T dans $\mathcal{H}$ (plus généralement $T : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$), l'opérateur $\mathbf{S}T$ dans $\mathbf{S}\mathcal{H}$ est donné par

$$(\mathbf{S}T)(\xi_1 \dots \xi_n) = (T\xi_1)(T\xi_2) \dots (T\xi_n) \qquad \forall \xi_i \in \mathcal{H}.$$

Même si T est borné, $\mathbf{S}T$ n'est pas borné en général mais si T est auto-adjoint (non-borné), il en est de même de $\mathbf{S}T$. Aussi, nous travaillerons avec de tels opérateurs. On a la formule suivante :

$$\mathrm{Trace}(\mathbf{S}T) = \frac{1}{\det(1-T)} \qquad (*)$$

qui fait sens si $\|T\| < 1$ et $T \in \mathcal{L}^1(\mathcal{H})$.

Le problème que nous allons maintenant étudier est le suivant : trouver une caractérisation simple des opérateurs auto-adjoints T dans $\mathcal{H}$ dont le spectre est le sous-ensemble $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}$ formé de tous les nombres premiers, chacun avec une multiplicité de 1 :

$$P = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, ...\} \subset \mathbb{R}.$$

Le problème correspondant pour l'ensemble $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$ des entiers naturels, ou pour $\mathbb{N}^* = \mathbb{N}\backslash\{0\}$, est plus facile, et a été résolu dans l'article de Dirac [Dir] qui a inauguré la théorie quantique des champs. Dans ce cas, la solution est simplement qu'il existe un opérateur a tel que

$$aa^* - a^*a = 1, \qquad a^*a = T.$$

(Pour $\mathbb{N}^*$, il est nécessaire que aa^* soit égal à T). Établissons maintenant le résultat pour le sous-ensemble $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}$:

Lemme 6. *Soit T un opérateur auto-adjoint dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$; alors (en comptant les multiplicités)*

$$\text{Spectrum T} = \mathcal{P} \iff \text{Spectrum } \mathbf{S}\text{T} = \mathbb{N}^*.$$

Preuve. Assumons d'abord que Spectre $\mathbf{S}T = \mathbb{N}^*$. Alors, comme généralement Spec $T \subset$ Spec $\mathbf{S}T$, (en utilisant l'inclusion $\mathcal{H} \subset \mathbf{S}\mathcal{H}$), on voit que $\sum = \mathrm{Spec}(T) \subset \mathbb{N}^*$. Montrons que $\mathcal{P} \subset \sum$. Effectivement, prenons $p \in \mathcal{P}$ et qui n'est pas dans $\sum$. Alors, puisque $\sum \subset \mathbb{N}^*$, on a $p \notin \sum^n$ pour tout n (avec $\sum^n = \{k_1 k_2 \dots k_n;\ k_j \in \sum\}$). Cela montre que $p \notin \mathrm{Spec}(\mathbf{S}T) = \cup \sum^n$, d'où une contradiction. Ainsi $\mathcal{P} \subset \sum$. Si $k \in \sum\backslash\mathcal{P}$, alors puisque $k \in \mathcal{P}^n$ pour un certain $n > 1$, cela signifierait que k n'est pas une valeur propre simple pour $\mathbf{S}T$. Ainsi $\mathcal{P} = \sum$. L'inverse est évident et découle du théorème d'Euclide d'unicité de la factorisation, mais fixons les notations correspondantes : appelons $\mathcal{H}_1 = \ell^2(\mathcal{P})$ l'espace de Hilbert de base $(\varepsilon_p)_{p\in\mathcal{P}}$, et identifions-le au sous-espace à une particule de $\mathbf{S}\mathcal{H}_1 = \ell^2(\mathbb{N}^*)$, l'espace de Hilbert des séquences de carré intégrable de nombres complexes, avec la base canonique $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. On note T l'opérateur :

$$T : \ell^2(\mathcal{P}) \to \ell^2(\mathcal{P}) \ ; \ T\varepsilon_p = p\varepsilon_p \qquad \forall p \in \mathcal{P}$$

et $\mathbf{S}T$ l'opérateur correspondant

$$\mathbf{S}T : \ell^2(\mathbb{N}^*) \to \ell^2(\mathbb{N}^*) \ ; \ (\mathbf{S}T)\varepsilon_n = n\varepsilon_n \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Posons $H = \log(\mathbf{S}T)$. C'est le générateur du groupe unitaire à un paramètre $U_t = \exp(itH) = T^{it}$, dont le rôle est rendu clair par le cas particulier suivant de la formule (*) qui est la formule du produit eulérien pour la fonction ζ de Riemann :

$$\text{Pour Re } s > 1\ ; \zeta(s) = \mathrm{Trace}(\mathbf{S}T)^s = \frac{1}{\det(1-T^s)}.$$

La signification du Lemme 6 est que le sous-ensemble $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}$ a une définition agréable à condition qu'on soit prêt à utiliser le formalisme de *la théorie quantique des champs de bosons.* Ce formalisme contient *l'algèbre* des opérateurs de création et destruction, respectivement $a^*(\xi)$ et $a(\eta)$, pour $\xi, \eta \in \mathcal{H}$, donnés par

$$\begin{aligned} a^*(\xi)\xi_1 \dots \xi_n &= \xi\xi_1 \dots \xi_n \qquad \forall \xi_j \in \mathcal{H} \\ a(\eta) &= (a^*(\eta))^*. \end{aligned}$$

Le formalisme inclut également l'*évolution temporelle*, selon le schéma d'Heisenberg, donné par

$$\sigma_t(x) = U_t \; x \; U_t^* = e^{itH} \; x \; e^{-itH}$$

Dans notre cas, la C^*-algèbre correspondante dans $\mathbf{S}\mathcal{H} = \ell^2(\mathbb{N}^*)$ et l'évolution temporelle sont données par la :

Proposition 7.

(a) Pour tout $p \in \mathcal{P}$, soit μ_p l'isométrie dans $\ell^2(\mathbb{N}^*)$ donnée par la décomposition polaire de l'opérateur de création associé au vecteur unité $\varepsilon_p \in \mathcal{H}$. La C^*-algèbre $C^*(\mathbb{N}^*)$ engendrée par les μ_p est la même que celle engendrée par les isométries $\mu_n, n \in \mathbb{N}^*$, qui est définie par

$$\mu_n \varepsilon_k = \varepsilon_{kn} \qquad \forall k \in \mathbb{N}^*.$$

(b) Cette C^*-algèbre est le produit tensoriel infini

$$C^*(\mathbb{N}^*) = \bigotimes_{p \in \mathcal{P}} \tau_p$$

où chaque τ_p est la C^*-algèbre engendrée par μ_p et est la C^*-algèbre de Toeplitz.

(c) L'égalité $\sigma_t(x) = e^{itH} \; x \; e^{-itH}, \forall x \in C^*(\mathbb{N}^*), t \in \mathbb{R}$, où $H = \log(\mathbf{S}T)$, définit un groupe à un paramètre d'automorphismes de $C^*(\mathbb{N}^*)$ donné comme

$$\sigma_t = \otimes_{p \in \mathcal{P}} \sigma_{t,p} \; ; \sigma_{t,p}(\mu_p) = p^{it} \mu_p \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Preuve.
(a) Par construction, μ_p est le décalage d'un côté dans l'espace de Hilbert $S\mathbb{C}\varepsilon_p$ tensorisé par l'identité dans chacun des espaces de Hilbert $S\mathbb{C}\varepsilon_q, q \neq p$ dans la décomposition

$$S\mathcal{H} = \bigotimes_{q \in \mathcal{P}} S\mathbb{C}\varepsilon_q.$$

Par rapport aux bases (ε_n) de $S\mathcal{H}$, on a alors

$$\mu_p \varepsilon_n = \varepsilon_{pn} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

de telle façon que (a) en découle.

(b) On rappelle que la C^*-algèbre de Toeplitz τ est la C^*-algèbre définie par un générateur unique u satisfaisant la relation $u^*u = 1$. Si u est une quelconque isométrie non-unitaire dans un espace de Hilbert (séparable), la plus petite C^*-algèbre contenant u est isomorphe à τ. Cette C^*-algèbre est nucléaire de telle façon que les produits tensoriels finis $\bigotimes_{p \leq n} \tau_p$, sont définis de manière non-ambigue.

La C^*-algèbre $\bigotimes_{p\in\mathcal{P}} \tau_p$ est leur limite inductive. Maintenant pour chaque p, l'isométrie μ_p engendre τ_p dans $S\mathbb{C}\varepsilon_p$ et puisque les produits tensoriels finis $\bigotimes_{p\leq n} \tau_p$ sont représentés fidèlement dans $\mathcal{H}$, on obtient (b).

(c) découle d'un calcul direct.

Le système C^*-dynamique ainsi obtenu n'est pas très intéressant parce qu'il est sans interaction (voir Proposition 8 (a)). Néanmoins, les uniques états KMS_β associés seront utiles plus tard et sont donnés par le corollaire suivant de la Proposition 1 et par la classification d'Araki-Woods des ITPFI.

Proposition 8.

(a) *Pour tout $\beta > 0$, il existe un unique état KMS_β sur $(C^*(\mathbb{N}^*), \sigma_t)$. C'est le produit tensoriel infini*

$$\varphi_\beta = \otimes_{p\in\mathcal{P}} \varphi_{\beta,p}$$

où $\varphi_{\beta,p}$ est l'unique état KMS_β sur $(\tau_p, \sigma_{t,p})$ pour $\sigma_{\beta,p}$. La liste des valeurs propres de $\varphi_{\beta,p}$ est

$$\{(1-p^{-\beta})p^{-n\beta}\,;n\in\mathbb{N}\}.$$

(b) *Pour $\beta > 1$, l'état φ_β est de type I_∞ et est donné par*

$$\varphi_\beta(x) = \zeta(\beta)^{-1}\mathrm{Trace}(e^{-\beta H}x) \qquad \forall x \in C^*(\mathbb{N}^*).$$

(c) *Pour $\beta = 1$, l'état φ_β est un facteur d'états de type III_1 donné par*

$$\varphi_\beta(x) = \mathrm{Trace}_\omega(e^{-H}x) \qquad \forall x \in C^*(\mathbb{N}^*)$$

où Trace_ω *est la trace de Dixmier.*

(d) *Pour $0 < \beta \leq 1$, φ_β est un facteur d'états de type III_1, et le facteur associé est le facteur R_∞ d'Araki-Woods.*

L'assertion (d) pour $\beta = 1$ est due à B. Blackadar ([Bl]). Nous renvoyons le lecteur à [Co] IV.2 pour la définition de la trace de Dixmier, dont les propriétés générales rendent clair que l'égalité (c) définit un état KMS_1.

Preuve. (a) Montrons d'abord qu'il existe un unique état KMS_β sur τ_p pour le groupe $\sigma_{t,p}$. On définit τ_p comme la C^*-algèbre dans $\ell^2(\mathbb{N})$ engendrée par le décalage d'un seul côté S, alors que $\sigma_{t,p}(S) = p^{it}S$ est le groupe à un paramètre d'automorphismes. D'abord soit $\varphi_{\beta,p}$ la restriction à τ_p de l'état sur $\mathcal{L}(\ell^2(\mathbb{N}))$ donnée par

$$\varphi(A) = \sum_{n\in\mathbb{N}} A_{n,n}\nu(n)$$

où $\nu(n) = p^{-n\beta}\left(\sum_{m=0}^{\infty} p^{-m\beta}\right)^{-1}$.

On vérifie que $\varphi_{\beta,p}$ est un état KMS_β sur τ_p. Inversement, soit φ un état KMS_β sur τ_p. Alors la condition d'état KMS_β montre que φ s'évanouit sur tout vecteur propre $A \in \tau_p$,

$$\sigma_{t,p}(A) = \lambda^{it}A \qquad \forall t\in\mathbb{R}, \text{ à condition que } \lambda \neq 1.$$

Cela montre aussi que $\varphi(SS^*) = \varphi(S^* \ \sigma_{-i\beta}(S)) = p^{-\beta}\varphi(S^*S) = p^{-\beta}$ de telle manière que $\varphi(1-SS^*) = 1-p^{-\beta}$. Plus généralement, on a pour tout $k,\ell \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\varphi(S^k S^{*\ell}) \ &= 0 \qquad \text{si} \quad k \neq \ell \\ &= p^{-k\beta} \quad \text{si} \quad k = \ell.\end{aligned}$$

Cela montre l'unicité de $\varphi = \varphi_{\beta,p}$ sur l'idéal $\mathcal{K}$ des opérateurs compacts, $\mathcal{K} \subset \tau_p$.
Ainsi, la différence $\psi = \varphi - \varphi_{\beta,p}$ s'évanouit sur $\mathcal{K}$ et est une forme linéaire continue sur la C^*-algèbre quotient $\tau_p/\mathcal{K} = C(S^1)$. Nous avons vu que $\varphi(S^n) = \varphi_{\beta,p}(S^n) = 0$ pour tout $n > 0$ et similairement pour $(S^*)^n$ de telle manière que $\psi = 0$ et $\varphi = \varphi_{\beta,p}$.
L'unicité de φ_β découle alors d'un argument général pour les produits tensoriels : Soit (A, σ_t^A) et (B, σ_t^B) des systèmes C^*-dynamiques et φ un état KMS$_\beta$ sur $(A \otimes B, \sigma_t^A \otimes \sigma_t^B)$. Alors pour tout $b \in B$, la fonctionnelle sur A

$$\varphi_b(a) = \varphi(a \otimes b)$$

est KMS$_\beta$ sur A. Par conséquent, pour tout $x, y \in A$, on a

$$\begin{aligned}\varphi(\sigma_t^A(x) y \otimes b) &= \varphi(\sigma_t^{A\otimes B}(x \otimes 1)(y \otimes b)) \\ \varphi(y \sigma_t^A(x) \otimes b) &= \varphi(y \otimes b)\sigma_t^{A\otimes B}(x \otimes 1)).\end{aligned}$$

(b) On utilise la finitude de Trace$(e^{-\beta H})$ pour $\beta > 1$.

(c) Par construction, on a un produit tensoriel infini de facteurs de type I avec comme liste de valeurs propres

$$\lambda_{p,n} = p^{-n\beta}(1 - p^{-\beta}) \ ;$$

et ainsi, l'assertion (c) découle de [A-W].

(d) On vérifie directement la condition KMS$_1$, et les mêmes arguments que ceux utilisés pour (c) montrent que φ_1 est de type III$_1$.

3 Produits d'arbres et algèbres de Hecke non-commutatives

Dans cette section, nous allons relier le système C^*-dynamique $(C^*(\mathbb{N}^*), \sigma_t)$ de la section 2 avec des notions de la théorie basique des nombres [We$_2$] et obtenir le système dynamique de Hecke du Théorème 5.

Soit P le groupe $ax+b$, i.e. le groupe des matrices triangulaires 2×2 de la forme $\begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & a \end{bmatrix}$, avec a inversible. Nous le voyons comme un groupe algébrique sur $\mathbb{Z}$, i.e. comme un foncteur $A \to P_A$ des anneaux commutatifs vers les groupes. Il joue un rôle important dans la classification élémentaire des corps localement compacts (commutatifs et non discrets) (cf. [We$_2$]). En effet, étant donné un tel corps K, alors le groupe $G = P_K$ est un groupe *localement compact*, et de ce fait, il a un module

$$\delta : G \to \mathbb{R}_+^*$$

défini par le manque d'invariance de la mesure de Haar à gauche dg sur G par les translations à droite :

(1) $$d(gk) = \delta(k) dg \qquad \forall \in G$$

(ou, de manière équivalente $d(g)^{-1} = \delta(g)^{-1} dg$ comme mesures sur G).

Ce module $\delta : P_K \to \mathbb{R}_+^*$ vaut 1 sur le groupe additif et sa restriction au groupe multiplicatif (étendu par 0 sur $K \backslash K^*$) amène une application multiplicative propre continue

$$\mathrm{mod}_K : K = \mathbb{R}_+. \tag{2}$$

En fait, si dx désigne la mesure de Haar sur le groupe additif (localement compact) K, on a

$$d(ax) = \mathrm{mod}_K(a)dx \qquad \forall a \in K^*.$$

De plus, les ensembles ouverts $\{k \in K; \mathrm{mod}_K(k) < \varepsilon\}$ forment une base de voisinages de 0. L'image de δ est un sous-groupe fermé de $\mathbb{R}_+^*$ et excepté dans le cas de corps archimédiens $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, ce sous-groupe fermé est discret et égal à $\lambda^{\mathbb{Z}}$ pour un certain $\lambda \in]0,1[$ dont l'inverse $q = \lambda^{-1}$ est appelé le *module* de K. La fonction sur $K \times K$ $d(x,y) := \mathrm{mod}_K(x-y)$ est alors une distance ultramétrique qui donne en retour la topologie de K ([We$_2$]). En d'autres mots, on a la :

Proposition 9. (cf. [We$_2$]) *Soit K un corps localement compact non-discret commutatif, $K \neq \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Alors il existe un nombre premier p tel que $\mathrm{mod}_K(p) < 1$. Appelons R, R^* et P les sous-ensembles de K définis respectivement par*

$$\begin{aligned} R &= \{x \in K; \mathrm{mod}_K(x) \leq 1\}, \\ R' &= \{x \in K; \mathrm{mod}_K(x) = 1\}, \\ J &= \{x \in K; \mathrm{mod}_K(x) < 1\}. \end{aligned}$$

Alors R est le sous-anneau compact maximal de K; R^* est le groupe des éléments inversibles de R ; J est l'unique idéal maximal de R, et il existe $\pi \in J$ tel que $J = \pi R = R\pi$. La topologie sur le groupe topologique K est l'unique topologie (ultramétrique) telle que les idéaux $\pi^n R$ forment une base de voisinages de 0. De plus, le corps de restes $k = R/J$ est un corps fini de caractéristique p ; si q est le nombre de ses éléments, l'image de K^* dans R_+^* sous mod_K est le sous-groupe de $\mathbb{R}_+^*$ engendré par q.

Étant donné $x \in K$, l'entier $v(x)$ tel que $\mathrm{mod}_K(x) = q^{-v(x)}$ est appelé la *valuation* de x.

Comme exemple basique, le corps $\mathbb{Q}_p$ des nombres p-adiques est défini (étant donné p un nombre premier quelconque), comme la complétion du corps $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels pour la fonction de distance :

$$d(x,y) = |x-y|_p \tag{3}$$

où pour $x \in \mathbb{Q}, x = p^n \, \frac{a}{b}$ (avec n, a, b des nombres entiers et a, b premiers à p), on pose

$$|x|_p = p^{-n} \tag{4}$$

Le sous-anneau maximal R de $K = \mathbb{Q}_p$ est l'anneau $\mathbb{Z}_p$ des entiers p-adiques et le corps résiduel $k = R/J$ est le corps fini $\mathbb{F}_p$.

De cette manière, on obtient, avec l'inclusion $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, toutes les inclusions $\mathbb{Q} \subset K$ du corps des nombres rationnels comme un sous-corps dense d'un corps local K. De telles inclusions (ou plutôt, en général, les classes d'équivalence des complétions) sont appelées *places* et pour distinguer les places réelles $Q \subset \mathbb{R}$ des autres, ces dernières sont appelées *places finies*.

En mettant ensemble les inclusions de $\mathbb{Q}$ dans ses complétions $\mathbb{Q}_v = K$ paramétrisées par les places de $\mathbb{Q}$, on obtient une seule inclusion de $\mathbb{Q}$ dans l'anneau commutatif *localement compact* des *adèles* qui est le produit restreint des corps $\mathbb{Q}_v$. Plus spécifiquement, cet anneau est le produit $\mathbb{R} \times \mathcal{A}$ où l'anneau $\mathcal{A}$ des adèles *finies* est obtenu comme suit :

(a) Les éléments x de $\mathcal{A}$ sont les familles arbitraires $(x_p)_{p\in\mathcal{P}}$ avec $x_p \in \mathbb{Q}_p$, telles que $x_p \in \mathbb{Z}_p$ pour tout p sauf pour un nombre fini d'entre eux.

(b) $(x + y)_p = x_p + y_p$; $(xy)_p = x_p y_p$ définit l'addition et le produit dans $\mathcal{A}$.

(c) Finalement, $\mathcal{A}$ a l'unique topologie d'un anneau localement compact tel que le sous-anneau

$$\mathcal{R} = \prod_{p\in\mathcal{P}} \mathbb{Z}_p,$$

est ouvert et fermé et hérite de la topologie de produit compact.

Nous allons maintenant relier le système C^*-dynamique $(C^*(\mathbb{N}^*), \sigma_t)$ de la section 2 avec l'anneau localement compact $\mathcal{A}$ des adèles finies.

Nous avons seulement besoin de rappeler que, un groupe G quelconque localement compact étant donné, avec une fonction modulaire $\delta : G \to \mathbb{R}_+^*$, on a un groupe naturel à un paramètre d'automorphismes σ_t de $C^*(G)$ donné par la formule suivante valide sur $L^1(G)$:

$$(\sigma_t(f))(g) = \delta(g)^{-it} f(g) \qquad \forall g \in G, t \in \mathbb{R} \tag{5}$$

Ce groupe d'automorphismes définit aussi un groupe d'automorphismes de la C^*-algèbre réduite $C_r^*(G)$, et le groupe σ_{-t} est le groupe modulaire d'automorphismes du poids de Plancherel sur $C^*(G)$.

Proposition 10. *Soit $\mathcal{A}$ l'anneau des adèles finies sur $\mathbb{Q}$, et $\mathcal{R}$ son sous-anneau compact maximal (ouvert). Soit G le groupe localement compact $G = P_{\mathcal{A}}$, et $e \in C^*(G)$ la fonction caractéristique du sous-groupe compact et ouvert $P_{\mathcal{R}} \in P_{\mathcal{A}}$. Alors :*

(1) On a $e = e^* = e^2$, et la C^*-algèbre réduite $C^*(G)_e = \{x \in C^*(G) \; ; ex = xe = x\}$ est canoniquement isomorphe à la C^*-algèbre $C^*(\mathbb{N}^*)$ de la section 2.

(2) On a $\sigma_t(e) = e \quad \forall t \in \mathbb{R}$, et la restriction de σ_t à la C^*-algèbre réduite $C^*(\mathbb{N}^*)$ est l'évolution temporelle de la section 2.

Nous pensons à la fonction caractéristique de $P_{\mathcal{R}}$ comme à un élément de $L^1(G, dg) \subset C^*(G)$, avec dg l'unique mesure de Haar à gauche qui attribue la mesure 1 à $P_{\mathcal{R}}$. Le groupe G est résoluble et par conséquent moyennable de telle manière qu'il n'y a pas de différence entre $C^*(G)$ et la C^*-algèbre réduite $C_r^*(G)$.

La preuve de la Proposition 10 se réduit immédiatement à une assertion *locale*, notamment : si $K = \mathbb{Q}_p$ et $R \subset K$ est le sous-anneau compact maximal, le système C^*-dynamique $(C^*(P_K), \sigma_t)$ donné par (5), réduit par la projection e_p définie comme la fonction caractéristique de P_R, est isomorphe à la C^*-algèbre de Toeplitz τ_p, avec l'évolution temporelle $\sigma_{t,p}$ de la Proposition 7 (c).

Pour vérifier cela, on utilise les isomorphismes

$$C^*(P_K) \cong C^*(K) \rtimes K^* \cong C_0(K) \rtimes K^*$$

donnés par l'identification du groupe additif K avec son dual de Pontrjagin (cf. [We$_2$] ; nous utilisons dans la suite les mêmes normalisations pour la mesure de Haar et la transformation de Fourier sur K que dans *loc.cit.*, notamment la mesure de Haar de $R = \mathbb{Z}_p$ vaut 1, et l'identification de K à son dual de Pontrjagin est telle que $R^\perp = R$). Alors, à e_p correspond l'élément du produit croisé donné par $\int_{R^*} 1_R U_g dg$. La C^*-algèbre réduite $C^*(PK)_{e_p}$ est alors engendrée par l'isométrie $\mu_p, \mu_p \in C^*(P_{\mathbb{Q}_p})_{e_p}$, donnée par la fonction L^1 suivante :

$$\mu_p\left(\begin{bmatrix}1 & b\\ 0 & a\end{bmatrix}\right) = 1 \text{ si } b \in \mathbb{R},\ \ \mathrm{val}(a) = 1, \text{ et est égal à } 0 \text{ sinon.} \tag{6}$$

Vérifions que μ_p est une isométrie, i.e. que $\mu_p^*\mu_p = e_p$. La mesure de Haar à gauche sur P_K est donnée par $d\begin{bmatrix}1 & b\\ 0 & a\end{bmatrix} = dbd^*a$ où d^*a est la mesure de Haar multiplicative normalisée de telle manière que $\int_{R^*} d^*a = 1$. Le module δ du groupe localement compact P_K est donné par $\delta\left(\begin{bmatrix}1 & b\\ 0 & a\end{bmatrix}\right) = |a|$. L'adjoint μ_p^* de μ_p est donné par la fonction

$$\mu_p^*(g) = \overline{\mu_p(g^{-1})}\delta(g^{-1}). \tag{7}$$

Ainsi, la convolution $\mu_p^* * \mu_p$ est donnée par l'intégrale

$$(\mu_p^* * \mu_p)(g) = \int_{P_K} \overline{\mu_p(g_1)}\mu_p(g_1 g) \tag{8}$$

Celle-ci s'évanouit à moins que $g \in P_R$, ce que l'on peut voir en utilisant $g = g_1^{-1}g_2$ pour $\mu_p(g_i) = 1$. Avec $g_i = \begin{bmatrix}1 & b_i\\ 0 & a_i\end{bmatrix}$, on obtient $g_1^{-1}g_2 = \begin{bmatrix}1 & -a_1^{-1}b_1\\ 0 & a_1^{-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & b_2\\ 0 & a_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & b_2 - a_2a_1^{-1}b_1\\ 0 & a_1^{-1}a_2\end{bmatrix} \in P_R$. De plus, l'intégrale $\int_{P_K} \mu_P(g)$ est égale à 1 de telle manière qu'on obtient $\mu_p^* * \mu_p = e_p$.

On a $\sigma_t(\mu_p)(g) = 0$ à moins que $g = \begin{bmatrix}1 & b\\ 0 & a\end{bmatrix}, \mathrm{val}(a) = 1, b \in R$, et pour de tels g, on a $\sigma_t(\mu_p)(g) = \delta(g)^{-it}\mu_p(g) = |a|^{-it}\mu_p(g) = p^{it}\mu_p(g)$. Ainsi $\sigma_t(\mu_p = p^{it}\mu_p$.

Nous pouvons aussi écrire l'état $\varphi_{\beta,p}$ sur $C^*(P_K)_{e_p}$ en termes de fonctions bi-invariantes. On obtient l'identité suivante pour tout $f \in C^*(P_K)_{e_p}$:

$$\varphi_{\beta,p}(f) = f\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right) + \left(\sum_{k>0} p^{k(1-\beta)} f\left(\begin{bmatrix}1 & p^{-k}\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right)\right)(1 - p^{\beta-1}) \tag{9}$$

(Observer que les éléments de $C^*(P_K)$ peuvent être identifiés à des fonctions P_R-bi-invariantes dans $L^2(P_K)$, et par conséquent à des fonctions localement constantes sur P_K ; en particulier, elles ont des valeurs bien définies sur les points de P_K). Selon la Proposition 8 (a) et sa preuve, pour démontrer (9), on a seulement besoin de vérifier que la fonctionnelle linéaire sur $C_c(P_K)_{e_p}$, définie par le côté droit de (9), satisfait la condition KMS$_\beta$; cela découle d'un calcul évident.

Le système C^*-dynamique $(C^*(P_{\mathcal{A}}), \sigma_t)$ de la Proposition 10 est sans interaction, exactement comme $(C^*(\mathbb{N}^*), \sigma_t)$ (Proposition 8), et il y a l'exacte analogue de la Proposition 8, qui établit l'existence et l'unicité (à un facteur d'échelle près) des *poids* KMS_β sur le système ci-dessus. On a besoin d'utiliser les poids car on travaille avec des C^*-algèbres non unitaires. D'un point de vue technique, de tels poids doivent être semi-continus et semi-finis (pour la topologie de la norme) (cf. [Com]). C'est cependant instructif de travailler sur la formule explicite pour ces poids KMS_β. En utilisant l'isomorphisme naturel du dual de Pontrjagin $\widehat{\mathcal{A}}$ du groupe additif $\mathcal{A}$ à lui-même (cf. [We$_2$]), on obtient un isomorphisme

$$C^*(P_\mathcal{A}) = C_0(\mathcal{A}) \rtimes \mathcal{A}^* \tag{10}$$

où le groupe multiplicatif $\mathcal{A}^*$ des idèles finies agit par des homothéties dans l'espace localement compact $\mathcal{A}$. Le poids KMS_β sur $C^*(P_\mathcal{A}), \sigma_t$ est alors le poids dual de la mesure suivante μ_β sur $\mathcal{A}$:

$$\mu_\beta(f) = \zeta(\beta)^{-1} \int_{\mathcal{A}^*} |j|^\beta f(j) d^*j \tag{11}$$

Ici d^*j est la mesure de Haar sur le groupe multiplicatif $\mathcal{A}^*, j \to |j|$ est le module, et la formule fait sens ainsi pour $\beta > 1$, et par prolongement analytique pour $0 < \beta < 1$ (cf. [T], [We$_1$], [We$_2$]).

Il est clair que pour obtenir un système C^*-dynamique *avec interaction*, nous avons besoin d'utiliser non seulement l'anneau localement compact $\mathcal{A}$ mais également l'inclusion fondamentale

$$\mathbb{Q} \subset \mathcal{A}. \tag{12}$$

Nous utiliserons l'inclusion correspondante $P_\mathbb{Q} \subset P'_\mathcal{A} = G$ et l'action de $P_\mathcal{A}$ sur le C^*-module $\mathcal{E} = C^*(G)e$ sur $C^*(\mathbb{N}^*)$ donné par l'isomorphisme de la Proposition 10 : $C^*(G)_e = C^*(\mathbb{N}^*)$. En effet, quelle que soit la C^*-algèbre B et la projection (auto-adjointe) $e \in B$, l'espace $\mathcal{E} = Be = \{x \in B \,; xe = x\}$ est de manière naturelle un C^*-module (à droite) sur la C^*-algèbre réduite $B_e = \{x \in B; ex = xe = x\}$. Ainsi, on définit

$$\langle \xi, \eta \rangle = \xi^* \eta \in B_e, \qquad \forall \xi, \eta \in \mathcal{E} = Be \tag{13}$$

$$\xi a \in \mathcal{E}, \qquad \forall \xi \in \mathcal{E}, \qquad a \in B_e.$$

Ce C^*-module a de plus une structure naturelle à gauche de B-module, donnée par $(b, \xi) \to b\xi \in \mathcal{E}, \forall b \in B, \xi \in \mathcal{E}$.

Dans notre cas, $\mathcal{E} = C^*(G)e$ est un espace de fonctions sur G qui sont invariantes par multiplications à droite par des éléments de $P_\mathcal{R} \subset G$, ou, en d'autres termes, c'est un espace de fonctions sur l'espace homogène

$$\Delta = G/P_\mathcal{R}. \tag{14}$$

Cet espace Δ est par construction le produit restreint des espaces

$$\Delta_p = P_{\mathbb{Q}_p}/P_{\mathbb{Z}_p} \tag{15}$$

relativement au point de base donné par $P_{\mathbb{Z}_p}$.

Proposition 11. *L'espace homogène $\Delta_p = P_{\mathbb{Q}_p}/P_{\mathbb{Z}_p}$ sur le groupe $P_{\mathbb{Q}_p} \subset GL(2, \mathbb{Q}_p)$ est naturellement isomorphe à l'(ensemble des sommets de l')arbre de $SL(2, \mathbb{Q}_p)$. Le groupe $P_{\mathbb{Q}_p}$ agit par les* *isométries de Δ_p, et préserve un point à l'∞.*

Rappelons (cf. [Ser$_2$]) que l'arbre de $SL(2,K)$, où K est un corps local, est défini en termes de classes d'équivalence des treillis dans un espace vectoriel de dimension 2 noté V sur K. Avec les notations de la Proposition 9, un treillis $L \subset V$ est un R-sous-module de V qui est de type fini et engendre V comme un espace vectoriel. Le groupe multiplicatif K^* opère sur l'ensemble des treillis par $(L,x) \to xL$ pour $x \in K^*$, et on définit T comme l'ensemble des orbites de cette action de K^*. Étant donné un treillis $L \subset V$ et une classe $\Lambda' \in T$, il existe un unique représentant $L' \in \Lambda'$ tel que $L' \subset L$ et $L' \not\subset \pi L$ (avec π donné par la Proposition 9). Alors $L/L' = R/\pi^n R$ et l'entier n, qui dépend seulement des classes de L et L', définit une distance d sur T, par l'égalité

$$d(\text{classe de } L, \text{ classe de } L') = n. \tag{16}$$

En utilisant l'ensemble des paires à distance mutuelle égale à 1 pour définir un complexe simplicial à une dimension, on obtient un arbre, l'arbre de $SL(2,K)$, et la distance ci-dessus est la longueur de l'unique plus court chemin injectif joignant les deux éléments de cet arbre (cf. [Ser$_2$]). Le groupe $GL(V)$ des automorphismes de l'espace vectoriel V agit sur l'ensemble des treillis par

$$(L,g) \to gL \qquad \forall g \in GL(V), \tag{17}$$

et, comme cette action commute avec celle de K^*, elle donne une action, par isométries, de $GL(V)$ sur l'arbre T. Identifions V avec K^2, $GL(V)$ avec $GL(2,K)$, et considérons P_K comme un sous-groupe de $GL(2,K)$: $P_K = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & a \end{bmatrix} ; a \in K^*, b \in K \right\}$. Soit L_0 le treillis $R^2 \subset K^2$. Alors on vérifie que P_K agit transitivement sur T et que le stabilisateur de la classe de L_0 est P_R. Nous obtenons ainsi une identification canonique $T = P_K/P_R$. En prenant $K = \mathbb{Q}_p$, on aboutit à la conclusion.

Proposition 12.

(1) *L'espace homogène $G/P_{\mathcal{R}} = \Delta$ équipé du point de base $P_{\mathcal{R}}$ est canoniquement isomorphe au produit restreint des arbres T_p équipé des points de base $P_{\mathbb{Z}_p}$, et l'action de G sur Δ est simpliciale.*

(2) *Le sous-groupe $P_{\mathbb{Q}}^+ \subset P_{\mathcal{A}} = G$ agit transitivement sur Δ, et le sous-groupe d'isotropie du point de base $*$ est $P_{\mathbb{Z}}^+$.*

Preuve. (1) Puisque à la fois P_A et P_R sont des produits restreints, la preuve de (1) est évidente.

(2) D'abord, $\mathbb{Q}$ est dense dans le groupe additif $\mathcal{A}$ des adèles (si on enlève la place à l'∞), (cf. [Ser$_1$]).

Le sous-groupe $\mathbb{Q}_+^*$ de $\mathcal{A}^*$ est discret et on a $\mathcal{A}^* = \mathbb{Q}_+^* \mathcal{R}^*$ où $\mathcal{R}^* = \{(x_p) \, ; \mathrm{val}(x_p) = 0 \ \ \forall p\}$ est un sous-groupe compact de $\mathcal{A}^*$ (cf. [We$_2$]).

Considérons la séquence exacte de groupes

$$0 \to \mathcal{A} \to P_{\mathcal{A}} \overset{\rho}{\to} \mathcal{A}^* \to 1. \tag{18}$$

La fermeture de $P_{\mathbb{Q}}^{+}$ dans $P_{\mathcal{A}}$ est donnée par $\rho^{-1}(\mathbb{Q}_{+}^{*})$. Ainsi, $\overline{P}_{\mathbb{Q}}^{+} = \mathcal{A} \rtimes \mathbb{Q}_{+}^{*}$. Étant donné $g = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & h \end{bmatrix} \in P_{\mathcal{A}}$, on peut écrire $h = rs$ avec $r \in \mathbb{Q}_{+}^{*}, s \in \mathcal{R}^{*}$, alors

$$g = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & ns^{-1} \\ 0 & r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} \in \overline{P}_{\mathbb{Q}}^{+} P_{\mathcal{R}}$$

Ainsi $g \in P_{\mathbb{Q}}^{+} P_{\mathcal{R}}$ et puisque $P_{\mathcal{R}}$ est ouvert dans $P_{\mathcal{A}}$, on obtient $g \in P_{\mathbb{Q}}^{+} P_{\mathcal{R}}$. Ainsi $P_{\mathcal{A}} = P_{\mathbb{Q}}^{+} P_{\mathcal{R}}$ et $P_{\mathbb{Q}}^{+}$ agit transitivement sur Δ.
Finalement, le sous-groupe d'isotropie du point de base $* = P_{\mathcal{R}}$ est donné par

$$P_{\mathbb{Q}}^{+} \cap P_{\mathcal{R}} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} ; n \in \mathbb{Z} \right\} = P_{\mathbb{Z}}^{+}$$

Nous pouvons alors identifier Δ avec $P_{\mathbb{Q}}^{+}/P_{\mathcal{Z}}$, et nous allons maintenant obtenir l'algèbre de Hecke du Théorème 5 du commutant de l'action de $P_{\mathbb{Q}}^{+}$ dans l'espace des fonctions sur Δ. Nous avons besoin pour cela de considérer l'espace de Hilbert $\ell^2(\Delta) = \ell^2(P_{\mathbb{Q}}^{+}/P_{\mathcal{Z}})$.
Posons $\Gamma = P_{\mathbb{Q}}^{+}, \Gamma_0 = P_{\mathbb{Z}}^{+} \subset P_{\mathbb{Q}}^{+}$. Vérifions d'abord le

Lemme 13. L'action de $\Gamma_0 = P_{\mathbb{Z}}^{+}$ sur Γ/Γ_0 a seulement des orbites finies.

Preuve. Soit $g = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & k \end{bmatrix} \in P_{\mathbb{Q}}^{+}$. Alors

$$g\Gamma_0 = \left\{ g \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} ; n \in \mathbb{Z} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & n+a \\ 0 & k \end{bmatrix} ; n \in \mathbb{Z} \right\}$$

On a

$$\begin{bmatrix} 1 & n_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} g \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & n+a+n_1k \\ 0 & k \end{bmatrix}$$

Quand n_1 varie, n_1k prend seulement un nombre fini de valeurs modulo $\mathbb{Z}$, leur nombre dépendant du dénominateur de k. Ainsi on voit qu'on obtient par exemple une orbite finie de cardinalité le dénominateur de k.

Lemme 14.

(a) Tout élément T du commutant de Γ agissant dans $\ell^2(\Gamma/\Gamma_0)$ est caractérisé par la fonction Γ_0-bi-invariante $f_T(g) = \langle T\varepsilon_e, g^{-1}\varepsilon_e \rangle$.

(b) On a $\sum_{g \in \Gamma_0 \backslash \Gamma} |f_T(g)|^2 < \infty$.

(c) On a $f_{T^*}(g) = \overline{f_T}(g^{-1})$.

(d) La fonction f_{T_1,T_2} Γ_0-bi-invariante , associée au produit de deux éléments T_1 et T_2 dans son commutant est donnée par

$$f_{T_1,T_2}(g) = \sum_{\Gamma/\Gamma_0} f_{T_1}(gg_1) f_{T_2}(g_1^{-1}).$$

Preuve. (a) Tout élément de Γ agit par permutation de la base $\varepsilon_x, x \in \Gamma/\Gamma_0$ de $\mathcal{H} = \ell^2(\Gamma/\Gamma_0)$. Puisque T commute avec Γ, il est caractérisé par $T\varepsilon_e$ qui est déterminé par f_T. On a $f_T(g) = \langle Tg\varepsilon_e, \varepsilon_e\rangle$ de telle façon que f_T est Γ_0-bi-invariante.

(b) Évident.

(c) $f_{T^*}(g) = \langle T^*\varepsilon_e, g^{-1}\varepsilon_e\rangle = \langle g\varepsilon_e, T\varepsilon_e\rangle = \overline{\langle T\varepsilon_e, g\varepsilon_e\rangle}$

(d)

$$\begin{aligned} f_{T_1T_2}(g) &= \langle T_1T_2\varepsilon_e, g^{-1}\varepsilon_e\rangle = \langle T_2\varepsilon_e, g^{-1}T_1^*\varepsilon_e\rangle \\ &= \sum_{g_1\in\Gamma/\Gamma_0} \langle T_2\varepsilon_e, g_1\varepsilon_e\rangle\langle g_1\varepsilon_e, g^{-1}T_1^*\varepsilon_e\rangle \\ &= \sum_{g_1\in\Gamma/\Gamma_0} f_{T_1}(gg_1)f_{T_2}(g_1^{-1}) \end{aligned}$$

On peut écrire (d) comme

$$f_{T_1T_2}(g) = \sum_{g_1\in\Gamma/\Gamma_0} f_{T_1}(gg_1^{-1})f_{T_2}(g_1)$$

La condition (b) montre que $f_T(g) = 0$ à moins qu'il existe un ensemble fini $F \subset \Gamma$ avec

$$\Gamma_0\, g\, \Gamma_0 \subset F\, \Gamma_0$$

i.e., si $g\,\Gamma_0$ appartient à une orbite *finie* de Γ_0 sur Γ/Γ_0. Par le Lemme 13, on peut prendre une base de fonctions Γ_0-bi-invariantes, e_X, où X parcourt les classes doubles $X \in \Gamma_0\backslash\Gamma/\Gamma_0, e_X(g) = 0$ si $g \notin X, e_X(g) = 1$ si $g \in X$. Pour toute telle classe, on a deux entiers finis associés :

(19)

$$\begin{aligned} L(X) &= \text{cardinalité de l'image de } X \text{ dans } \Gamma/\Gamma_0 \\ R(X) &= \text{cardinalité de l'image de } X \text{ dans } \Gamma_0\backslash\Gamma. \end{aligned}$$

En fait, à chaque classe double X correspond un nombre rationnel *positif* donné par k pour tout $\begin{bmatrix}1 & a\\ 0 & k\end{bmatrix} \in X$, et $L(X)$ est le dénominateur de k, alors que $R(X)$ est le numérateur de k.

PROPOSITION 15.

(a) *Soit f une fonction Γ_0-bi-invariante sur Γ de support fini dans $\Gamma_0\backslash\Gamma/\Gamma_0$. Alors il existe un unique élément $r(f)$ du commutant de Γ dans $\ell^2(\Gamma/\Gamma_0)$ tel que*

$$f(g) = \langle r(f)\,\varepsilon_e, g^{-1}\,\varepsilon_e\rangle \qquad \forall g \in \Gamma.$$

(b) *L'application r s'étend à un isomorphisme de $C_r^*(\Gamma,\Gamma_0)$ avec la C^*-algèbre $C = C_{\mathbb{Q}}$ engendrée par $r(f)$ dans $\ell^2(\Delta)$.*

Preuve. (a) Soit X une classe double, $X \in \Gamma_0\backslash\Gamma/\Gamma_0$ et e_X la fonction Γ_0-bi-invariante correspondante. Soit T la matrice définie par

$$\langle Tg_1\,\varepsilon_e, g_2\,\varepsilon_e\rangle = e_X(g_2^{-1}\,g_1).$$

On a, par le Lemme 13, l'inégalité

$$sup_\alpha \sum_\beta |T_{\alpha,\beta}| \le L(X), \qquad sup_\beta \sum_\alpha |T_{\alpha,\beta}| \le R(X)$$

qui montre que T définit un opérateur borné dans $\ell^1(\Delta)$ et dans $\ell^\infty(\Delta)$, et donc dans $\ell^2(\Delta)$. L'unicité est évidente.

(b) découle du Lemme 14 (d) et des définitions de $\mathcal{H}(\Gamma,\Gamma_0)$ et $C_r^*(\Gamma,\Gamma_0)$ (cf. Proposition 3).

Ensuite, soit φ l'état sur $C_\mathbb{Q}$ défini par

$$\varphi(T) = \langle T\varepsilon_e, \varepsilon_e\rangle. \tag{20}$$

Lemme 16. φ est un état KMS_1 sur C relativement au groupe à un paramètre σ_t,

$$\sigma_t(e_X) = k^{it} e_X, \qquad k = \frac{R(X)}{L(X)}.$$

Preuve. Le produit des fonctions Γ_0-bi-invariantes est donné par

$$(f_1 * f_2)(g) = \sum_{g_1\in\Gamma/\Gamma_0} f_1(g_1) f_2(g_1^{-1}g).$$

On a

$$\begin{aligned}\varphi(f_1 * f_2) = (f_1 * f_2)(e) &= \sum_{g_1\in\Gamma/\Gamma_0} f_1(g_1) f_2(g_1^{-1})\\ \varphi(e_X * f) &= \sum_{g_1\in\Gamma/\Gamma_0} e_X(g_1) f(g_1^{-1})\\ \varphi(f * e_X) &= \sum_{g_1\in\Gamma/\Gamma_0} f(g_2) e_X(g_2^{-1}).\end{aligned}$$

Soit $g \in \Gamma$ avec $X = \Gamma_0\ g\ \Gamma_0$ une classe double fixe ; alors puisque f est Γ_0-bi-invariante, les deux expressions ci-dessus sont des multiples de $f(g^{-1})$:

$$\varphi(e_X * f) = L(X) f(g^{-1}), \varphi(f * e_X) = R(X) f(g^{-1}).$$

Ainsi $\varphi(e_X * f) = \frac{L(X)}{R(X)}\varphi(f * e_X)$. Cela montre que eX est un vecteur propre du groupe modulaire d'automorphismes de l'état normal fidèle

$$T \to \langle T\varepsilon_e, \varepsilon_e\rangle$$

sur la fermeture faible C'' de C agissant dans $\mathcal{H} = \ell^2(\Gamma/\Gamma_0)$. Il découle alors de cela que φ est un état KMS_1 pour le groupe $\sigma_t = \sigma_{-t}^\varphi$. Le vecteur $\varepsilon_e \in \ell^2(\Delta)$ est toujours séparateur pour la fermeture faible de $C_\mathbb{Q}$ parce qu'il est cyclique pour $P_\mathbb{Q}^+$ par la Proposition 12 (2). Le sous-espace $\mathcal{H}_r$ de $\ell^2(\Delta)$ donné par

$$\mathcal{H}_r = \overline{C_\mathbb{Q}\varepsilon_e}$$

est dans le bicommutant de l'action de $P_\mathbb{Q}^+$ sur Δ et nous allons le calculer.

Lemme 17. *Soit $\xi \in \ell^2(\Delta)$; alors $\xi \in \mathcal{H}_r$ ssi ξ est fixe par $\Gamma_0 \subset P_\mathbb{Q}^+$ agissant à gauche sur $\Delta = P_\mathbb{Q}^+/\Gamma_0$.*

Preuve. Soit $\xi \in \mathcal{H}$ fixe par Γ_0. Alors la fonction $f(g) = \langle \xi, \varepsilon_g\rangle, g \in \Gamma/\Gamma_0$ est Γ_0-bi-invariante. Pour montrer que $\xi \in \mathcal{H}_r$, on peut assumer, en utilisant une décomposition orthogonale, que f est la fonction caractéristique d'une classe double, $f = e_X$. Nous obtenons comme ci-dessus que $e_X^*\ \varepsilon_e = \sum_{g\in F} g\ \varepsilon_e$ où $X = F\Gamma_0$, de telle manière que toutes les fonctions caractéristiques des classes doubles appartiennent à $\mathcal{H}_r$. Inversement, si $\xi \in \mathcal{H}_r$, et $\xi = T\ \varepsilon_e$ pour un opérateur T qui commute avec $P_\mathbb{Q}^+$, alors puisque T commute avec $\Gamma_0 \subset P_\mathbb{Q}^+$ et $g\ \varepsilon_e = \varepsilon_e \quad \forall g \in \Gamma_0$, on obtient que ξ reste fixe par Γ_0.

4 Présentation de la C^*-algèbre $C_{\mathbb{Q}} = C_r^*(P_{\mathbb{Q}}^+, P_{\mathbb{Z}}^+)$

Considérons d'abord l'algèbre de Hecke $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\Gamma, \Gamma_0)$ où $\Gamma = P_{\mathbb{Q}}^+, \Gamma_0 = P_{\mathbb{Z}}^+$ sont définis comme ci-dessus. C'est une algèbre involutive sur $\mathbb{C}$ avec une base linéaire e_X, indexée par les classes doubles $X \in \Gamma_0 \backslash \Gamma / \Gamma_0$. Nous utiliserons les notations suivantes :

(α) Pour $n \in \mathbb{N}^*, \mu_n = n^{-1/2} e_{X_n}$ où X_n est la classe double de l'élément $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n \end{bmatrix}$ de $P_{\mathbb{Q}}^+$.

(β) Pour $\gamma \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z},\ e(\gamma) = e_{X^\gamma}$ où X^γ est la classe double de l'élément $\begin{bmatrix} 1 & \gamma \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ de $P_{\mathbb{Q}}^+ / P_{\mathbb{Z}}^+$.

Proposition 18. Les éléments $\mu_n, e(\gamma), n \in \mathbb{N}^*, \gamma \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ engendrent l'algèbre involutive $\mathcal{H}$ et les relations suivantes donnent une présentation de $\mathcal{H}$.
(a) $\mu_n^* \mu_n = 1 \quad \forall n$
(b) $\mu_{nm} = \mu_n \mu_m \quad \forall n, m$
(c) $\mu_n \mu_m^* = \mu_m^* \mu_n \quad$ si $(n, m) = 1$
(d) $e(\gamma)^* = e(-\gamma), e(\gamma_1 + \gamma_2) = e(\gamma_1) e(\gamma_2) \qquad \forall \gamma, \gamma_1, \gamma_2$
(e) $e(\gamma) \mu_n = \mu_n e(n\gamma) \quad \forall n, \forall \gamma$
(f) $\mu_n e(\gamma) \mu_n^* = \frac{1}{n} \sum_{n\delta = \gamma} e(\delta) \quad \forall n, \forall \gamma.$

Preuve. Nous devons d'abord vérifier que les relations (a)-(f) sont respectées en utilisant les définitions du produit et de l'involution dans $\mathcal{H}$, c'est-à-dire que :

$$f_1 * f_2(g) = \sum_{g_1 \in \Gamma/\Gamma_0} f_1(g_1)\, f_2(g_1^{-1} g) \tag{1}$$

$$f^*(g) = \overline{f(g^{-1})}. \tag{2}$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, la classe à droite $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n \end{bmatrix} \Gamma_0$ est déjà une classe double : X_n. Cela montre que pour toute fonction Γ_0-bi-invariante $f \in \mathcal{H}$:

$$n^{1/2} (\mu_n * f)(g) = f\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n^{-1} \end{bmatrix} g \right) \qquad \forall g \in \Gamma. \tag{3}$$

De façon similaire, la classe à droite $\begin{bmatrix} 1 & \gamma \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Gamma_0, \gamma \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ est déjà une classe double X^γ de telle sorte que

$$(e(\gamma) * f)(g) = f\left(\begin{bmatrix} 1 & -\gamma \\ 0 & 1 \end{bmatrix} g \right) \qquad \forall g \in \Gamma \tag{4}$$

et en utilisant l'égalité $\Gamma_0 \begin{bmatrix} 1 & \gamma \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = X^\gamma$,

$$(f * e(\gamma))(g) = f\left(g \begin{bmatrix} 1 & -\gamma \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \qquad \forall g \in \Gamma. \tag{5}$$

En utilisant (3), (4), (5), on prouve directement les relations (b), (d) et (e). La multiplication à gauche par μ_n^* est donnée par

$$n^{1/2} (\mu_n^* * f)(g) = \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & n \end{bmatrix} g \right) \qquad \forall g \in \Gamma \tag{6}$$

où la bi-invariance de f montre que $f\left(\begin{bmatrix}1 & k\\ 0 & n\end{bmatrix} g\right)$ dépend seulement de k modulo n, puisque

$$\begin{bmatrix}1 & b\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & k\\ 0 & n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & k+nb\\ 0 & n\end{bmatrix}$$

L'égalité (a) découle directement de (6). Soient n, m des entiers tels que $(n,m) = 1$; en utilisant (3), on obtient que la fonction bi-invariante $n^{1/2}m^{1/2}\mu_n * \mu_m^*$ est la fonction caractéristique des classes doubles $\Gamma_0 : \begin{bmatrix}1 & \mathbb{Z}/m\\ 0 & n/m\end{bmatrix}$. En utilisant (6), on obtient que

$$m^{1/2}\mu_m^* * \mu_n(g) = \sum_{k=0}^{m-1} \mu_n\left(\begin{bmatrix}1 & k\\ 0 & m\end{bmatrix} g\right).$$

Soit $g = \begin{bmatrix}1 & \beta\\ 0 & \alpha\end{bmatrix} \in \Gamma$. Alors le $(k+1)$-ième terme du côté droit s'évanouit à moins que $\begin{bmatrix}1 & k\\ 0 & m\end{bmatrix} g \in \begin{bmatrix}1 & \mathbb{Z}\\ 0 & n\end{bmatrix}$ i.e. à moins que $\alpha = n/m, \beta + \frac{nk}{m} \in \mathbb{Z}$. Ainsi, le côté gauche s'évanouit à moins que $\beta \in \mathbb{Z}/m$ et est égal à $n^{-1/2}$ si $\beta \in \mathbb{Z}/m$ puisque, comme $(n,m) = 1$, seule une valeur de k contribuera à la somme. Cela prouve la relation (c). Pour prouver (f), on combine (3) et (4), ce qui donne

$$n^{1/2}(\mu_n * e(\gamma) * f)(g) = f\left(\begin{bmatrix}1 & -\gamma n^{-1}\\ 0 & n^{-1}\end{bmatrix} g\right) \qquad \forall g \in \Gamma$$

que l'on applique à $f = \mu_n^*$. On a $f(g) = n^{1/2}$ si $g \in \begin{bmatrix}1 & \mathbb{Z}/n\\ 0 & 1/n\end{bmatrix}$ et $f(g) = 0$ sinon. Cela montre que $(\mu_n * e(\gamma) * \mu_n^*)(g)$ s'évanouit à moins que $g = \begin{bmatrix}1 & \beta\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ avec

$$\begin{bmatrix}1 & -\gamma n^{-1}\\ 0 & n^{-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & \beta\\ 0 & 1\end{bmatrix} \in \begin{bmatrix}1 & \mathbb{Z}/n\\ 0 & n^{-1}\end{bmatrix}$$

i.e. $n\beta = \gamma$ modulo n. Puisque cette équation a n solutions $\beta \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, on obtient (f).

Nous avons ainsi démontré les relations (a)-(f). Inversement, soit $\mathcal{A}$ l'algèbre involutive engendrée par les éléments $(\mu_n), (e_\gamma)$ satisfaisant (a)-(f). Nous allons montrer que les monômes de la forme

$$t_{n,m,\gamma} = \mu_n e(\gamma)\mu_m^*, \qquad n, m \in \mathbb{N}^*, (n,m) = 1, \gamma \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

forment un ensemble de générateurs de l'espace vectoriel $\mathcal{A}$. Il suffit pour cela d'exprimer l'adjoint et les produits de tels monômes comme des éléments de leur enveloppe linéaire $\mathcal{L}$.

D'abord, si nous continuons en notant $t_{n,m,\gamma}$ l'expression $\mu_n e(\gamma)\mu_m^*$ quand n, m ne sont pas premiers entre eux mais s'ils sont tels que $(n,m) = q > 1$, nous pouvons écrire

$$t_{n,m,\gamma} = \mu_{n/q}\mu_q e(\gamma)\mu_q^*\mu_{m/q}^*$$

et utiliser (f) pour l'exprimer comme un élément de $\mathcal{L}$. Il est clair que $(t_{n,m,\gamma})^* = t_{m,n,-\gamma}$ de telle sorte que $\mathcal{L} = \mathcal{L}^*$. Calculons maintenant le produit : $t_{n_1,m_1,\gamma_1}t_{n_2,m_2,\gamma_2}$. Soit $q = (m_1, n_2)$, alors $\mu_{m_1}^*\mu_{n_2} = \mu_{m_1/q}^*\mu_q^*\mu_q\mu_{n_2/q} = \mu_{m_1/q}^*\mu_{n_2/q} = \mu_{n_2/q}\mu_{m_1/q}^*$ en utilisant (a), (b), (c).

Ainsi $t_{n_1,m_1,\gamma_1}t_{n_2,m_2,\gamma_2} = \mu_{n_1}e(\gamma_1)\mu_{n_2/q}\mu^*_{m_1/q}e(\gamma_2)\mu^*_{m_2}$. En utilisant (e) et son adjoint, on obtient alors

$$t_{n_1,m_1,\gamma_1}t_{n_2,m_2,\gamma_2} = \mu_{n_1n_2/q}e\left(\frac{n_2}{q}\gamma_1 + \frac{m_1}{q}\gamma_2\right)\mu^*_{m_1m_2/q}$$

qui est un $t_{n,m,\gamma}$ avec (n,m) non nécessairement égal à 1 et peut être exprimé comme ci-dessus comme un élément de $\mathcal{L}$.

Nous avons montré que l'enveloppe linéaire $\mathcal{L}$ des $t_{n,m,\gamma}$ est une algèbre involutive et ainsi que $\mathcal{L} = \mathcal{A}$. Dans l'algèbre $\mathcal{H}$, les $t_{n,m,\gamma}$ sont donnés par

$$t_{n,m,\gamma} = (nm)^{-1/2}e_X, \qquad X = \text{classe double de} \begin{bmatrix} 1 & \gamma \\ 0 & n/m \end{bmatrix}. \tag{7}$$

Ainsi, ils sont linéairement indépendants dans $\mathcal{H}$ et cela suffit pour conclure que (a)-(f) est une présentation de $\mathcal{H}$.

Il est crucial que la présentation de $\mathcal{H}$ ci-dessus soit définie sur le corps $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels, puisque cela permettra l'action naturelle du groupe de Galois G de l'extension cyclotomique $\mathbb{Q}^{\text{cycl}}$ de $\mathbb{Q}$ sur certaines représentations de $\mathcal{H}$ que nous construirons plus tard en Section 6.

Un résultat similaire à la Proposition 18 est obtenu pour la C^*-algèbre $C_{\mathbb{Q}} = C^*_r(\Gamma, \Gamma_0)$ et du fait de la moyennabilité de $\Gamma = P^+_{\mathbb{Q}}$, la nuance entre $C^*(\Gamma, \Gamma_0)$, la C^*-algèbre universelle engendrée par les (μ_n, e_γ) avec les relations ci-dessus, et $C^*_r(\Gamma, \Gamma_0)$ ne se lève pas. On a $C^*(\Gamma, \Gamma_0) = C^*_r(\Gamma, \Gamma_0)$.

Proposition 19. *Soit π une représentation involutive de $\mathcal{H}$ comme opérateur dans un espace de Hilbert H. Alors π s'étend uniquement par continuité à une représentation de $C^*_r(\Gamma, \Gamma_0) = C_{\mathbb{Q}}$.*

Preuve. Les relations (a) et (d) montrent que $\pi(\mu_n)$ est une isométrie et $\pi(e(\gamma))$ est unitaire. Ainsi on a

$$\|\pi(\mu_n e(\gamma)\mu^*_m)\| \leq 1 \qquad \forall n, m, \gamma.$$

Cela montre que $\pi(f)$ est borné pour tout $f \in \mathcal{H}$, avec

$$\|\pi(f)\| \leq \|f\|_1$$

où

$$\|f\|_1 = \sum_{\gamma \in \Gamma/\Gamma_0} \delta(\gamma)^{-1/2}|f(\gamma)|, \qquad \delta(\gamma) = \frac{L(\gamma)}{R(\gamma)}.$$

Il suit alors que l'égalité suivante définit une norme sur $\mathcal{H}$ dont la complétion est une C^*-algèbre :

$$\|f\|_{max} = \text{Sup}\{\|\pi(f)\| \,;\, \pi \in \text{Rep}\mathcal{H}\} \tag{8}$$

où Rep$\mathcal{H}$ est la classe de toutes les représentations involutives de $\mathcal{H}$ dans un espace de Hilbert séparable fixé.

Montrons que

$$\|f\|_{\max} = \|f\|_{C^*_r(\Gamma,\Gamma_0)} \qquad \forall f \in \mathcal{H} \tag{9}$$

qui est une assertion de *moyennabilité* de la paire (Γ, Γ_0). Prouvons d'abord (9) pour les éléments de l'anneau de groupes $f \in \mathbb{C}[\mathbb{Q}/\mathbb{Z}]$, i.e. les combinaisons linéaires des $e_\gamma, \gamma \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

En utilisant les représentations de $\mathcal{H}$ dans $\ell^2(\Gamma_0\backslash\Gamma)$, on a

$$\|f\|_{\max} \geq \|f\|_{C_r^*} \qquad \forall f \in \mathcal{H}. \tag{10}$$

Ainsi, nous avons seulement besoin de prouver l'autre inégalité. La moyennabilité du groupe $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ montre que

$$\|\pi(f)\| \leq \|f\|_{C_r^*(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})} \qquad \forall f \in \mathbb{C}[\mathbb{Q}/\mathbb{Z}] \tag{11}$$

pour toute représentation unitaire π de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

Observons que dans la représentation de $\mathcal{H}$ dans $\ell^2(\Gamma_0\backslash\Gamma)$, la restriction à $\mathbb{C}[\mathbb{Q}/\mathbb{Z}]$ définit une représentation fidèle de $C_r^*(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = C^*(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$. Par exemple, la restriction de l'action de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ à l'orbite de $\varepsilon_0 = \Gamma_0$, est isomorphe à la représentation régulière de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, d'où découle le résultat. Cela prouve (9) pour les éléments de $\mathbb{C}[\mathbb{Q}/\mathbb{Z}]$ et nous autorise à voir $\mathbb{C}^*(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ comme une C^*-sous-algèbre de la C^*-complétion $C^*(\Gamma, \Gamma_0)$ de $\mathcal{H}$ pour la norme (8). Identifions le dual du groupe $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ avec le groupe additif $\mathcal{R} \subset \mathcal{A}$ en utilisant l'égalité $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} = \mathcal{A}/\mathcal{R}$ et l'identification du groupe additif $\mathcal{A}$ avec son dual de Pontrjagin. Considérons maintenant le groupoïde localement compact $\mathcal{G}$ défini comme suit. Puisque l'espace localement compact $\mathcal{G}$ est le sous-ensemble suivant de $\mathcal{R} \times \mathbb{Q}_+^*$,

$$\mathcal{G} = \{(b, a) \in \mathcal{R} \times \mathbb{Q}^* \,; ab \in \mathcal{R}\} \tag{12}$$

qui peut être identifié à une union dénombrable d'ensembles ouverts et fermés de $\mathcal{R}$.

On a $\mathcal{G}^{(0)} = \mathcal{R} \times 1 = \mathcal{R}$ et les applications image et antécédent sont

$$r(b, a) = ab, \qquad s(b, a) = b \tag{13}$$

tandis que la composition est donnée par

$$(b_1, a_1) \circ (b_2, a_2) = (b_2, a_1 a_2). \tag{14}$$

Par construction, les fibres $\mathcal{G}^x$ et $\mathcal{G}_x, x \in \mathcal{R}$ de r et s sont des ensembles discrets dénombrables et les C^*-algèbres $C^*(\mathcal{G})$ et $C_r^*(\mathcal{G})$ de ce groupoïde localement compact font bien sens. Ce sont les complétions de l'algèbre de convolution $C_c(\mathcal{G})$ des fonctions continues à support compact sur G,

$$(f_1 * f_2)(\gamma) = \sum_{\gamma_1 \circ \gamma_2 = \gamma} f_1(\gamma_1) f_2(\gamma_2) \tag{15}$$

$$f^*(\gamma) = \overline{f(\gamma^{-1})} \tag{16}$$

sous les normes respectives suivantes :

$$\|f\|_{\max} = \sup\{\|\pi(f)\| \,; \pi \in \mathrm{Rep}\, \mathcal{G}\} \tag{17}$$

$$\|f\|_r = \sup_{x \in \mathcal{G}^{(0)}} \|\lambda_x(f)\| \tag{18}$$

où λ_x est la représentation régulière à gauche de f dans $\ell^2(\mathcal{G}^x)$ donnée par :

(19)
$$(\lambda_x(f)\xi)(\gamma) = \sum_{r(\gamma_1)=x} f(\gamma_1)\xi(\gamma_1^{-1}\gamma).$$

Maintenant, puisque le groupe $\mathbb{Q}_+^*$ est moyennable, il s'ensuit que le groupoïde localement compact $\mathcal{G}$ est moyennable au sens de [Ren], de telle façon que les normes (17) et (18) coïncident.

Maintenant, étant donnée une représentation π de $\mathcal{H}$, nous obtenons une représentation $\widetilde{\pi}$ de $C_c(\mathcal{G})$ comme suit. Nous identifions $\mathcal{H}$ avec une sous-algèbre de $C_c(\mathcal{G})$ en vérifiant que les éléments suivants $\widetilde{e}(\gamma), \widetilde{\mu}_n$ de $C_c(\mathcal{G})$ satisfont la présentation de la Proposition 18,

(20)
$$\begin{array}{ll} \widetilde{e}(\gamma)(b,a) = 0 & \text{à moins que } a = 1, \\ \widetilde{e}(\gamma)(b,1) = \langle b, \gamma \rangle & \end{array}$$

(où $\langle b, \gamma \rangle$ est l'appariement entre $\mathcal{R}$ et $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ donné par la dualité de Pontrjagin des groupes abéliens)

(21)
$$\widetilde{\mu}_n(b,a) = 0 \text{ à moins que } a = n^{-1}\ ; \qquad \widetilde{\mu}_n(b,n^{-1}) = 1 \quad \forall b \in \mathcal{R}.$$

On vérifie directement les relations (a)-(f) de la présentation de $\mathcal{H}$ en utilisant en particulier l'égalité

(22)
$$\langle n\gamma, b \rangle = \langle \gamma, nb \rangle \quad \forall \gamma \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \quad \forall \gamma \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \forall b \in \mathcal{R} \text{ tel que } nb \in \mathcal{R}.$$

Alors soit π une représentation involutive de $\mathcal{H}$. Nous avons montré ci-dessus que la restriction de π à l'anneau de groupes de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ s'étend à une représentation de $C^*(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = C_r^*(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$. Il découle alors de cela, en utilisant $\widetilde{\mu}_n$ qui, avec $C(\mathcal{R})$, engendre $C_c(\mathcal{G})$, que π s'étend à une représentation $\widetilde{\pi}$ de l'algèbre de convolution $C_c(\mathcal{G})$ du groupoïde localement compact $\mathcal{G}$. La moyennabilité de $\mathcal{G}$ amène alors

(23)
$$\|\pi(f)\| \leq \sup_{x\in\mathcal{R}} \|\lambda_x(\widetilde{f})\| \qquad \forall f \in \mathcal{H}.$$

L'homomorphisme $h : \mathcal{G} \to \mathbb{Q}_+^*, h(b,a) = a$, amène pour chaque $x \in \mathcal{R}$, une injection de $\mathcal{G}^x$ dans $\mathbb{Q}_+^*$ qui nous autorise à considérer le corps continu d'espaces de Hilbert $\ell^2(\mathcal{G}^x), x \in \mathcal{R}$ comme un sous-corps du corps des constantes avec comme fibre $\ell^2(\mathbb{Q}_+^*)$. Pour tout $f \in \mathcal{H}$, l'application $x \to \lambda_x(\widetilde{f})$ est alors fortement continue avec des valeurs dans $\mathcal{L}(\ell^2(\mathbb{Q}_+^*))$. Cela peut être vérifié directement pour les $\widetilde{\mu}_n$ et pour les éléments de $C(\mathcal{R})$.

Il s'ensuit que pour toute $f \in \mathcal{H}$, la fonction sur $\mathcal{R}$, définie par $x \to \|\lambda_x(\widetilde{f})\|$, est semi-continue par le bas dans le sens où $\{x\ ; \|\lambda_x(\widetilde{f}) > \alpha\}$ est un ensemble ouvert pour tout α. Ainsi

(24)
$$\sup_{x\in\mathcal{R}} \|\lambda_x(\widetilde{f})\| = \text{Ess Sup}_{x\in\mathcal{R}} \|\lambda_x(\widetilde{f})\|$$

et le côté droit est égal à $\|f\|_{C_r^*}(\Gamma, \Gamma_0)$ de telle façon que l'égalité (9) en découle.

5 Action de $W \times \mathbb{R}$ sur la C^*-algèbre $C_\mathbb{Q}$

Soit $(\sigma_t)_{t\in\mathbb{R}}$ l'action de $\mathbb{R}$ sur la C^*-algèbre $C_\mathbb{Q} = C^*(P_\mathbb{Q}^+, P_\mathbb{Z}^+)$ définie dans la proposition 4. En fonction des classes doubles X dans $\Gamma_0\backslash\Gamma/\Gamma_0, \Gamma = P_\mathbb{Q}^+, \Gamma_0 = P_\mathbb{Z}^+$, on a

$$\sigma_t(e_X) = k^{-it} e_X, \qquad k = \frac{R(X)}{L(X)}$$

et pour la classe double de $g = \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & a \end{bmatrix} \in P_{\mathbb{Q}}^{+}$, on a

$$k = a. \tag{1}$$

Par rapport à la présentation de $C_{\mathbb{Q}}$ (Proposition 18), on a

$$\sigma_t(\mu_n) = n^{it}\mu_n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sigma_t(e(\gamma)) = e(\gamma) \tag{2}$$

quelque soit $\gamma \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ et quelque soit $t \in \mathbb{R}$.

Proposition 20.

(a) La C^*-sous-algèbre de $C_{\mathbb{Q}}$ donnée par les points fixes de σ, $C_{\mathbb{Q}}^{\sigma} = \{x \in C_{\mathbb{Q}}\,; \sigma_t(x) = x, \forall t \in \mathbb{R}\}$ est l'image de $C^*(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ par l'isomorphisme associé à l'homomorphisme $\gamma \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to e(\gamma) \in C_{\mathbb{Q}}$.

(b) Le centralisateur de l'état φ sur $C_{\mathbb{Q}}$ donné par le Lemme 16 est égal à $C_{\mathbb{Q}}^{\sigma} = C^*(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$.

Preuve. (a) Par construction, $C^*(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \subset C_{\mathbb{Q}}^{\sigma}$. L'action σ de $\mathbb{R}$ sur $C_{\mathbb{Q}}$ est presque-périodique et diagonale dans la base linéaire (e_X) de $\mathcal{H}$. La projection P sur les points fixes de σ, donnée par la moyenne presque-périodique des σ_t est l'identité sur les classes doubles $e_{X^{\gamma}}, \gamma \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, et elle s'évanouit, $P(e_X) = 0$, sur les classes doubles de tout $g = \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & a \end{bmatrix}, a \neq 1$. La conclusion en découle puisque $\mathcal{H}$ est dense sur $C_{\mathbb{Q}}$ et P est de norme continue.

(b) découle de (a) et du Lemme 16.

Nous allons maintenant définir une action naturelle par les automorphismes de $C_{\mathbb{Q}}$, du groupe des classes d'idèles $W = \mathcal{A}^*/\mathbb{Q}_+^*$. Rappelons d'abord que nous avons obtenu $C_{\mathbb{Q}}$ dans la Proposition 15 du commutant de $P_{\mathbb{Q}}^{+}$ dans $\ell^2(\Delta)$ où $\Delta = P_{\mathcal{A}}/P_{\mathcal{R}} = P_{\mathbb{Q}}^{+}/P_{\mathbb{Z}}^{+}$. Montrons que $W = \mathcal{A}^*/\mathbb{Q}_+^*$ agit de façon naturelle sur le commutant de $P_{\mathbb{Q}}^{+}$ dans $\ell^2(\Delta)$. Le groupe $P_{\mathcal{A}}$ agit sur Δ et sur $\ell^2(\Delta)$ et ainsi le commutant de $P_{\mathbb{Q}}^{+}$ est le même que le commutant de sa fermeture $\overline{P}_{\mathbb{Q}}^{+}$ dans $P_{\mathcal{A}}$. On a (cf. Proposition 12) $\overline{P}_{\mathbb{Q}}^{+} = \mathcal{A} \rtimes \mathbb{Q}_+^*$ qui est un *sous-groupe normal* de $P_{\mathcal{A}}$. Ainsi le groupe quotient

$$W = \mathcal{A}^*/\mathbb{Q}_+^* = P_{\mathcal{A}}/\overline{P}_{\mathbb{Q}}^{+} \tag{3}$$

agit naturellement sur le commutant $P_{\mathbb{Q}}^{+\prime}$ de $P_{\mathbb{Q}}^{+}$ dans $\ell^2(\Delta)$, par

$$\theta_u(x) = uxu^* \quad \forall x \in P_{\mathbb{Q}}^{+\prime}, \quad \forall u \in W. \tag{4}$$

(Le choix du représentant $u \in P_{\mathcal{A}}$ de la classe de u est sans importance). Cela définit une action fortement continue du groupe compact W sur l'algèbre de von Neumann $P_{\mathbb{Q}}^{+\prime}$.

Proposition 21.

(a) L'action θ de W sur $P_{\mathbb{Q}}^{+\prime}$ laisse la C^*-sous-algèbre dense globalement invariante et est de norme ponctuelle continue (elle converge simplement en norme) sur $C_{\mathbb{Q}}$.

(b) La sous-algèbre point fixe $C_{\mathbb{Q}}^W$ est la C^*-algèbre $C^*(\mathbb{N}^*)$ engendrée par les $\mu_n \in C_{\mathbb{Q}}$.

(c) L'action de W sur $C_{\mathbb{Q}}$ préserve l'état φ et commute avec l'action $(\sigma_t)_{t\in\mathbb{R}}$.

Preuve. Montrons d'abord que μ_n, i.e. la convolution à droite $r(f)$ dans $\ell^2(\Gamma/\Gamma_0)$ par $f = n^{-1/2}e_{X_n}$, appartient non seulement au commutant de $P_{\mathbb{Q}}^+$ (Proposition 15) mais également au commutant de $P_{\mathcal{A}}$. Par construction, on a

$$\langle \mu_n^* \varepsilon_e, g\varepsilon_e\rangle = f(g) = n^{-1/2}e_{X_n}(g) \qquad \forall g \in \Gamma \tag{5}$$

et puisque les $g\varepsilon_e$, $g \in \Gamma/\Gamma_0$ forment une base de $\ell^2(\Delta)$, nous obtenons

$$\mu_n^*\varepsilon_e = n^{-1/2}g_n\varepsilon_e, \qquad g_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n \end{bmatrix} \in \Gamma. \tag{6}$$

Supposons que $n = p$ est un nombre premier et montrons que $p^{1/2}\mu_p^*$ coïncide avec l'opérateur dans $\ell^2(\Delta) = \bigotimes_q(\ell^2(T_q), *)$ donné par $\widetilde{t_p} = 1 \otimes t_p \otimes 1 \otimes \ldots$, où t_p est la translation hyperbolique d'une unité de longueur vers le point à l'∞ dans l'arbre T_p de la Proposition 12.

Notons que cette translation hyperbolique est exactement p vers un de telle façon que $p^{-1/2}t_p$ est une co-isométrie sur $\ell^2(T_p)$. Maintenant, on a à la fois μ_p^* et t_p qui commutent avec l'action de $P_{\mathbb{Q}}^+$ sur $\ell^2(\Delta)$, et ε_e est cyclique pour $P_{\mathbb{Q}}^+$. Ainsi l'égalité

$$p^{1/2}\mu_p^*\varepsilon_e = \widetilde{t_p}\varepsilon_e$$

implique l'égalité des opérateurs

$$\mu_p^* = p^{-1/2}\widetilde{t_p}. \tag{7}$$

Puisque $\widetilde{t_p}$ appartient au commutant de $P_{\mathcal{A}}$, par construction, on obtient ainsi que $\mu_p \in (P_{\mathcal{A}})'$ et

$$\theta_u(\mu_n) = \mu_n \qquad \forall u \in W, n \in \mathbb{N}^*. \tag{8}$$

Pour prouver 21 (a), nous avons seulement besoin de montrer que l'action θ de W laisse la C^*-sous-algèbre $C^*(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = C(\mathcal{R})$ de $C_{\mathbb{Q}}$ globalement invariante et qu'elle est de norme ponctuelle continue sur $C^*(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$. Cela va découler de l'assertion plus précise suivante :

Lemme 22. *Soit $f \in C(\mathcal{R}) = C^*(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \subset C_{\mathbb{Q}}$. Alors*

$$\theta_u(f)(b) = f(ub) \qquad \forall b \in \mathcal{R}, u \in \mathcal{R}^* = W.$$

Preuve. Considérons (cf. [We$_2$] p. 257) la décomposition en produit direct :

$$\mathcal{A}^* = \mathbb{Q}_+^* \times \left(\prod_p \mathbb{Z}_p^*\right) = \mathbb{Q}_+^* \times \mathcal{R}^*$$

où le morphisme $r : \mathcal{A}^* \to \mathbb{Q}_+^*$ est donné par

$$r(z) = \prod_p |z_p|_p^{-1} = \prod_p p^{\mathrm{val}(z_p)}$$

Par construction, r est l'identité sur $\mathbb{Q}_+^*$ et son noyau est $\prod_p \mathbb{Z}_p^* = \mathcal{R}^*$; ainsi, r est la projection sur le premier terme de cette décomposition comme un produit. Nous utilisons la seconde projection pour identifier W et $\mathcal{R}^*$.

L'égalité des groupes abéliens $\mathcal{A}/\mathcal{R} = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ montre que la multiplication par un élément $u \in \mathcal{R}^*$ définit un automorphisme m_u de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ et pour prouver le Lemme 22, on a juste à montrer que pour tout $\gamma \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, on a

$$\theta_u(e(\gamma)) = e(m_{u^{-1}}\gamma) \qquad \forall u \in \mathcal{R}^* \tag{9}$$

Puisque ε_e est séparateur pour $P_{\mathbb{Q}}^{+\prime}$, il suffit de vérifier que $\theta_u(e(\gamma))\, \varepsilon_e = e(m_{u^{-1}}\gamma)\, \varepsilon_e$, i.e. que

$$u\, e(\gamma)\, u^*\, \varepsilon_e = e(m_{u^{-1}}\gamma)\, \varepsilon_e. \tag{10}$$

Puisque ε_e est laissé fixe par $P_{\mathcal{R}} \subset P_{\mathcal{A}}$, il est fixe par l'action de $u^* \in \mathcal{R}^* \subset P_{\mathcal{R}}$. De plus, pour tout $\delta \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, l'action de $e(\delta)$ sur ε_e donne simplement $\begin{bmatrix} 1 & \delta \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \varepsilon_e$. Ainsi (10) découle de l'égalité

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \delta \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \delta u^{-1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Cela complète la preuve du Lemme 22 et de la Proposition 21 (a). Pour prouver la Proposition 21 (c), noter que l'action de $\mathcal{R}^*$ dans $\ell^2(\Delta)$ fixe le vecteur ε_e, ce qui prouve que l'action de W sur $C_{\mathbb{Q}}$ préserve l'état φ. Il commute trivialement avec σ_t dans tous les cas. Prouvons la Proposition 21 (b). Puisque W est un groupe compact, nous pouvons considérer la projection naturelle E de $C_{\mathbb{Q}}$ sur $C_{\mathbb{Q}}^W$ donnée par

$$E(x) = \int_W \theta_u(x) du \tag{11}$$

Par construction, E est de norme continue et satisfait

$$E(axb) = a\, E(x)\, b \qquad \forall x \in C_{\mathbb{Q}}, \;\; a, b \in C_{\mathbb{Q}}^W. \tag{12}$$

Puisque par (8), on a $C^*(\mathbb{N}^*) \subset C_{\mathbb{Q}}^W$, il suffit d'utiliser la base linéaire $\mu_n\, e(\gamma)\, \mu_m^*$ de $\mathcal{H}$, pour montrer que

$$E(e(\gamma)) \in C^*(\mathbb{N}^*) \qquad \forall \gamma \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \tag{13}$$

pour conclure que $C^*(\mathbb{N}^*) = C_{\mathbb{Q}}^W$.

Finalement, pour prouver (13), noter que $E(e(\gamma)) \in C^*(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = C(\mathcal{R})$ est donné par une fonction $f \in C(\mathcal{R})$ telle que

$$f(ub) = f(b) \qquad \forall u \in \mathcal{R}^*, \forall b \in \mathcal{R}. \tag{14}$$

Cette égalité définit une C^*-sous-algèbre de $C(\mathcal{R}) = \bigotimes_{p \in \mathcal{P}} C(\mathcal{R}_p)$, qui est identique à $C^*(\mathbb{N}^*) \cap C^*(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$. Cela peut se voir localement en montrant que

$$f \in C(\mathcal{R}_p), \;\; f(ub) = f(b) \qquad \forall u \in \mathcal{R}_p^*, b \in \mathcal{R}_p \tag{15}$$

implique que f est une fonction de $|\ |_p$.

6 Classification des états KMS$_\beta$ pour $\beta > 1$

Nous allons d'abord construire des représentations involutives π_α de l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}$ étiquetées par le groupe de Galois $G = \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}^{\mathrm{cycl}}/\mathbb{Q})$ du sous-corps $\mathbb{Q}^{\mathrm{cycl}}$ de $\mathbb{C}$ engendré par toutes les racines de l'unité.

Soit $\mathcal{H}$ l'espace de Hilbert $\ell^2(\mathbb{N}^*)$, avec sa base orthonormale canonique $(\varepsilon_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$.

Proposition 23. Les égalités suivantes définissent une représentation involutive π_1 de l'algèbre de Hecke $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\Gamma, \Gamma_0)$ dans $\ell^2(\mathbb{N}^*)$,

(α) $\pi_1(\mu_n)\,\varepsilon_k = \varepsilon_{nk} \quad \forall n, k \in \mathbb{N}^*$

(β) $\pi_1(e(\gamma))\,\varepsilon_k = \exp(2\pi i k\gamma)\,\varepsilon_k \quad \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \gamma \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

Preuve. Nous avons juste besoin de vérifier que les relations (a)-(f) sont respectées par les opérateurs $\mu'_n = \pi_1(\mu_n)$ et $e'(\gamma) = \pi_1(e(\gamma))$ définis par $(\alpha), (\beta)$. Puisque l'application $k \to nk$ de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}^*$ est injective, la relation (a) est vérifiée et de plus, l'adjoint μ'^*_n est donné par

$$\mu'^*_n \varepsilon_k = \varepsilon_{k/n} \quad \text{si } n|k \text{ et } 0 \text{ sinon.} \tag{1}$$

La relation (b) est évidente. Pour vérifier (c), noter que si $(n, m) = 1$, alors $m|k \iff m|nk$ et quand on l'applique à ε_k, à la fois $\mu'_n \mu'_m{}^*$ et $\mu'_m{}^* \mu'_n$ s'évanouissent ou sont égaux à $\varepsilon_{nk/m}$. La relation (d) est évidente ainsi que (e),

$$e'(\gamma)\,\mu'_n\,\varepsilon_k = e'(\gamma)\,\varepsilon_{nk} = \exp 2\pi i(nk\gamma)\,\varepsilon_{nk} = \mu'_n\,e'(n\gamma)\,\varepsilon_k. \tag{2}$$

Vérifions (f). Les deux côtés appliqués à ε_k s'évanouissent à moins que $n|k$. C'est clair pour le côté gauche par (1), et c'est vrai pour le côté droit parce qu'il est de la forme

$$e'(\delta_0)\,\frac{1}{n}\sum_{n\delta=0} e'(\delta), \qquad n\delta_0 = \gamma$$

et $\sum_{n\delta=0} e'(\delta)\,\varepsilon_k = 0$ à moins que $n|k$. Ensuite, quand $n|k$ de telle façon que $k = qn$, on a :

$$\begin{aligned} \mu'_n\,e'(\gamma)\,\mu'^*_n\,\varepsilon_k &= \exp(2\pi i q\gamma)\,\varepsilon_k \\ e'(\delta_0)\,\varepsilon_k = \exp(2\pi i k\delta_0)\,\varepsilon_k &= \exp(2\pi i q\gamma)\,\varepsilon_k \end{aligned}$$

pour tout $\delta_0 \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ tel que $n\delta_0 = \gamma$.

Proposition 24.

(1) Pour $\alpha \in G = \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}^{\mathrm{cycl}}/\mathbb{Q})$, les égalités suivantes définissent une représentation involutive π_α de $\mathcal{H}$ dans $\ell^2(\mathbb{N}^*)$:
(α) $\pi_\alpha(\mu_n)\,\varepsilon_k = \varepsilon_{nk} \quad \forall n, k \in \mathbb{N}^*$
(β) $\pi_\alpha(e(\gamma))\,\varepsilon_k = \alpha(\exp 2\pi i k\gamma)\,\varepsilon_k, \quad \forall k \in \mathbb{N}^*, \gamma \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

(2) Pour tout élément $x \in \mathcal{H}(\mathbb{Q})$ de la $\mathbb{Q}$ algèbre engendrée par les μ_n et les $e(\gamma)$, les éléments de la matrice $\pi_\alpha(x)$ satisfont

$$\langle \pi_\alpha(x)\,\varepsilon_{k_1}, \varepsilon_{k_2}\rangle = \alpha\langle \pi_1(x)\,\varepsilon_{k_1}, \varepsilon_{k_2}\rangle \quad \forall k_j.$$

Preuve. (1) La preuve ci-dessus de la Proposition 23 marche sans changement. Le seul point important est de vérifier (d), notamment que $\pi_\alpha(e(\gamma))^* = \pi_\alpha(e(-\gamma))$. Cela est vrai car la conjugaison complexe $z \to \overline{z}$ commute avec tout $\alpha \in G$.

(2) Par construction, les éléments de la matrice des π_α des générateurs satisfont la relation souhaitée qui est stable par les opérations algébriques sur des matrices n'impliquant que des sommes finies de produits.

Définissons H comme l'opérateur positif dans $\ell^2(\mathbb{N}^*)$ correspondant à l'évolution temporelle décrite dans la Section 2, notamment

$$H_{\varepsilon_n} = (\log n)\, \varepsilon_n \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*. \tag{3}$$

Nous avons déjà vu dans la Section 2 que

$$e^{itH}\; x\; e^{-itH} = \sigma_t(x) \qquad \forall x \in C^*(\mathbb{N}^*), \qquad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Puisqu'il est évident que H commute avec $\pi_\alpha(y)$ pour tout $y \in C^*(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \subset C_\mathbb{Q}$, nous obtenons alors

$$e^{itH}\; \pi_\alpha(x)\; e^{-itH} = \pi_\alpha(\sigma_t(x)) \qquad \forall x \in C_\mathbb{Q}, \forall t \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

Nous pouvons maintenant énoncer le :

Théorème 25. Soit $\widetilde{\pi}_\alpha$ l'extension canonique de la représentation π_α de $\mathcal{H}$ à la C^*-algèbre $C_\mathbb{Q}$, et soit $\beta > 1$.

(a) L'égalité suivante définit un état KMS_β sur $(C_\mathbb{Q}, \sigma_t)$:

$$\varphi_{\beta,\alpha}(x) = \zeta(\beta)^{-1}\ \mathrm{Trace}(\widetilde{\pi}_\alpha(x)\, e^{-\beta H}) \qquad \forall x \in C_\mathbb{Q}.$$

(b) L'application $\alpha \to \varphi_{\beta,\alpha}$ est un homomorphisme du groupe de Galois G de $\mathbb{Q}^{\mathrm{cycl}}$ avec l'espace des points extrêmes du simplexe de Choquet des états KMS_β sur $(C_\mathbb{Q}, \sigma_t)$.

Preuve. (a) D'abord, par la Proposition 19, nous savons que la représentation π_α s'étend à une représentation de $C_\mathbb{Q}$ et l'égalité (5) avec la finitude de $\mathrm{Trace}(e^{-\beta H}) = \zeta(\beta)$ donne (a).

(b) Fixons $\beta > 1$ et montrons d'abord que l'application $\alpha \to \varphi_{\beta,\alpha}$ est injective.

Pour montrer cela, noter que chacune des représentations π_α de $C_\mathbb{Q}$ est irréductible et par construction, chaque $\varphi_{\beta,\alpha}$ est un facteur d'état de type I_∞. Aussi sa construction GNS détermine canoniquement l'opérateur positif $H, 0 \in \mathrm{Sp}H$, comme un opérateur non-borné associé à la fermeture faible de $C_\mathbb{Q}$: en particulier, $\varphi_{\beta,\alpha}$ détermine canoniquement l'état à température 0,

$$\varphi_{\infty,\alpha}(x) = \langle \pi_\alpha(x)\, \varepsilon_1, \varepsilon_1 \rangle. \tag{6}$$

Quand on restreint cet état $\varphi_{\infty,\alpha}$ à l'anneau de groupes $\mathbb{Q}[\mathbb{Q}/\mathbb{Z}]$ de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ à coefficients rationnels, on trouve le plongement du corps $\mathbb{Q}^{\mathrm{cycl}}$ des racines de l'unité dans $\mathbb{C}$:

$$\varphi_{\infty,\alpha}(\sum \lambda_j \gamma_j) = \alpha(\sum \lambda_j \exp(2\pi i \gamma_j)) \tag{7}$$

qui bien sûr détermine $\alpha \in G$ de manière unique.

Ensuite, chaque $\varphi_{\beta,\alpha}$ est un facteur d'état et ainsi, est un point extrême de l'ensemble convexe faiblement compact K_β d'états KMS$_\beta$. Soit $\mathcal{E}(K_\beta)$ l'espace des points extrêmes de K_β. Nous avons montré que l'application $\alpha \to \varphi_{\beta,\alpha}$ est une injection de G dans $\mathcal{E}(K_\beta)$.

Cette application est faiblement continue puisque, comme $\beta > 1$, la série $\sum \alpha(\exp 2\pi i k\gamma) k^{-\beta}$ est uniformément convergente. Il reste à montrer que cette application est surjective. Noter d'abord que pour tout élément u de W, il existe un élément correspondant $\alpha(u)$ de G tel que

$$\varphi_{\beta,1} \circ \theta_u = \varphi_{\beta,\alpha(u)} \tag{8}$$

et l'application $u \to \alpha(u)$ est un isomorphisme entre W et G. Ensuite, il existe sur $C_{\mathbb{Q}}$ un unique état KMS$_\beta$ qui est W-invariant. Cela est vrai pour toute valeur $\beta \in]0,\infty[$ et cela découle de la Proposition 21 (b) et de la Proposition 8 (a). En effet, étant donné un tel état φ, on a $\varphi = \varphi \circ E$ où E est la projection $E = \int_W \theta_u du$ φ de $C_{\mathbb{Q}}$ sur $C_{\mathbb{Q}}^W$ et la restriction de φ à $C_{\mathbb{Q}}^W = C^*(\mathbb{N}^*)$ est unique. Alors soit ψ est un état KMS$_\beta$; on a

$$\int_W \psi \circ \theta_u du = \int_W \varphi_{\beta,\alpha(u)} du \tag{9}$$

puisque les deux côtés sont des états KMS$_\beta$ W-invariants. Maintenant, si $\psi \in \mathcal{E}(K_\beta)$ est un point extrême, cette égalité (9) donne deux décompositions du même état comme barycentre des mesures sur $\mathcal{E}(K_\beta)$, qui est un simplexe de Choquet (Proposition 2), de telle sorte que

$$\psi \circ \theta_u \in \{\varphi_{\beta,\alpha(v)} \; ; v \in W\} \quad \text{pour presque tout } u. \tag{10}$$

Finalement, cela implique que $\psi = \varphi_{\beta,\alpha(v)} \circ \theta_u^{-1}$ pour un $u, v \in W$ et ψ est dans l'image de l'application $\alpha \to \varphi_{\beta,\alpha}$. Puisque l'application $\alpha \to \varphi_{\beta,\alpha}$ est continue et bijective et puisque G est compact, il est homéomorphe à son image $\mathcal{E}(K_\beta)$ et cela prouve le Théorème 25.

Remarques 26.

(1) Nous donnerons dans la section prochaine la formule générale (pour toutes les valeurs de β) pour l'état KMS$_\beta$ W-invariant φ_β sur $C_{\mathbb{Q}}$, mais nous pouvons trouver la formule pour $\beta > 1$ d'ores et déjà en utilisant l'égalité (9). D'abord, en utilisant la base linéaire $(t_{n,m,\gamma})$ de $H \subset C_{\mathbb{Q}}$ décrite dans la Section 4, on a

$$\varphi(t_{n,m,\gamma}) = 0 \text{ si } n/m \neq 1 \;\; \forall \varphi \in K_\beta. \tag{11}$$

Ainsi, cela suffit pour déterminer la restriction de φ_β à $C_{\mathbb{Q}}$. Pour cela, on peut par exemple utiliser le côté droit de (9) et la formule du Théorème 25 (a) pour $\varphi_{\beta,\alpha}$. Soit $\gamma \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^*$. Alors on a

$$\int_G \alpha(\exp 2\pi i n\gamma)\, d\alpha = \frac{\mu(b/d)}{\varphi(b/d)} \tag{12}$$

où $\gamma = \frac{a}{b}, (a,b) = 1$ et $(n,b) = d$ est le p.g.c.d de n et b. De plus, μ est la fonction de Moebius et φ est l'indicateur d'Euler. Définissons ρ_β comme la fonction multiplicative telle que

$$\sum_{(n,b)=1} n^{-\beta} = \rho_\beta(b)\, \zeta(\beta). \tag{13}$$

On a $\rho_\beta(b) = \prod_{p|b,\, p\ premier} (1 - p^{-\beta})$.

L'unique état KMS_β W-invariant, donné par (9) satisfait

$$\varphi_\beta(e(\gamma)) = \sum_{d|b} \frac{\mu(b/d)}{\varphi(b/d)} \rho_\beta(b/d) d^{-\beta} \tag{14}$$

où b est le dénominateur de la fraction irréductible $\gamma = \frac{a}{b}$. Le côté droit de (14) est une fonction multiplicative de b et il est aussi donné par

$$\varphi_\beta(e(\gamma)) = b^{-\beta} \prod_{p|b,\, p\ premier} (1 - p^{\beta-1})(1 - p^{-1})^{-1} \tag{15}$$

comme cela peut être constaté en calculant le côté droit de (14) quand b est une puissance de premier. Nous donnerons une autre preuve de (15) dans la prochaine section.

(2) L'énoncé du Théorème 25 (b) s'applique aussi aux états à température 0 notés $\varphi_{\infty,\alpha}$. Pour de tels états extrêmes, l'application $\varphi_{\infty,\alpha}$ restreinte à $\mathbb{Q}[\mathbb{Q}/\mathbb{Z}] \subset C^*(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ donne l'appariement associé au corps $\mathbb{Q}^{\mathrm{cycl}}$ des racines de l'unité dans $\mathbb{C}$, comme nous l'avons vu plus haut.

(3) Le Théorème 25 montre que la fonction de partition du système C^*-dynamique $(C_\mathbb{Q}, \sigma_t)$ est la fonction zêta de Riemann.

7 Unicité des états KMS_β pour $\beta \in]0, 1]$

Dans cette section, nous allons montrer que pour $\beta \in]0, 1]$, il existe un unique état KMS_β sur la C^*-algèbre $C_\mathbb{Q}$. Nous avons vu dans la Section 5, Proposition 21, que la C^*-sous-algèbre $C^*(\mathbb{N}^*) \subset C_\mathbb{Q}$ engendrée par les μ_n est l'algèbre point fixe de l'action de W sur $C_\mathbb{Q}$:

$$C^*(\mathbb{N}^*) = C_\mathbb{Q}^W \tag{1}$$

Puisque W est un groupe abélien compact, son action sur $C_\mathbb{Q}$ a un spectre discret, et nous pouvons considérer pour chaque caractère χ de W le sous-espace spectral correspondant (cf. [Ped]),

$$C_{\mathbb{Q},\chi} = \{x \in C_\mathbb{Q} \,; \theta_u(x) = \chi(u)\, x \qquad \forall u \in W\} \tag{2}$$

Pour prouver l'unicité des états KMS_β sur $C_\mathbb{Q}$ pour $0 < \beta \leq 1$, nous allons analyser les automorphismes partiels des facteurs de type III_1 associés à $(C^*(\mathbb{N}^*), \varphi_\beta)$ et à un caractère non trivial fixe χ de W.

Nous montrerons que ces automorphismes partiels sont extérieurs. Étant donné un élément V de $C^*(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = C(\mathcal{R})$ (resp. un caractère χ de W), nous dirons que V (resp. χ) est localisé dans un sous-ensemble F de $\mathcal{P}$, l'ensemble des places finies de $\mathbb{Q}$, ssi

$$V \in (\otimes_{p\in F} C(R_p)) \otimes 1 \subset C(\mathcal{R}) \tag{3}$$

(resp. si χ, vu comme un caractère de $\mathcal{A}^*$, se factorise à travers la projection $W \to \prod_{p\in F} \mathbb{Q}_p^*$).

Énonçons le lemme principal.

Lemme 27. *Soient $\beta \in]0,1]$ et ψ un état KMS$_\beta$ sur le système C^*-dynamique $(C_{\mathbb{Q}}, \sigma_t)$. Alors :*

(a) La restriction de ψ à $C^*(\mathbb{N}^*)$ est égale à φ_β.

(b) Soit χ un caractère non trivial de W et $V \in C^*(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ une isométrie partielle tous deux localisés dans un ensemble fini $F \subset \mathcal{P}$, tels que

$$\theta_g(V) = \chi(g)V \qquad \forall g \in W.$$

Alors $\psi(Vx) = 0 \quad \forall x \in C^*(\mathbb{N}^*)$.

(c) La restriction de ψ aux sous-espaces spectraux $C_{\mathbb{Q},\chi}, \chi \neq 1$ est égale à 0.

Preuve. (a) Puisque la restriction de σ_t à $C^*(\mathbb{N}^*)$ est le groupe à un paramètre d'automorphismes de la Proposition 8, la restriction de ψ à $C^*(\mathbb{N}^*)$ est un état KMS$_\beta$ et la conclusion découle de la Proposition 8 (a).

(b) Soit $E = V^*V$. Comme $C^*(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ est commutatif, on a $E = VV^*$; aussi E appartient à l'algèbre $C_{\mathbb{Q}}^W = C^*(\mathbb{N}^*)$. Soit α l'automorphisme de l'algèbre réduite $C^*(\mathbb{N}^*)_E$ déterminé par l'égalité

$$\alpha(x) = V\, x\, V^* \qquad \forall x \in C^*(\mathbb{N}^*)_E. \tag{4}$$

Soit M le facteur (de type III$_1$) qui est la fermeture faible de $C^*(\mathbb{N}^*)$ dans la représentation G.N.S. de φ_β. Identifions $C^*(\mathbb{N}^*)$ avec une sous-algèbre faiblement dense de M et étendons l'état φ_β à un état normal $\widetilde{\varphi}_\beta$ sur M. Puisque V appartient à l'algèbre point fixe de σ_t, il appartient au centralisateur de ψ. Il suit de là que l'automorphisme α de $C^*(\mathbb{N}^*)_E$ préserve $\widetilde{\varphi}_\beta$ et s'étend à un automorphisme de M_E. Montrons que pour $\beta \in]0,1]$, cet automorphisme est extérieur. Pour tout $q \in \mathcal{P}\backslash F$, on a

$$E\mu_q \in M_E, \ \ \alpha(E\mu_q) = \chi(g_q)\, E\, \mu_q \tag{5}$$

où $g_q \in \mathcal{R}^* = \prod \mathbb{Z}_p^*$ est donné par ses composants

$$(g_q)_p = q \in \mathbb{Z} \cap \mathbb{Z}_p^* \ \text{ si } q \neq p, (g_q)_q = 1. \tag{6}$$

Pour prouver (5), notons que pour tout $f \in C(\mathcal{R}) = C^*(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a (cf. Proposition 18 (e))

$$f\mu_n = \mu_n f_n, \quad \text{où } f_n(b) = f(nb) \qquad \forall b \in \mathcal{R}. \tag{7}$$

Ainsi, si f est localisé dans $F \subset P$ et $q \notin F$, on obtient $\theta_{g_q}(f) = f_q$,

$$f\, \mu_q = \mu_q\, \theta_{g_q}(f). \tag{8}$$

En appliquant cela à $f = V$, on obtient $V\mu_q = \chi(g_q)\, \mu_q\, V$, i.e. on obtient (5). Voyons χ comme un caractère de $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*$ où les facteurs premiers de m appartiennent tous à F. Alors nous pouvons simplement écrire $\chi(q)$ plutôt que $\chi(g_q)$, pour $q \notin F$. Il découle de (5) que, modulo les automorphismes intérieurs, l'automorphisme α est le produit tensoriel infini

$$\alpha = \bigotimes_{q \notin F} \rho_{q,\chi(q)} \quad \text{dans} \quad M_{F^c} = \bigotimes_{q \notin F} (M_q, \varphi_{\beta,q}) \tag{9}$$

où pour tout nombre complexe $\lambda, |\lambda| = 1$, on définit $\rho_{p,\lambda}$ comme l'automorphisme de τ_p, tel que

$$\rho_{p,\lambda}(\mu_p) = \lambda \mu_p. \tag{10}$$

Cet automorphisme est un cas particulier de $\sigma_{t,p}$ et il préserve l'état $\varphi_{\beta,p}$ par construction.

Pour tout $\chi \in \widehat{W}$ localisé sur F, appelons $\widetilde{\theta}_\chi$ l'élément de $\mathrm{Ext}(M) = \mathrm{Aut}(M)/\mathrm{Int}(M)$ déterminé par la classe de

$$\left(\bigotimes_{q \in F} \mathrm{id} \right) \bigotimes \bigotimes_{q \notin F} \rho_{q,\chi(q)} \tag{11}$$

Lemme 28. $\widetilde{\theta}_\chi$ est intérieur relativement à φ_β ssi le produit infini suivant converge absolument en valeur absolue

$$\prod_{p \in \mathcal{P}} (1 - p^{-\beta})(1 - \chi(p)\, p^{-\beta})^{-1}.$$

Preuve. On a, dans le facteur M_p de type I_∞, associé à $(\tau_p, \varphi_{\beta,p})$, un facteur unitaire implémentant l'automorphisme $\rho_{p,\chi(p)}$; il est donné par l'opérateur diagonal qui a pour valeurs propres les $\chi(p)^j,\ j \in \mathbb{N}$. Évaluer l'état $\varphi_{\beta,p}$ sur cet unitaire donne

$$(1 - p^{-\beta}) \sum_{0}^{\infty} \chi(p)^n\, p^{-n\beta} = (1 - p^{-\beta})(1 - \chi(p)\, p^{-\beta})^{-1}$$

et le résultat suit de critères généraux (cf. [Co]). Cela montre en utilisant le théorème de Dirichlet [Ser$_1$] que $\widehat{\theta}_\chi$ est extérieur (χ non trivial) quand $\beta \leq 1$ et est intérieur (puisque φ_β est un facteur d'états de type I_∞) pour $\beta > 1$.

Ce lemme montre que, pour $\beta \in]0, 1]$, l'automorphisme α de M_E donné par (4) est extérieur :

$$\{y \in M_E \ ; \quad y\, \alpha(x) = xy \quad \forall x \in M_E\} = \{0\}. \tag{12}$$

Maintenant, soit L la forme linéaire sur M_E donnée par

$$L(x) = \psi(Vx) \quad \forall x \in C^*(\mathbb{N}^*)_E. \tag{13}$$

L'inégalité de Schwartz $|L(x)|^2 < \psi(E)\, \psi(x^* x)$ montre que c'est une fonctionnelle linéaire normale sur M_E. Soit u l'isométrie partielle, $u \in M_E$, de sa décomposition polaire $L = u\, |L|$. La condition KMS_β pour ψ appliquée à la paire Vx, y ; $x \in C^*(\mathbb{N}^*)$, $y \in C^*(\mathbb{N}^*)$, montre que L satisfait la condition KMS_β α-tordue, où $L(\sigma_t(y)\ x)$ est remplacé par $L(\sigma_t(y)\ \alpha(x))$. Maintenant puisqu'à la fois V et ψ sont σ_t invariants, L l'est aussi et par conséquent, u et $|L|$ le sont aussi. Il suit de ça que la dérivée de Radon-Nikodym $(D|L| : D\widetilde{\varphi}_\beta)_t$ appartient au centralisateur de $\widetilde{\varphi}_\beta$ et est de la forme h^{it} avec

$$|L|(x) = \widetilde{\varphi}_\beta(hx) \quad \forall x \in M_E. \tag{14}$$

De la condition KMS_β tordue, on obtient

$$z\, hu = hu\, \alpha(z) \quad \forall z \in M_E \tag{15}$$

ce qui implique par (12) que $hu = 0$ et que $L = 0$.

Cela prouve le Lemme 27 (b). Prouvons 27 (c). Il suffit pour cet objectif, étant donné un caractère $\chi \in \widehat{W}$ localisé dans $F \subset \mathcal{P}$, de trouver une séquence V_n d'isométries partielles $V_n \in C^*(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = C(\mathcal{R})$, localisée dans F et telle que

$$\theta_g(V_n) = \chi(g)V_n \qquad \forall g \in W \ ; \ \varphi_\beta(V_nV_n^*) \underset{n\to\infty}{\to} 1. \tag{16}$$

Alors, $a \in C_{\mathbb{Q},\chi}$ étant donné, on a :

$$\psi(a) = \lim_{n\to\infty} \psi(V_n\, V_n^*\, a) = 0$$

parce que $V_n^*\, a \in C_{\mathbb{Q},1} = C^*(\mathbb{N}^*)$ et le Lemme 27 (b) s'applique. Finalement la construction des V_n se réduit par le Lemme 22 à la construction de fonctions continues $V_n \in C(\prod_{p\in F} \mathbb{Z}_p)$ telles que

$$V_n(gb) = \chi(g)V_n(b) \qquad \forall b \in \prod_F \mathbb{Z}_p, g \in \prod_F \mathbb{Z}_p^* \tag{17}$$

et telles que les $|V_n|$ sont uniformément bornées et convergent ponctuellement vers 1 ; ceci est immédiat et l'existence des isométries partielles V_n en découle.

Corollaire 29. *Pour tout $\beta \in]0,1]$, il existe au moins un état KMS$_\beta$ sur $C_{\mathbb{Q}}$.*

Preuve. Le groupe W est un groupe compact tel que la somme directe des sous-espaces spectraux $C_{\mathbb{Q},\chi}$, est dense dans $C_{\mathbb{Q}}$ et cela détermine ψ de manière unique par le Lemme 27.

Nous allons maintenant construire cet unique état KMS$_\beta$ ψ_β sur $C_{\mathbb{Q}}$ de manière géométrique en utilisant l'action du produit d'arbres de la Section 3. La construction va découler du lemme général suivant, appliqué au C^*-module $\mathcal{E} = C^*(G)e$ sur $C^*(\mathbb{N}^*)$ et à l'évolution temporelle σ_t de $C^*(\mathbb{N}^*)$.

Lemme 30. *Soit C une C^*-algèbre unitaire, $\mathcal{E}$ un C^*-module sur C, $(\sigma_t)_{t\in\mathbb{R}}$ un groupe à un paramètre d'automorphismes de C, $\beta \in]0,\infty[$, φ_β un état KMS$_\beta$ sur C, et $\mathcal{H}_{\varphi_\beta}$ l'espace de Hilbert de la construction GNS pour φ_β.*

(a) *Soit $\mathcal{H}_\beta$ la complétion de $\mathcal{E}$ pour le produit intérieur donné par*

$$\langle \xi, \eta\rangle_\beta = \varphi_\beta(\langle \xi, \eta\rangle) \qquad \forall \xi, \eta \in \mathcal{E}.$$

Alors, l'action des endomorphismes $\mathrm{End}_C(\mathcal{E})$ sur $\mathcal{E}$ s'étend par continuité à $\mathcal{H}_\beta$.

(b) *Il existe une représentation unique ρ de C^0 (l'algèbre opposée de C) dans $\mathcal{H}_\beta$ telle que pour tout $\xi \in \mathcal{H}_\beta$ et $a \in C$ dans le domaine de $\sigma_{i\beta/2}$, on a*

$$\rho(a)\xi = \xi\sigma_{i\beta/2}(a).$$

Cette représentation commute avec l'action à gauche de $\mathrm{End}_C(\mathcal{E})$.

Preuve. L'espace de Hilbert $\mathcal{H}_\beta$ est le produit tensoriel des C^*-modules

$$\mathcal{H}_\beta = \mathcal{E} \otimes_C \mathcal{H}_{\varphi_\beta} \tag{18}$$

de telle sorte que la première assertion en découle. La seconde assertion en découle également, en utilisant $\mathcal{H}_{\varphi_\beta}$, comme une algèbre de Hilbert gauche et le théorème de stabilisation de Kasparov [Ka].

Nous appliquons ce lemme avec $C = C^*(\mathbb{N}^*)$, $\mathcal{E} = C^*(G)e$, et $\sigma_t \in \mathrm{Aut}\, C$ donné par l'évolution temporelle (Proposition 7 (c)) de $C^*(\mathbb{N}^*)$. Comme $\mathcal{E}$ est un espace de fonctions sur Δ, il en est de même de chaque $\mathcal{H}_\beta$, et pour chaque $\alpha \in \Delta$, nous prenons ε_α la fonction caractéristique de $\{\alpha\} \subset \Delta$. Les vecteurs $\varepsilon_\alpha, \alpha \in \Delta$ sont de longueur unité dans chaque $\mathcal{H}_\beta$ et fibrent toujours un sous-espace dense de $\mathcal{H}_\beta$. Pour $\beta = 1$, ils forment une base orthonormée de telle sorte que $\mathcal{H}_1 = \ell^2(\Delta)$. Pour calculer le produit intérieur $\langle \varepsilon_\alpha, \varepsilon_{\alpha'} \rangle_\beta$ dans $\mathcal{H}_\beta$, nous allons d'abord travailler localement, i.e. nous fixons le corps local $K = \mathbb{Q}_p$, et appliquons le Lemme 30 à $C = C^*(P_K)_e$ la C^*-algèbre réduite de P_K relative à la projection $e = 1_{P_R}$, alors que le C^*-module est $\mathcal{E} = C^*(P_K)e$. Nous utilisons sur C l'état $\varphi_{\beta,p}$.

Alors le Lemme 30 fournit un produit intérieur sur l'espace des fonctions à support fini sur l'arbre $T_P = P_K/P_R$.

Calculons maintenant explicitement ce produit intérieur sur l'arbre T associé à n'importe quelle valeur β. Ainsi, K est un corps local, $K = \mathbb{Q}_p$, et nous notons d'abord qu'en transportant $\varphi_{\beta,p}$ par l'isomorphisme canonique entre τ_p et la C^*-algèbre réduite $C^*(P_K)_e$, sa valeur sur une fonction P_R-bi-invariante $f(s), s \in P_K$ est donnée par (cf. formule (9) de la Section 3),

$$\varphi_{\beta,p}(f) = \left(\sum_{k>0} p^{k(1-\beta)} f\left(\begin{bmatrix} 1 & p^{-k} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \right) (1 - p^{\beta-1}) + f\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right). \tag{19}$$

Soit $g \in P_K, g = \begin{bmatrix} 1 & n_0 \\ 0 & h_0 \end{bmatrix}$. Le produit intérieur $\langle g\, \varepsilon_0,\ \varepsilon_0 \rangle_\beta$, avec ε_0 correspondant au point de base, est égal à $\varphi_{\beta,p}(f)$, où la fonction f est associée par la formule (13) de la section 3 aux classes à droite P_R et $g\, P_R$ dans P_K/P_R :

$$f(s) = m(gP_R \cap P_R s^{-1}) \qquad \forall s \in P_K \tag{20}$$

où m est la mesure de Haar à gauche sur P_K. Nous avons juste besoin d'évaluer $f(s)$ pour $s = \begin{bmatrix} 1 & p^{-k} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. On a

$$\begin{aligned} P_R\, s^{-1} &= \left\{ \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & p^{-k} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} ; \mathrm{val}(n) \geq 0, \mathrm{val}(h) = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} 1 & p^{-k} + n \\ 0 & h \end{bmatrix} ; \mathrm{val}(n) \geq 0, \mathrm{val}(h) = 0 \right\} \end{aligned} \tag{21}$$

Tous ses éléments $\begin{bmatrix} 1 & m \\ 0 & a \end{bmatrix}$ satisfont $\mathrm{val}(a) = 0$. Cela implique que $P_R\, s^{-1} \cap g\, P_R \neq \varnothing$ seulement si $\mathrm{val}(h_0) = 0$. Ainsi

$$\langle g\, \varepsilon_0, \varepsilon_0 \rangle = 0 \quad \text{si} \quad \mathrm{val}(h_0) \neq 0 \quad \left(\text{pour } g = \begin{bmatrix} 1 & n_0 \\ 0 & h_0 \end{bmatrix} \in P_K \right). \tag{22}$$

Supposons maintenant que $\mathrm{val}(h_0) = 0$; en remplaçant g par $g \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & h_0^{-1} \end{bmatrix}$, nous pouvons supposer que $ho = 1$ sans changer $g\ \varepsilon_0$. On a

$$
\begin{aligned}
g\ P_R &= \left\{ \begin{bmatrix} 1 & n_0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & n_1 \\ 0 & h_1 \end{bmatrix} ; \mathrm{val}(n_1) \geq 0, \mathrm{val}(h_1) = 0 \right\} \\
&= \left\{ \begin{bmatrix} 1 & n_1 + h_1 n_0 \\ 0 & h_1 \end{bmatrix} ; \mathrm{val}(n_1) \geq 0, \mathrm{val}(h_1) = 0 \right\}
\end{aligned} \tag{23}
$$

On a $g\ P_R \cap P_R\ s^{-1} \neq \varnothing$ seulement si $\mathrm{val}(n_0) = -k$. Supposons que $\mathrm{val}(n_0) = -k$. Alors nous avons besoin de calculer la mesure de Haar multiplicative sur l'ensemble de $h_1 \in R^*$ telle que $h_1 n_0 = p^{-k} \mod R$. Cela est vérifié ssi $h_1 \in p^{-k}\ n_0^{-1} + n_0^{-1}\ R = p^k\ n_0^{-1} + p^k\ R$. Les mesures de Haar additive et multiplicative coïncident sur R^* à un coefficient global près $d^*h = \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} dh$. Ainsi nous obtenons l'égalité, avec $g = \begin{bmatrix} 1 & n_0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$
\begin{aligned}
f\left(\begin{bmatrix} 1 & p^{-k} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) &= (1 - p^{-1})^{-1} p^{-k} \qquad \text{si } k = -\mathrm{val}(n_0) \\
f\left(\begin{bmatrix} 1 & p^{-k} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) &= 0 \qquad \text{si } k \neq -\mathrm{val}(n_0)
\end{aligned} \tag{24}
$$

Ceci avec la formule (19) donne l'égalité

$$
\varphi_{\beta,p}(f) = p^{-k\beta}(1 - p^{\beta-1})(1 - p^{-1})^{-1}, \quad k = -\mathrm{val}(n_0) \tag{25}
$$

i.e.

$$
\langle g\ \varepsilon_0, \varepsilon_0 \rangle_\beta = p^{-k\beta}(1 - p^{\beta-1})(1 - p^{-1})^{-1}, \tag{26}
$$

où $g = \begin{bmatrix} 1 & n_0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, k = -\mathrm{val}(n_0)$.

L'étape suivante consiste à comprendre la signification géométrique de l'orbite de $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} L_0 \right\}$ dans l'arbre T_p et de la valeur $k = -\mathrm{val}(n)$. Puisque l'action de P_K sur l'arbre T_p fixe un point à l'∞, elle préserve les horocycles correspondant à ce point. Ces horocycles sont les classes d'équivalence de la relation $R_\infty : L \sim L'$ ssi $\exists q$ tel que $t^q\ L = t^q\ L'$ où t est la translation hyperbolique d'une unité vers le point à l'∞.

Nous vérifions d'abord que les deux treillis L, L' sont R_∞ équivalents ssi ils sont sur la même orbite du sous-groupe $\begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $n \in K$ de P_K. Ce sous-groupe est un sous-groupe normal et par conséquent, il définit une relation d'équivalence qui est stable par l'action à gauche de P_K. L'application t est donnée par

$$
t(g\ L_0) = g\ g_p\ L_0 \qquad \forall g \in P_K \quad \text{avec } g_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{bmatrix} \tag{27}
$$

Plus généralement, $t^q(g\ L_0) = g\ g_p^q\ L_0 \quad \forall g \in P_K$.

Ainsi $g_1\ L_0\ \sim\ g_2\ L_0(R_q)$ ssi $g_1\ g_p^q\ L_0 = g_2\ g_p^q\ L_0$, i.e.

(28)
$$g_2^{-1}\ g_1\ \in\ g_p^q\ P_R\ g_p^{-q}.$$

Cela est vérifié ssi $g_2^{-1}g_1$ est de la forme $\begin{bmatrix}1 & m\\ 0 & h\end{bmatrix}$, $\mathrm{val}(h)=0,\ \mathrm{val}(m)\geq -q$. Ainsi $g_1 L_0 \sim g_2\ L_0(R_\infty)$ ssi $g_2^{-1}g_1 \in K \rtimes R^*$. Les deux treillis $g\ L_0$ et $\begin{bmatrix}1 & n\\ 0 & 1\end{bmatrix} g\ L_0$ satisfont trivialement cette relation et inversement, si $g_1\ L_0 \sim g_2 L_0(R_\infty)$, nous pouvons écrire g_2 comme $\begin{bmatrix}1 & n\\ 0 & 1\end{bmatrix} g_1$ sans affecter $g_j\ L_0$.

Interprétons maintenant la valeur de $-\mathrm{val}(m)$ comme une fonction de distance entre L_0 et $L = \begin{bmatrix}1 & m\\ 0 & 1\end{bmatrix} L_0$. Soit $k=-\mathrm{val}(m)$. Nous savons que $t^k(L_0)=t^k(L)$ et que cela n'est pas vrai pour $k-1$. Ainsi $d(L_0,L)=2k$. On obtient

Lemme 31. Soient $L, L' \in T$ deux treillis.

(a) S'ils appartiennent à des classes d'équivalence d'horocycles différents, ils sont orthogonaux pour $\langle\ \rangle_\beta$.

(b) S'ils appartiennent à des classes de même horocycle à distance $d(L,L')=2k>0$, on a
$$\langle \varepsilon_L, \varepsilon_{L'}\rangle_\beta = p^{-k\beta}(1-p^{\beta-1})(1-p^{-1})^{-1}.$$

(c) Si $L=L'$, alors $\langle \varepsilon_L, \varepsilon_{L'}\rangle_\beta = 1$.

Remarques.

(a) Pour $\beta \to +\infty$, le produit intérieur ci-dessus converge vers une valeur non nulle seulement si $L=L'$ ou si $L\neq L'$ mais $L\sim L'(R_1)$, auquel cas il tend vers $-p^{-1}(1-p^{-1})^{-1}$.

(b) Pour $\beta=0$, le produit intérieur converge vers 1 sur la classe d'équivalence de chaque horocycle, qui se réduisent alors à un seul point dans $\mathcal{H}_\beta,\ \beta=0$.

Calculons maintenant le produit intérieur correspondant sur $\Delta=\prod(T_p,L_0)=P_{\mathbb{Q}}^+/P_{\mathbb{Z}}^+$. Appelons à nouveau L_0 le point de base. Étant donnée $\begin{bmatrix}1 & n\\ 0 & h\end{bmatrix} = g,\ n\in\mathbb{Q},\ h\in\mathbb{Q}_+^*$, pour obtenir un produit intérieur non nul, $\langle g\ L_0, L_0\rangle$, nous avons besoin qu'en chaque place p, $g_p\ L_0 \sim L_0(R_\infty)$ et ainsi que $\mathrm{val}(g_p)=0$. Alors $h=1$. Posons alors $N=\left\{\begin{bmatrix}1 & n\\ 0 & 1\end{bmatrix}\ ; n\in\mathbb{Q}\right\}$ et essayons de comprendre le produit intérieur sur l'orbite $N\ L_0$. Nous avons une base ε_x paramétrée par $x\in\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$,
$$\varepsilon_x = \begin{bmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{bmatrix} L_0.$$

Le produit intérieur $\langle\varepsilon_x,\varepsilon_0\rangle_\beta$ est alors donné, en utilisant le Lemme 31, par

(29)
$$\langle\varepsilon_x,\varepsilon_0\rangle_\beta = \prod_{\substack{p\in P\\ k_p\neq 0}} p^{-k_p\beta}(1-p^{\beta-1})(1-p^{-1})^{-1}$$

où $x = a/b$, $(a,b) = 1$ et $b = \prod_p p^{k_p}$ est la décomposition de b comme produit de puissances de premiers. Plus généralement, elle est invariante par translations, i.e. $\langle \varepsilon_x, \varepsilon_y \rangle_\beta = \langle \varepsilon_{x-y}, \varepsilon_0 \rangle_\beta$; ainsi la positivité qui en découle est le fait que la fonction donnée par (29) est de type positif sur le groupe des racines de l'unité $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Cette fonction est la fonction ψ_β du Théorème 5.

On a $\langle g_1\, L_0, g_2\, L_0 \rangle_\beta = 0$ si $g_2^{-1} g_1 \notin N$.

Prenons alors une orbite arbitraire $N\, g\, L_0, g \in P_{\mathbb{Q}}^+$. Nous avons besoin de calculer $\langle (1,x)\, g\, L_0, (1,y)\, g\, L_0 \rangle_\beta$ où $x, y \in \mathbb{Q}$ et $(1,x)$, $(1,y)$ sont les éléments correspondant de N. On a $\langle (1,x)\, g\, L_0, (1,y)\, g\, L_0 \rangle = (\langle g\, \varepsilon_{x'}, g\, \varepsilon_{y'} \rangle = \langle \varepsilon_{x'-y'}, \varepsilon_0 \rangle$ où $(1,x') = g^{-1}(1,x)g$ et $(1,y') = g^{-1}(1,y)g$. Ainsi, nous voyons que les orbites $N \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \varepsilon_0$, $k \in \mathbb{Q}_+^*$, sont orthogonaux deux à deux pour $\langle\ \rangle_\beta$ et le produit intérieur est, à un renommage près, donné par (29) sur chacun d'eux.

Nous sommes maintenant prêts à décrire les espaces de Hilbert $\mathcal{H}_\beta$ associés par le Lemme 30 au C^*-module $\mathcal{E} = Be$ sur $C^*(\mathbb{N}^*)$ et les états KMS φ_β, et alors à obtenir le commutant de $P_{\mathbb{Q}}^+$ dans $\mathcal{H}_\beta$ comme une représentation unitaire de la C^*-algèbre $C_{\mathbb{Q}}$.

Proposition 32.

(a) *Soit $\mathcal{H}_\beta$ la complétion de l'espace de Hilbert du C^*-module $C^*(P_A)e$, sur $eC^*(P_A)e = C^*(\mathbb{N}^*)$, avec l'état φ_β. Alors $\mathcal{H}_\beta$ a une base naturelle indexée par $P_{\mathbb{Q}}^+/P_{\mathbb{Z}}^+$, et son produit intérieur est invariant par translations à gauche par $P_{\mathbb{Q}}^+$ et donné par*

$$\left\langle \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & a \end{bmatrix} \varepsilon_e, \varepsilon_e \right\rangle = 0 \qquad \text{à moins que } a = 1$$

$$\left\langle \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \varepsilon_e, \varepsilon_e \right\rangle = \psi_\beta(b)$$

où ψ_β est la fonction de type positif définie dans le Théorème 5.

(b) *La C^*-algèbre $C_{\mathbb{Q}}^0$ admet une représentation dans $\mathcal{H}_\beta$ donnée par la convolution droite avec $\delta^{\beta/2} f$ pour toute fonction $P_{\mathbb{Z}}^+$-bi-invariante f sur $P_{\mathbb{Q}}^+$.*

(c) *Le vecteur $\varepsilon_0 =$ classe de $P_{\mathbb{Z}}^+$ est cyclique pour $P_{\mathbb{Q}}^+$, séparateur pour $C_{\mathbb{Q}}$, $\overline{C_{\mathbb{Q}}\varepsilon_0}$ est l'ensemble des points fixes de $P_{\mathbb{Z}}^+ \subset P_{\mathbb{Q}}^+$ et $(C_{\mathbb{Q}})''$ est le commutant de $P_{\mathbb{Q}}^+$ dans $\mathcal{H}_\beta$.*

(d) *Le vecteur ε_0 définit un état KMS_β sur $C_{\mathbb{Q}}$.*

Preuve. La preuve de (a) découle de (29). Définissons $\mathcal{H}_{\beta,1}$ comme le sous-espace de $\mathcal{H}_\beta$ engendré par l'orbite $N\varepsilon_0$ de ε_0 sous le sous-groupe normal N de $P_{\mathbb{Q}}^+$. Plus généralement, pour $k \in \mathbb{Q}_+^*$, nous prenons

$$\mathcal{H}_{\beta,k} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \mathcal{H}_{\beta,1}. \tag{30}$$

Les sous-espaces $\mathcal{H}_{\beta,k}$ sont orthogonaux deux à deux et $\mathcal{H}_\beta$ est leur somme directe.

Prouvons (b). Nous savons que l'action par convolution droite de l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}$ d'une fonction $P_{\mathbb{Z}}^{+}$-bi-invariante sur $P_{\mathbb{Q}}^{+}$ amène une représentation de $\mathcal{H}^0$ sur l'enveloppe linéaire de la base naturelle $\varepsilon_x, x \in P_{\mathbb{Q}}^{+}/P_{\mathbb{Z}}^{+}$ de $\mathcal{H}_\beta$. Cela est encore vrai si l'on tord cette action par l'automorphisme (non involutif) de $\mathcal{H}$ donné par la multiplication par $\delta^{\beta/2}$. Nous avons alors seulement besoin de montrer que la nouvelle représentation de $\mathcal{H}^0$ dans $\mathcal{H}_\beta$ est *involutive.* Quand nous restreignons cette représentation à l'anneau de groupes de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, nous obtenons (comme $\delta = 1$ sur les classes doubles dans $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$) que la représentation correspondante de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ est donnée par

$$\rho(\gamma) \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & a \end{bmatrix} \varepsilon_0 = \begin{bmatrix} 1 & b+\gamma \\ 0 & a \end{bmatrix} \varepsilon_0. \tag{31}$$

Ainsi $\rho(\gamma)$ est diagonal dans la décomposition $\mathcal{H}_\beta = \oplus \mathcal{H}_{\beta,k}$, et sa restriction à $\mathcal{H}_{\beta,k}$ est unitaire puisque l'action gauche de N sur $\mathcal{H}_{\beta,k}$ est unitaire.

Quand nous restreignons la représentation ρ de $\mathcal{H}^0$ à la sous-algèbre involutive engendrée par les μ_n, son unitarité découle du Lemme 30 (b). Le calcul explicite de l'isométrie $U_p = \rho(\mu_p^*)$ dans $\mathcal{H}_\beta$ associée à μ_p^*, p un nombre premier, est le suivant. Nous appelons comme ci-dessus t_p la translation hyperbolique d'une unité de longueur vers le point à l'∞ dans l'arbre T_p. Nous le faisons agir trivialement sur les autres arbres. On obtient alors

$$U_p\, \varepsilon_\alpha = p^{\beta/2-1} \sum_{t_p(\alpha')=\alpha} \varepsilon_{\alpha'}. \tag{32}$$

On peut vérifier directement en utilisant le Lemme 31 que U_p est effectivement une isométrie.

Nous avons ainsi montré que ρ est une représentation involutive de $\mathcal{H}^0$ dans $\mathcal{H}_\beta$ et par la Proposition 19, elle s'étend à une représentation de $C_{\mathbb{Q}}^0$ dans $\mathcal{H}_\beta$. Cela prouve (b). Par construction, ε_0 est cyclique pour $P_{\mathbb{Q}}^{+}$. Puisque l'action ci-dessus de $\mathcal{H}^0$ (et $C_{\mathbb{Q}}^0$) commute avec $P_{\mathbb{Q}}^{+}$, le vecteur ε_0 est séparateur pour $C_{\mathbb{Q}}^0$. La preuve de la dernière assertion de (c) est la même que dans le cas $\beta = 1$ (cf. Lemme 17). La preuve de (d) est la même que celle du Lemme 16.

En combinant le Corollaire 29 et la Proposition 32 (d), nous obtenons que pour $\beta \in]0,1]$, l'état sur $C_{\mathbb{Q}}$ donné par

$$\varphi(x) = \langle \rho(x)\varepsilon_0, \varepsilon_0 \rangle \qquad \forall x \in C_{\mathbb{Q}} \tag{33}$$

est le seul état KMS$_\beta$. Ceci combiné à 32 (a) complète la preuve du Théorème 5.

Remarques 33.

(a) Soient $\mathcal{H}_\beta$, Δ l'opérateur de multiplication par k^β sur $\mathcal{H}_{\beta,k}$. Il existe un unique poids ψ_β (à une constante multiplicative près) sur $(P_{\mathbb{Q}}^{+})''$ à groupe modulaire d'automorphismes

$$\sigma_t^{\psi_\beta}(.) = \Delta^{it}.\Delta^{-it}. \tag{34}$$

Pour chaque $m \in \mathbb{N}^*$, le vecteur $\varepsilon_m = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & m^{-1} \end{bmatrix} \varepsilon_d$ est séparateur pour $C_{\mathbb{Q}}''$ mais non cyclique. Son extension cyclique $\overline{C_{\mathbb{Q}}\varepsilon_n}$, définit une projection $E_m \in (P_{\mathbb{Q}})''$ qui appartient au centralisateur de ψ_β et sur lequel ψ_β est fini. Sur le sous-espace E_m, l'opérateur modulaire de la paire

($P''_{\mathbb{Q}}/E_m, C''_{\mathbb{Q}}$ et vecteur ε_m) est la restriction de Δ. Le sous-espace E_m est l'espace des points fixes du sous-groupe $\begin{bmatrix} 1 & m\mathbb{Z} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ de $P^+_{\mathbb{Q}}$. Ces sous-espaces forment une famille imbriquée (i.e. $E_m \subset E_{m'}$ si m divise m') qui est totale dans $\mathcal{H}_\beta$.

(b) Nous avons utilisé tout au long de cet article la paire de groupes $P^+_{\mathbb{Q}}, P^+_{\mathbb{Z}} \subset P^+_{\mathbb{Q}}$ plutôt que la paire $P_{\mathbb{Q}}, P_{\mathbb{Z}} \subset P_{\mathbb{Q}}$. La relation entre les systèmes C^*-dynamiques correspondant $C^*(P^+_{\mathbb{Q}},\ P^+_{\mathbb{Q}}), \sigma_t$ et $C^*(P_{\mathbb{Q}}, P_{\mathbb{Z}}), \sigma_t$ est assez simple. En effet, le dernier est juste la C^*-algèbre des points fixes de l'involution α du premier donnée par la conjugaison complexe $z \to \overline{z}$ vue comme un élément de $W = Gal(\mathbb{Q}^{\rm cycl})$.

Ceci est facile à vérifier parce que la classe double X modulo $P_{\mathbb{Z}}$ d'un élément $g \in P_{\mathbb{Q}},\ g = \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & a \end{bmatrix}$ est la même que la classe double modulo $P_{\mathbb{Z}}$ de $g = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{bmatrix}, \varepsilon = \mathrm{Sign}(a)$, ce qui nous autorise à supposer que $a > 0$. Cela montre que les fonctions $P_{\mathbb{Z}}$-bi-invariantes sur $P_{\mathbb{Q}}$ incluent toutes les fonctions $P^+_{\mathbb{Z}}$ invariantes sur $P^+_{\mathbb{Q}}$, qui sont invariantes sous l'involution

$$g \to \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} g \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad g \in P^+_{\mathbb{Q}}. \tag{35}$$

On obtient ainsi l'égalité σ_t équivariante

$$C^*(P_{\mathbb{Q}}, P_{\mathbb{Z}}) = C^*(P^+_{\mathbb{Q}}, P^+_{\mathbb{Z}})^\alpha \tag{36}$$

et on peut réécrire le théorème principal de notre article en fonction de $C^*(P_{\mathbb{Q}}, P_{\mathbb{Z}})$.

(c) Dans cet article, nous avons ignoré la place à l'infini dans notre traitement des états ou des poids KMS$_\beta$ et dans la construction de $C_{\mathbb{Q}}$ à partir de l'action sur le produit d'arbres (Section 2). Nous avons obtenu, pour les places finies, l'action de P_K sur l'arbre de $SL(2, K)$ ainsi que le produit intérieur adéquat sur les fonctions sur l'arbre (Section 5) à partir de la compréhension des poids KMS$_\beta$ sur $C^*(P_K)$ et de la réduction par la projection $e \in C^*(P_K),\ e = 1_{P_R}$.

À la place infinie, le système C^*-dynamique en jeu est $C^*(P_{\mathbb{R}}), \sigma_t$ où $P_{\mathbb{R}}$ est le groupe de matrices

$$\begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & a \end{bmatrix} \quad ; \qquad b \in \mathbb{R},\ \ a \in \mathbb{R}^* \tag{37}$$

et où σ_t est donné par le module δ de $P_{\mathbb{R}}$,

$$\sigma_t(f)(g) = \delta(g)^{-it} f(g) \qquad \forall f \in L^1(P_{\mathbb{R}}),\ t \in \mathbb{R}. \tag{38}$$

La C^*-algèbre de $P_{\mathbb{R}}$ est, en utilisant l'identification de $\mathbb{R}$ avec son groupe dual de Pontrjagin, donnée par

$$C^*(P_{\mathbb{R}}) = C_0(\mathbb{R}) \rtimes \mathbb{R}^* \tag{39}$$

où l'action de $\mathbb{R}^*$ se fait par homothéties. Cette action a deux orbites, $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ et $\{0\}$ et à la séquence exacte équivariante de C^*-algèbres

$$0 \to C_0(\mathbb{R}\backslash\{0\}) \to C_0(\mathbb{R}) \to \mathbb{C} \to 0 \tag{40}$$

correspond la séquence exacte de produits croisés :

$$0 \to \mathcal{K} \to C^*(P_{\mathbb{R}}) \to C^*(\mathbb{R}^*) \to 0 \tag{41}$$

similaire à la séquence exacte de la C^*-algèbre de Toeplitz. Ici l'idéal à deux côtés $\mathcal{K}$ est la C^*-algèbre élémentaire d'opérateurs compacts. La théorie de la représentation de $C^*(P_{\mathbb{R}})$ découle immédiatement de (7) et en plus des caractères de $C^*(\mathbb{R}^*)$ qui fournissent des représentations à une dimension de $C^*(P_{\mathbb{R}})$, on a une unique représentation irréductible de dimension infinie π. Cette représentation peut être décrite comme suit. On pose $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$ avec

$$(\pi(g)\xi)(t) = |a|^{1/2}\xi(at - b) \qquad \forall t \in \mathbb{R}, \xi \in L^2(\mathbb{R}) \tag{42}$$

où $g = \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & a \end{bmatrix}$ comme ci-dessus, appartient à $P_{\mathbb{R}}$.

Pour chaque $\beta \in]0, \infty[$, il existe, à normalisation près, un unique poids KMS_β sur $C^*(P_{\mathbb{R}})$, donné par

$$\varphi_\beta(f) = \mathrm{Trace}(\pi(f)\Delta^{-\beta/2}) \qquad \forall f \in C^*(P_{\mathbb{R}})^+ \tag{43}$$

où $\Delta = -\frac{d^2}{dt^2}$ est le Laplacien, un opérateur auto-adjoint non-borné dans $L^2(\mathbb{R})$.

Par construction, φ_β est le poids du facteur de type I_∞ qui est le poids dominant ([C], [C-T]) sur le facteur de type I_∞ correspondant. Il découle de cela que pour tout facteur M de poids ψ, le centralisateur de $\psi \otimes \varphi_\beta$ est l'algèbre de von Neumann semi-finie associée à la décomposition continue de M, i.e. le produit croisé par le groupe modulaire d'automorphismes σ_ψ,

$$(M \otimes I_\infty)_{\psi \otimes \varphi_\beta} = M \rtimes_{\sigma^\psi} \mathbb{R}. \tag{44}$$

Dans notre cas, avec $\beta \in]0, 1]$, il est naturel de prendre pour M le commutant de $P_{\mathbb{Q}}^+$ agissant dans l'espace de Hilbert $\mathcal{H}_\beta$ (cf. Proposition 32). Pour obtenir le produit croisé (44), il est alors naturel d'utiliser à la place infinie l'espace de Hilbert $\mathcal{H}_\beta^\infty$ de la construction GNS du poids φ_β sur $C^*(P_{\mathbb{R}})$. Dans le produit tensoriel $\mathcal{H}_\beta \otimes \mathcal{H}_\beta^\infty$, on a une action naturelle de produit du groupe P_A sur les adèles $A = \mathcal{A} \times \mathbb{R}$. Le produit croisé (44) est alors contenu dans le commutant de $P_{\mathbb{Q}}^+$ qui est un *sous-groupe discret* de P_A.

Bibliographie

[A-W] H. Araki and E.J. Woods. A classification of factors. Publ. Res. Inst. Math. Sci. Kyoto Univ., **4** (1968), 51-130.

[Bi] M. Binder. Induced factor representations of discrete groups and their type. Jour. Functional Analysis, to appear.

[Bl] B.E. Blackadar. The regular representation of restricted direct product groups. Jour. Functional Analysis, **25** (1977), 267-274.

[Bos-C] J.-B. Bost and A. Connes. Produits eulériens et facteurs de type III. C.R. Acad. Sci. Paris, **315** (I) (1992), 279-284.

[Br-R] O. Bratteli and D.W. Robinson. Operator algebras and quantum statistical mechanics I, IT. Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, 1981.

[Com] F. Combes. Poids associé à une algèbre hilbertienne à gauche. Compos. Math. **23** (1971), 49-77.

[C] A. Connes. Noncommutative geometry. Academic Press, 1994.

[Co] A. Connes. Une classification des facteurs de type III. Ann. Sci. Ecole Norm. Sup., (4) **6** (1973), 133-252.

[C-T] A. Connes and M. Takesaki. The flow of weights on factors of type III. Tohoku Math. J., **29** (1977), 473-575.

[Dir] P.A.M. Dirac. The quantum theory of the emission and absorption of radiation. Proc. Royal Soc. London, **A114** (1927), 243-265.

[G] A. Guichardet. Symmetric Hilbert spaces and related topics. Lecture Notes in Mathematics, **261**, Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, 1972.

[H] R. Haag. Local quantum physics. Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, 1992.

[J] B. Julia. Statistical theory of numbers. in Number Theory and Physics, Les Houches Winter School, J.-M. Luck, P. Moussa et M. Waldschmidt eds., Springer-Verlag, 1990.

[Ped] G.K. Pedersen. C^*-algebras and their automorphism groups. Academic Press, London-New Vork-San Francisco, 1979.

[Ren] J. Renault. A groupoid approach to C^*-algebras. Lecture Notes in Mathematics, **793** (1980), Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin.

[Ser$_1$] J.-P. Serre. Cours d'arithmétique. P.U.F. Paris, 1970.

[Ser$_2$] J.-P. Serre. Arbres, amalgames, SL_2. Astérisque, **46** (1977).

[Sh] G. Shimura. Introduction to the arithmetic theory of automorphic functions. Princeton University Press, 1971.

[Spe] D. Spector. Supersymmetry and the Möbius inversion function. Commun. Math. Phys., **127** (1990), 239-252.

[T] J. Tate. Fourier analysis in number fields and Hecke's zeta function. in Algebraic Number Theory, J.W.S. Cassels et A. Frölich eds. Academic Press, 1967.

[We$_1$] A. Weil. Fonction zêta et distributions. Séminaire Bourbaki n°312, juin 1966.

[We$_2$] A. Weil. Basic number theory. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1974.

J.-B. Bost and A. Connes
Institut des Hautes Études Scientifiques,
35, route de Chartres,
F-91440 Bures-sur-Yvette, France