

38. Le coefficient binomial $\binom{2n}{n}$ et les nombres premiers dans l'intervalle $n < p \leq 2n$

Le coefficient binomial $\binom{2n}{n}$ peut nous fournir des renseignements sur les nombres premiers dans l'intervalle $n < p \leq 2n$, car, puisque $p^2 \geq (n+1)^2 > 2n$, il contient chacun de ces nombres premiers exactement à la première puissance. Nous commençons par démontrer l'inégalité

$$\binom{2n}{n} > \frac{4^n}{2\sqrt{n}} \quad (n > 1) \quad (84)$$

par récurrence complète. En supposant (84) vraie pour tous les entiers naturels $\leq n$, on obtient, puisque $(2n+1)^3 > 4n(n+1)$,

$$\binom{2(n+1)}{n+1} = \frac{2n+1}{n+1} \binom{2n}{n} > \frac{2n+1}{n+1} \frac{4^n}{2\sqrt{n}} > \frac{4^{n+1}}{2\sqrt{n+1}}.$$

Ainsi (84) est démontrée en général, car elle est vraie pour $n = 2$.

Nous aurons encore besoin du théorème suivant, intéressant en lui-même.

Théorème 1 (30).

$$\prod_{p \leq x} p < 4^x.$$

Démonstration. Nous pouvons supposer x entier. Pour $x = 2$, le théorème est vrai ; supposons-le vrai pour tous les $x \leq n-1$. Si n est pair, le théorème est vrai pour $x = n$, car n n'est pas premier. Soit maintenant $n = 2k+1$. Tous les p avec $k+2 \leq p \leq 2k+1$ sont des diviseurs de $\binom{2k+1}{k}$. Ce coefficient binomial est $< 4^k$, comme on le voit à partir de

$$(1+1)^{2k+1} > \binom{2k+1}{k} + \binom{2k+1}{k+1} = 2 \binom{2k+1}{k}.$$

Il en résulte, avec l'hypothèse de récurrence,

$$\prod_{p \leq 2k+1} p \leq 2k+1 \prod_{p \leq k+1} p < 4^k \cdot 4^{k+1} = 4^{2k+1},$$

ce qui démontre le théorème. On a plus précisément

$$\prod_{p \leq x} p < 2,763^x,$$

et même

$$\prod_{p \leq x} p > 2,316^x \quad (x \geq 101).$$

□

Étudions maintenant la décomposition canonique

$$\frac{(2n)!}{n! n!} = \prod_p p^{e_p}.$$

Comme p entre dans $n!$ avec l'exposant $\left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \dots$, on a

$$e_p = \left(\left[\frac{2n}{p}\right] - 2 \left[\frac{n}{p}\right] \right) + \left(\left[\frac{2n}{p^2}\right] - 2 \left[\frac{n}{p^2}\right] \right) + \dots \quad (85)$$

Si $n = qp + r$, $0 \leq r < p$, alors

$$\left[\frac{2n}{p}\right] - 2 \left[\frac{n}{p}\right] = \left[\frac{2r}{p}\right] = \begin{cases} 0, & \text{si } \left[\frac{2n}{p}\right] \text{ est pair,} \\ 1, & \text{si } \left[\frac{2n}{p}\right] \text{ est impair.} \end{cases}$$

e_p est donc égal au nombre de termes impairs dans la suite finie

$$\left[\frac{2n}{p}\right], \left[\frac{2n}{p^2}\right], \dots$$

Nous pouvons maintenant faire les observations suivantes :

- (a) Pour $p \geq \sqrt{2n}$, on a $e_p \leq 1$. C'est clair pour $p^2 = 2n$, où $p = 2 = n$. Pour $p^2 > 2n$, au plus une parenthèse de (85) est non nulle.
- (b) Pour $p^\alpha \leq 2n < p^{\alpha+1}$, il s'ensuit $e_p \leq \alpha$, car dans (85) au plus α parenthèses sont $\neq 0$. Ainsi $p^{e_p} \leq 2n$ et

$$\binom{2n}{n} \leq (2n)^{\pi(2n)}.$$

- (c) Pour $2n/3 < p \leq n$ et $n > 2$, on a $e_p = 0$. En effet, comme $2n/p < 3$, un $[2n/p]$ impair ne pourrait correspondre qu'à $1 < 2n/p < 2$, ce qui exigerait $p > n$. Dans ce cas p est impair, car $p = 2$ entraînerait $n < 3$, alors que l'on a supposé $n > 2$.
- (d) Pour $n < p \leq 2n$, on a $e_p = 1$, car $1 \leq 2n/p < 2$.

39. Un théorème de Tchebychef

Tchebychef a montré en 1852 que, pour tout $n \geq 1$, parmi les nombres

$$n+1, n+2, \dots, 2n,$$

il y a au moins un nombre premier. On a donc le

Théorème 2 (31).

$$\pi(2n) - \pi(n) \geq 1 \quad (n \geq 1).$$

Démonstration. Il suffit de montrer que le produit P_n de tous les p de l'intervalle $n < p \leq 2n$ n'est pas vide, c'est-à-dire > 1 . Posons

$$\binom{2n}{n} = Q_n P_n.$$

Alors Q_n ne contient, d'après le § 38 (c, d), aucun facteur premier $p > 2n/3$. Le produit de tous les p distincts divisant Q_n n'est donc pas supérieur au produit de tous les $p \leq 2n/3$, donc d'après le théorème 30, il est $< 4^{2n/3}$.

D'après le § 38 (a), $e_p > 1$ ne peut avoir lieu que pour $p < \sqrt{2n}$, et le nombre de ces p est $\leq \frac{\sqrt{2n}}{2} = \sqrt{\frac{n}{2}}$.

Le produit des puissances correspondantes p^{e_p} est, d'après le § 38 (b), $\leq (2n)^{\sqrt{n/2}}$.

Ainsi

$$Q_n \leq 4^{2n/3} (2n)^{\sqrt{n/2}}.$$

Avec (84), on obtient maintenant

$$P_n > \frac{4^n}{2\sqrt{n}} Q_n^{-1} \geq \frac{4^{n/3}}{2\sqrt{n} (2n)^{\sqrt{n/2}}}, \quad (n \geq 32). \quad (86)$$

En élevant au carré la fraction de droite, on reconnaît que $P_n > 1$, pourvu que

$$4^{2n/3} > 2(2n)^{\sqrt{2n}+1}.$$

Posons $2n = x^2$; il faut donc que

$$4^{x^2/3} > 2x^{2(x+1)}.$$

C'est vrai pour $x = 12$. On se convainc facilement que la dérivée du logarithme du membre de gauche est, pour $x \geq 7$, plus grande que celle du logarithme du membre de droite, car pour $x \geq 7$,

$$0,667 x \log 2 > 1 + x^{-1} + \log x.$$

$P_n > 1$ est donc vrai pour tous les

$$n = 0,5 x^2 \geq 72.$$

Si p est le plus grand nombre premier dans l'intervalle $a < p \leq 2a$, alors le théorème 31 est manifestement vrai pour $a \leq n \leq p - 1$. Les nombres premiers

$$2, 3, 5, 7, 13, 23, 43, 83$$

suffisent donc à assurer le théorème 31 pour $n < 72$.

Avec FINSLER, on peut tirer de cette démonstration une bien meilleure estimation de $\pi(2n) - \pi(n)$.

Si l'on pose la fraction de droite dans (86) égale à $(2n)^\alpha$, de sorte que $P_n > (2n)^\alpha$, alors

$$x < \pi(2n) - \pi(n),$$

car par définition P_n est sans facteur carré. On se convainc facilement que, pour $n \geq 2500$,

$$x \log 2n = \frac{n}{3} \left(\log 4 - \frac{3 \log 4n}{2n} - \frac{3 \log 2n}{\sqrt{2n}} \right) > \frac{n}{3}.$$

On tire d'une table de nombres premiers que

$$\pi(2n) - \pi(n) \geq 2, 3, 9, 25, 50, 100,$$

lorsque

$$n \geq 6, 9, 36, 135, 321, 720.$$

Comme

$$\frac{n}{3 \log 2n} < 1, 3, 9, 25, 50, 100$$

pour

$$n \leq 8, 39, 150, 500, 1000, 2500,$$

on a

$$\pi(2n) - \pi(n) > x > \frac{n}{3 \log 2n}$$

en général.

Pour obtenir une estimation vers le haut, nous utilisons le fait que

$$\binom{2n}{n} < 4^n.$$

Cela résulte immédiatement de l'inégalité utilisée dans la démonstration du théorème 30 :

$$\binom{2n+1}{n} < 4^n.$$

On en déduit

$$[\pi(2n) - \pi(n)] \log n < \sum_{n < p \leq 2n} \log p = \log P_n \leq \log \binom{2n}{n} < n \log 4 < \frac{7n}{5},$$

et nous obtenons le théorème de Finsler :

Théorème 3 (32).

$$\frac{n}{3 \log 2n} < \pi(2n) - \pi(n) < \frac{7n}{5 \log n}, \quad (n > 1).$$

Des recherches plus récentes [38] ont montré que, pour $n \geq 20,5$, on peut utiliser dans le théorème 32 comme fonction d'estimation vers le bas $3n(5 \log n)^{-1}$.