

Les problèmes les plus difficiles en mathématiques, physique & le futur de l'IA
(dans Le Podcast de Lex Fridman)
Une interview de Terence Tao par Lex Fridman

LEX FRIDMAN : Me voici en conversation avec Terence Tao, largement considéré comme l'un des plus grands mathématiciens de l'histoire, souvent surnommé le Mozart des mathématiques. Lauréat de la médaille Fields et du Breakthrough Prize en mathématiques, il a contribué par des travaux révolutionnaires à un éventail véritablement étonnant de domaines des mathématiques et de la physique. C'est un immense honneur pour moi de l'interviewer, pour de nombreuses raisons, notamment à cause de l'humilité et de la gentillesse dont Terry a fait preuve à mon égard tout au long de nos échanges. Cela représente énormément. Vous écoutez le podcast de Lex Fridman. Terence, quel a été le premier problème mathématique vraiment difficile de niveau recherche que vous avez rencontré, peut-être un problème qui vous a particulièrement fait réfléchir ?

TERENCE TAO : Eh bien, en licence, on apprend des problèmes vraiment difficiles, impossibles, comme l'hypothèse de Riemann ou la conjecture des nombres premiers jumeaux. On peut rendre les problèmes arbitrairement difficiles. Ce n'est pas vraiment un problème. En fait, il y a même des problèmes que nous savons insolubles. Ce qui est vraiment intéressant, ce sont les problèmes à la limite entre ce que nous pouvons faire relativement facilement et ce qui est désespéré. Mais quels sont les problèmes pour lesquels les techniques existantes peuvent faire environ 90 % du travail, et dont il ne reste que les 10 % restants ? En tant que doctorant, le problème de Kakeya a certainement retenu mon attention et il a été résolu tout simplement. C'est un problème sur lequel j'ai beaucoup travaillé au début de mes recherches. Historiquement, il est né d'une petite énigme du mathématicien japonais Soichi Kakeya, vers 1918. L'énigme est la suivante : vous avez une aiguille sur un plan, ou vous conduisez sur une route, et vous voulez faire demi-tour, ou quelque chose comme ça. Vous souhaitez faire tourner l'aiguille, mais dans un espace aussi réduit que possible. Vous souhaitez donc utiliser cette petite surface pour la faire tourner, mais l'aiguille est infiniment manœuvrable. Imaginez la faire tourner comme une aiguille unité. Vous pouvez la faire tourner autour de son centre et cela vous donne un disque d'aire, je crois, $\frac{\pi}{4}$. Vous pouvez aussi faire un demi-tour en trois points, comme on l'apprend dans les auto-écoles. Cela prend en réalité une aire égale à $\frac{\pi}{8}$. C'est donc un peu plus efficace qu'une rotation. Pendant un temps, on a pensé que c'était le moyen le plus efficace de renverser la situation. Mais Besicovitch a montré qu'il était possible de faire tourner l'aiguille sur la plus petite surface possible. Donc 0,001. Il existait un système très sophistiqué de demi-tours multiples, permettant de faire tourner l'aiguille sur elle-même. Ce faisant, elle passait par toutes les directions intermédiaires.

LEX FRIDMAN : Est-ce dans le plan bidimensionnel ?

TERENCE TAO : C'est dans le plan bidimensionnel. Et oui, on comprend tout en deux dimensions. La question suivante est : que se passe-t-il en trois dimensions ? Imaginez que le télescope spatial Hubble soit un tube dans l'espace et que vous souhaitiez observer chaque étoile de l'univers. Vous voulez donc faire pivoter le télescope pour atteindre toutes les directions. Et voici la partie irréaliste.

Référence de la vidéo : <https://www.youtube-nocookie.com/embed/HUkBz-cdB-k>.

Transcription et traduction : Denise Vella-Chemla, aidée des outils Google, septembre 2025.

Supposons que l'espace soit limité, ce qui n'est absolument pas le cas. Vous souhaitez occuper le moins de volume possible pour faire tourner votre aiguille et observer chaque étoile du ciel. Quel volume faut-il pour y parvenir ? Vous pouvez donc modifier la construction de Besico-vitch. Ainsi, si votre télescope a une épaisseur nulle, vous pouvez utiliser le volume nécessaire. Il s'agit d'une simple modification de la construction bidimensionnelle. Mais la question est "si l'épaisseur de votre télescope n'est pas nulle, mais très fine, δ , quel est le volume minimum nécessaire pour voir toutes les directions en fonction de δ ?". Ainsi, à mesure que δ diminue et que l'aiguille s'amincit, le volume devrait diminuer. Mais à quelle vitesse diminue-t-il ? L'hypothèse était que la diminution était très lente, logarithmique, en gros. Et cela a été prouvé après de nombreux travaux. Cela ressemble donc à une énigme. Pourquoi est-ce intéressant ? Il s'avère que ce problème est étonnamment lié à de nombreux problèmes d'équations aux dérivées partielles, de théorie des nombres, de géométrie et de combinatoire. Par exemple, dans la propagation des ondes, on projette de l'eau, ce qui crée des ondes qui se propagent dans différentes directions. Or, les ondes présentent à la fois un comportement qu'on peut décrire en termes de particules ou en termes ondulatoires. On peut ainsi obtenir ce qu'on appelle un paquet d'ondes, une onde très localisée dans l'espace et se déplaçant dans une certaine direction temporelle. Si on le représente à la fois dans l'espace et dans le temps, il occupe une région qui ressemble à un tube. Il peut donc se produire une onde initialement très dispersée, mais qui se concentre ensuite en un point précis. Imaginez qu'on jette un caillou dans un étang et que des ondulations se propagent. Mais si l'on inverse le temps, les équations du mouvement ondulatoire deviennent réversibles. Imaginez des ondulations convergeant vers un point précis, puis une grande éclaboussure, voire une singularité, se produit. C'est donc possible. Géométriquement, il existe toujours des rayons lumineux. Si cette onde représente la lumière, par exemple, on peut l'imaginer comme une superposition de photons se déplaçant tous à la vitesse de la lumière. Ils se déplacent tous sur ces rayons lumineux et se concentrent tous en un point précis. On peut donc avoir une onde très dispersée se concentrant en une onde très concentrée en un point précis de l'espace-temps, puis se défocalisant à nouveau et se séparant. Mais potentiellement, si la conjecture avait une solution négative, ce qui signifie qu'il existe un moyen très efficace de circonscrire des tubes pointant dans des directions différentes dans une région très, très étroite de volume très étroit, alors vous seriez également capable de créer des ondes, disons qu'il y aura un certain arrangement d'ondes qui commenceront très, très dispersées, mais qui se concentreront ailleurs ou à un autre instant en un seul point, et il y aura de nombreuses telles concentrations dans l'espace et le temps.

On pourrait créer ce qu'on appelle une explosion, où ces ondes, dont l'amplitude devient si grande, ne sont plus régies par des équations d'ondes, mais par des lois physiques plus complexes et non linéaires. En physique mathématique, on se préoccupe beaucoup de la stabilité de certaines équations d'ondes, et de leur capacité à créer ces singularités.

Il existe un problème célèbre non résolu appelé le problème de régularité de Navier-Stokes. Il s'agit des équations de Navier-Stokes qui régissent l'écoulement d'un fluide ou de fluides incompressibles comme l'eau. La question est la suivante : "si l'on part d'un champ de vitesse régulier de l'eau, celle-ci peut-elle se concentrer au point que sa vitesse devienne infinie à un moment donné ?". C'est ce qu'on appelle une singularité. On ne le voit pas dans la réalité. Si vous éclaboussez de l'eau dans une baignoire, elle n'explosera pas et ne s'écoulera pas à la vitesse de la lumière. Mais c'est potentiellement possible. De fait, ces dernières années, le consensus s'est orienté vers la conviction

que, pour certaines configurations initiales très particulières, par exemple de l'eau, des singularités peuvent se former, mais personne n'a encore pu le démontrer. La Fondation Clay a lancé sept problèmes du Prix du Millénaire et offre un prix d'un million de dollars pour la résolution de l'un d'eux. Le problème de Navier-Stokes est l'un des problèmes du millénaire de l'Institut Clay. Des sept conjectures, une seule a été résolue, la conjecture de Poincaré, résolue par Perelman. La conjecture de Kakeya n'est donc pas directement liée au problème de Navier-Stokes, mais sa compréhension nous aiderait à comprendre certains aspects de la concentration des ondes, ce qui, indirectement, nous aiderait probablement à mieux comprendre le problème de Navier-Stokes.

LEX FRIDMAN : Pouvez-vous parler du problème de Navier-Stokes, l'un des problèmes du millénaire ? Vous avez beaucoup progressé sur ce point. En 2016, vous avez publié un article intitulé "Explosion à temps fini pour une équation de Navier-Stokes tridimensionnelle moyenne".

TERENCE TAO : C'est vrai

LEX FRIDMAN : Vous essayez donc de déterminer si cette chose n'explose généralement pas.

TERENCE TAO : C'est vrai.

LEX FRIDMAN : Mais pouvez-vous dire avec certitude que cela n'explose jamais ?

TERENCE TAO : Oui, c'est cela, oui, c'est littéralement la question à un million de dollars. C'est ce qui distingue les mathématiciens de presque tout le monde. Par exemple, si une hypothèse est vraie 99,99 % du temps, c'est suffisant pour la plupart des cas. Mais les mathématiciens sont parmi les rares à se soucier vraiment de savoir si 100 % des situations sont couvertes par... Oui. Donc, la plupart du temps, l'eau n'explose pas. Mais pourrait-on concevoir un état initial très particulier qui la fasse exploser ?

LEX FRIDMAN : Et peut-être devrions-nous dire qu'il s'agit d'un ensemble d'équations qui régissent le domaine de la dynamique des fluides. Essayer de comprendre le comportement d'un fluide, et il s'avère qu'il s'agit d'un fluide très complexe, est extrêmement complexe à modéliser.

TERENCE TAO : Oui, c'est donc important sur le plan pratique. Ce problème du prix Clay concerne ce qu'on appelle l'équation de Navier-Stokes incompressible, qui régit des éléments comme l'eau. Il existe aussi une autre équation appelée l'équation de Navier-Stokes compressible, qui régit des éléments comme l'air. Et c'est particulièrement important pour la prévision météorologique. La prévision météorologique fait appel à de nombreuses techniques de dynamique des fluides numériques. Une grande partie consiste simplement à résoudre les équations de Navier-Stokes du mieux possible, et à collecter beaucoup de données pour initialiser l'équation. Il y a beaucoup d'éléments en mouvement. C'est donc un problème très important sur le plan pratique.

LEX FRIDMAN : Pourquoi est-il difficile de prouver des choses générales sur l'ensemble des équations, comme par exemple qu'il n'explose pas ?

TERENCE TAO : La réponse courte est le démon de Maxwell. Le démon de Maxwell est un concept

de thermodynamique : si vous avez une boîte contenant deux gaz, l'oxygène et l'azote, et que vous commencez avec tout l'oxygène d'un côté et tout l'azote de l'autre, mais qu'il n'y a pas de barrière entre eux, alors ils se mélangeront et devraient rester mélangés. Il n'y a aucune raison pour qu'ils se démélangent. Mais en principe, à cause de toutes ces collisions, il pourrait y avoir une sorte de conspiration étrange.

Il existe peut-être un démon microscopique appelé démon de Maxwell. À chaque collision entre un atome d'oxygène et un atome d'azote, ils rebondissent de telle sorte que l'oxygène dérive d'un côté, puis l'azote de l'autre. Une configuration extrêmement improbable, jamais observée, pourrait alors apparaître. Statistiquement, c'est extrêmement improbable. Mais mathématiquement, c'est possible, et on ne peut l'exclure. C'est une situation fréquente en mathématiques. Prenons l'exemple des chiffres de $\pi = 3,14159$, etc. Ces chiffres semblent ne pas avoir de motif, et nous pensons qu'ils n'en ont pas. À long terme, on devrait observer autant de uns, de deux et de trois que de quatre, de cinq et de six. Il ne devrait pas y avoir de préférence entre les chiffres de π , par exemple sept et huit. Mais peut-être y a-t-il un démon caché dans ces chiffres.

Il existe une théorie de π qui, à chaque fois qu'on calcule davantage de chiffres, biaise un chiffre plutôt qu'un autre. C'est une théorie qui ne devrait pas se produire. Il n'y a aucune raison que cela se produise, mais il est impossible de le prouver avec la technologie actuelle. Pour en revenir à Navier-Stokes, un fluide possède une certaine quantité d'énergie, et comme le fluide est en mouvement, cette énergie est transportée. L'eau est identiquement visqueuse partout. Si l'énergie est répartie en de nombreux points, la viscosité naturelle du fluide l'amortira et elle tombera à zéro. C'est ce qui se produit lorsqu'on expérimente avec l'eau. On éclabousse, il y a des turbulences, des vagues, etc., mais finalement, le fluide se stabilise. Plus l'amplitude est faible, plus la vitesse est faible, plus le calme revient. Mais il est possible qu'une sorte de démon repousse l'énergie du fluide vers une échelle de plus en plus petite. Le fluide se déplacera alors de plus en plus vite, et à des vitesses plus élevées, la viscosité effective sera relativement plus faible. Il pourrait donc se produire ce qu'on appelle un phénomène de "blob auto-similaire" où l'énergie du fluide commence à une grande échelle, puis la transfère vers une zone plus petite, qui se déplace ensuite beaucoup plus rapidement vers une zone encore plus petite, et ainsi de suite. À chaque fois, le temps est peut-être deux fois plus court qu'à l'étape précédente. On pourrait alors converger vers une concentration de toute l'énergie en un certain point en un temps fini. Ce scénario est appelé explosion à temps fini. En pratique, cela ne se produit pas. L'eau est donc dite turbulente. Il est donc vrai qu'un grand tourbillon d'eau aura tendance à se fragmenter en tourbillons plus petits, mais il ne transférera pas toute l'énergie d'un grand tourbillon vers un plus petit. Il se transformera en trois ou quatre tourbillons, qui devront ensuite se fragmenter en trois ou quatre petits tourbillons. L'énergie se disperse alors au point que la viscosité peut tout contrôler. Mais si elle parvient à concentrer toute l'énergie, à la maintenir concentrée et à le faire suffisamment vite pour que les effets visqueux n'aient pas le temps de tout calmer, alors cette masse peut se former. Certains articles affirmaient qu'il suffisait de prendre en compte la conservation de l'énergie et d'utiliser soigneusement la viscosité pour maîtriser la situation, non seulement pour l'équation de Navier-Stokes, mais aussi pour de très nombreux types d'équations de ce type. Par le passé, de nombreuses tentatives ont été faites pour obtenir ce qu'on appelle la régularité globale pour l'équation de Navier-Stokes, c'est-à-dire l'inverse de l'explosion à temps fini, c'est-à-dire que la vitesse reste constante. Mais tout cela a échoué. Il y avait toujours une erreur de signe ou une erreur subtile, irréparable. Je cherchais donc

à expliquer pourquoi nous ne pouvions pas réfuter l'explosion à temps fini. Je n'y parvenais pas pour les équations des fluides, qui étaient trop complexes. Mais si je pouvais faire la moyenne des équations de mouvement de Navier-Stokes, c'est-à-dire supprimer certaines interactions de l'eau et ne conserver que celles que je souhaitais, je me demandais... Donc en particulier, s'il y avait un fluide qui pouvait transférer son énergie d'un grand tourbillon vers ce petit tourbillon ou cet autre petit tourbillon, je couperais le canal d'énergie qui transférerait l'énergie vers celui-ci et le dirigerais uniquement vers ce plus petit tourbillon tout en préservant la loi de concentration de l'énergie.

LEX FRIDMAN : Donc vous essayez de le faire exploser.

TERENCE TAO : Oui. Donc, j'ai créé une explosion en modifiant les lois de la physique, ce que les mathématiciens sont autorisés à faire. On peut changer l'équation.

LEX FRIDMAN : Comment cela vous aide-t-il à vous rapprocher de la preuve de quelque chose ?

TERENCE TAO : Cela crée donc ce qu'on appelle une obstruction en mathématiques. J'ai donc procédé ainsi : si je désactivais certaines parties de l'équation, ce qui, généralement, ces suppressions d'interactions, rend l'équation moins non linéaire, plus régulière et moins sujette à l'explosion. Mais j'ai découvert qu'en désactivant un ensemble d'interactions très bien conçu, je pouvais forcer toute l'énergie à exploser en un temps fini. Cela signifie donc que pour prouver la régularité globale de l'équation de Navier-Stokes, il faut utiliser une caractéristique de l'équation réelle, ce que mon équation artificielle ne satisfait pas. Cela exclut donc certaines approches. Le problème des mathématiques, c'est qu'il ne s'agit pas seulement de trouver une technique efficace et de l'appliquer, mais aussi d'éviter les techniques inefficaces. Et pour les problèmes vraiment difficiles, il existe souvent des dizaines de méthodes envisageables. Mais ce n'est qu'après une longue expérience que l'on réalise que ces méthodes ne marchent pas. Disposer de contre-exemples pour des problèmes proches revient donc à exclure certaines approches. Cela vous fait gagner beaucoup de temps, car vous ne gaspillez pas d'énergie sur des choses dont vous savez maintenant qu'elles ne pourront jamais fonctionner.

LEX FRIDMAN : Dans quelle mesure cela est-il lié à ce problème spécifique de la dynamique des fluides ? Ou s'agit-il simplement d'une intuition plus générale que vous développez en mathématiques ?

TERENCE TAO : Tout à fait. Le phénomène clé que ma technique exploite est ce qu'on appelle la supercriticité. Dans les équations aux dérivées partielles, ces équations ressemblent souvent à un bras de fer entre différentes forces. Dans l'équation de Navier-Stokes, la force de dissipation provient de la viscosité, et elle est très bien comprise, elle est linéaire et calme le jeu. Si la viscosité était la seule chose qui comptait, rien de grave ne se produirait. Mais il y a aussi le transport d'énergie : l'énergie d'un point de l'espace peut être transportée vers d'autres points, car le fluide est en mouvement. C'est un effet non linéaire, et c'est la cause de tous les problèmes. Il y a donc deux termes concurrents dans l'équation de Navier-Stokes : le terme de dissipation et le terme de transport. Si le terme de dissipation domine, s'il est important, on obtient une régularité. Et si le terme de transport domine, on ne sait pas ce qui se passe. C'est une situation très non linéaire. C'est imprévisible et turbulent. Parfois, ces forces sont déséquilibrées à petite échelle, mais pas à grande échelle, ou inversement. La loi de Navier-Stokes est donc dite supercritique. À des échelles

de plus en plus petites, les termes de transport sont bien plus forts que les termes de viscosité. C'est la viscosité des éléments qui les calme. Voilà pourquoi le problème est complexe. En deux dimensions, la mathématicienne soviétique Ladyzhenskaya a démontré dans les années 60 qu'il n'y avait pas d'explosion. En deux dimensions, les équations de Navier-Stokes sont dites critiques. L'effet du transport et celui de la viscosité sont à peu près équivalents, même à très petite échelle. Nous disposons de nombreuses technologies pour traiter les équations critiques et sous-critiques et prouver leur régularité. Mais pour les équations supercritiques, la nature du phénomène n'était pas claire. J'ai donc beaucoup travaillé. De nombreuses études ont ensuite montré que pour de nombreux autres types d'équations supercritiques, on peut créer toutes sortes d'exemples d'explosion. Une fois que les effets non linéaires dominent les effets linéaires à petite échelle, toutes sortes de problèmes peuvent se produire. C'est donc l'un des principaux enseignements de ce domaine de recherche : la différence entre supercriticité, criticité et sous-criticité est essentielle. Je veux dire que c'est une caractéristique qualitative clé qui permet de déterminer si certaines équations sont en quelque sorte agréables et prévisibles.

Et comme pour le mouvement planétaire, certaines équations sont prédictibles sur des milliers, voire des millions d'années. Là encore, ce n'est pas vraiment un problème. Mais il y a une raison pour laquelle nous ne pouvons pas prédire le temps qu'il fera dans deux semaines. C'est une équation extrêmement critique. Beaucoup de phénomènes étranges se produisent à des échelles très fines.

LEX FRIDMAN : Donc, chaque fois qu'il y a une source énorme de non-linéarité, cela peut créer un énorme problème pour prédire ce qui va se passer.

TERENCE TAO : Oui. Ou bien si la non-linéarité est de plus en plus présente et intéressante à petite échelle.

Il existe de nombreuses équations non linéaires, mais dans de nombreuses équations, on peut approximer des phénomènes par leur masse. Par exemple, le mouvement planétaire. Pour comprendre l'orbite de la Lune, de Mars ou autre, on n'a pas vraiment besoin de connaître la microstructure, la sismologie lunaire ou la répartition exacte de la masse. On peut presque approximer ces planètes par des masses ponctuelles. Et le comportement global est important. Mais pour modéliser des fluides comme ceux qui contrôlent la météo, on ne peut pas se contenter de dire "à Los Angeles : la température est telle, la vitesse du vent est telle". Pour les équations supercritiques, l'information à petite échelle est essentielle.

LEX FRIDMAN : Si nous pouvions nous attarder un peu sur les équations de Navier-Stokes, vous avez suggéré de les décrire, en proposant de construire un liquide, une sorte d'ordinateur liquide, pour les résoudre, ou pour les infirmer.

TERENCE TAO : C'est vrai.

LEX FRIDMAN : Et ensuite, il s'agit de montrer que le problème de l'arrêt issu de la théorie computationnelle a des conséquences sur la dynamique des fluides. Donc, vous montrez qu'il y a un lien. Pouvez-vous décrire cette idée ?

TERENCE TAO : Tout à fait. Ceci est né de ce travail de construction de cette équation moyenne qui a explosé. Pour y parvenir, il y a une façon un peu naïve de procéder : il suffit de pousser sans cesse. Chaque fois qu'on obtient de l'énergie à une échelle, on la pousse immédiatement à l'échelle suivante, aussi vite que possible. C'est une façon un peu naïve de forcer l'explosion. En cinq dimensions et plus, cela fonctionne, mais en trois dimensions, j'ai découvert ce phénomène étrange : si l'on modifie les lois de la physique, et si on essaie toujours de pousser l'énergie vers des échelles plus petites, ce qui se produit, c'est que l'énergie commence à se disperser simultanément sur plusieurs échelles. Donc, on a de l'énergie à une échelle, on la pousse vers l'échelle suivante, et dès qu'elle y entre, on la pousse également vers l'échelle suivante. Mais il reste encore de l'énergie de l'échelle précédente. On essaie de tout faire en même temps, ce qui disperse trop l'énergie. Il s'avère ensuite que cela rend le système vulnérable à la viscosité, qui pourrait tout simplement tout amortir. Cette partie directive ne fonctionne donc pas. Un autre article, publié par d'autres auteurs, a démontré cela en trois dimensions. Il me fallait donc programmer un délai, comme des sas, Il me fallait une équation partant d'un fluide effectuant une action à une échelle. Il transmettrait son énergie à l'échelle suivante, mais y resterait jusqu'à ce que toute l'énergie de cette échelle soit transférée. Ce n'est qu'après avoir transmis toute l'énergie que l'on ouvre la porte suivante, et qu'on la transmet également. Ce faisant, l'énergie progresse progressivement, échelle par échelle, de manière à être toujours localisée à une échelle à la fois. Et puis, le système peut résister aux effets de la viscosité car l'énergie n'est pas dispersée. Donc, pour y parvenir, oui, j'ai dû construire une non-linéarité assez complexe. Et c'était comme construire un circuit électronique. J'ai d'ailleurs remercié mon épouse pour ça, car elle est ingénieure électricienne de formation, et elle m'a parlé de la conception de circuits, etc. Et si vous voulez un circuit qui fasse quelque chose de particulier, comme une lumière qui clignote, puis s'éteint, puis s'allume et s'éteint, vous pouvez le construire à partir de composants plus primitifs, comme des condensateurs, des résistances, etc. Il faut ensuite construire un schéma, et sur ces schémas, on peut en quelque sorte suivre le mouvement des yeux et je me disais "Ah oui, le courant va monter ici, puis il va s'arrêter, et puis ça recommencera.". Je savais donc construire l'analogie de composants électroniques de base comme des résistances, des condensateurs, etc. Je les empilais de manière à créer quelque chose qui ouvrirait une porte, et qui donnerait naissance à une horloge. Et une fois que l'horloge atteindrait un certain seuil, elle la fermerait. C'était une sorte de machine à la Rube Goldberg, mais décrite mathématiquement, et ça a fini par fonctionner. J'ai donc étudié si on pouvait reproduire le même principe avec les équations réelles, si les équations de l'eau permettaient le calcul.

On peut donc imaginer une sorte de steampunk, mais en réalité, c'est un genre de punk aquatique : les ordinateurs modernes sont électroniques. Ils sont alimentés par des électrons traversant de minuscules fils et interagissant avec d'autres électrons, etc. Mais au lieu d'électrons, on peut imaginer des impulsions d'eau se déplaçant à une certaine vitesse, avec peut-être deux configurations différentes correspondant à un bit en haut ou en bas. Si deux de ces masses d'eau en mouvement entraient en collision, cela créerait une nouvelle configuration, comme une porte **et** ou une porte **ou**. La sortie dépendrait de manière très prévisible des entrées. On pourrait les enchaîner et créer une machine de Turing. On pourrait ainsi imaginer des ordinateurs entièrement constitués d'eau. Et avec des ordinateurs, on pourrait faire de la robotique, de l'hydraulique, etc. On pourrait ainsi créer une machine analogue à un fluide, ce qu'on appelle une machine de von Neumann. Von Neumann avait d'ailleurs dit que si l'on voulait coloniser Mars, le coût du transport de personnes dans des machines vers Mars serait tout simplement exorbitant. Mais si l'on pouvait transporter une

machine sur Mars et que cette machine soit capable d'exploiter la planète, de créer des matières premières, de les fondre et d'en construire d'autres copies, on pourrait alors coloniser la planète entière au fil du temps. Donc, si l'on pouvait construire une machine fluide, un robot fluide. Sa fonction, sa raison d'être, c'est qu'il est programmé pour créer une version plus petite de lui-même, dans une sorte d'état froid. Il ne démarrerait pas tout de suite. Une fois prêt, le gros robot, composé d'eau, transférerait toute son énergie dans la configuration plus petite, puis s'éteindrait et se purifierait. Il ne resterait alors que ce nouvel état, qui se mettrait en marche et ferait la même chose, mais plus petit et plus vite. L'équation présente alors une certaine symétrie d'échelle. Une fois cela fait, l'itération pourrait se poursuivre. En principe, cela créerait donc une explosion pour la véritable formule de Navier-Stokes.

Et voici ce que j'ai réussi à accomplir avec ce Navier-Stokes standard. Cela m'a fourni une sorte de feuille de route pour résoudre le problème. C'est un rêve irréaliste, car il manque tellement de choses pour que cela devienne réalité. Je ne peux donc pas créer ces portes logiques basiques. Je ne dispose pas de ces configurations d'eau spécifiques. Il existe des candidats, comme des anneaux de vortex, qui pourraient fonctionner. Mais l'informatique analogique est vraiment complexe comparée à l'informatique numérique, car elle comporte toujours des erreurs. Il faut corriger de nombreuses erreurs en cours de route. Je ne sais pas comment mettre complètement hors tension la grosse machine pour qu'elle n'interfère pas avec le fonctionnement de la petite. Mais en principe, tout est possible. Cela ne contredit aucune loi de la physique.

C'est donc une preuve que c'est possible. D'autres groupes cherchent actuellement des moyens de reproduire le phénomène Navier-Stokes, qui sont loin d'être aussi ridiculement complexes.

En fait, ils poursuivent un modèle beaucoup plus proche du modèle direct auto-similaire qui peut fonctionner, mais qui ne fonctionne pas tout à fait tel quel, mais il pourrait y avoir un schéma plus simple que celui que je viens de décrire pour faire fonctionner cela.

LEX FRIDMAN : Il y a un véritable saut de génie ici, de Navier-Stokes à cette machine de Turing aqueuse. On passe donc du scénario de la goutte auto-similaire, où l'on essaie de la réduire de plus en plus, à une machine de Turing liquide de plus en plus petite. Et on voit comment cela pourrait servir à expliquer une explosion. C'est un grand saut.

TERENCE TAO : Il y a donc un précédent. Le propre des mathématiques, c'est qu'elles sont très efficaces pour identifier des liens entre des problèmes que l'on pourrait considérer comme complètement différents. Mais si la forme mathématique est la même, on peut établir un lien. De nombreux travaux ont déjà porté sur ce que l'on appelle les automates cellulaires, le plus célèbre étant le Jeu de la Vie de Conway. Il existe une grille discrète infinie, et à tout instant, la grille est soit occupée par une cellule, soit vide. Et il existe une règle très simple qui explique comment ces cellules évoluent. Parfois, les cellules vivent, parfois elles meurent. Quand j'étais étudiant, on voyait une animation du jeu de la vie lorsque se lançait un économiseur d'écran très populaire, et elles semblaient très chaotiques. Elles ressemblaient même parfois à un flux turbulent. Mais avec le temps, on a découvert des structures de plus en plus intéressantes dans ce jeu de la vie. Par exemple, on a découvert ce qu'on appelle un planeur : un planeur est une minuscule configuration de quatre ou cinq cellules qui évolue et se déplace dans une certaine direction, comme un anneau

tourbillonnant. C'est une analogie.

Le Jeu de la Vie est une sorte d'équation discrète. L'équation fluide de Navier-Stokes est une équation continue. Mais mathématiquement, elles présentent des similitudes. Au fil du temps, on a découvert de plus en plus de choses intéressantes à construire dans le Jeu de la Vie. C'est un système très simple. Il ne comporte que trois ou quatre règles, mais on peut y concevoir toutes sortes de configurations intéressantes. Il existe un système appelé "canon à planeurs qui ne sert qu'à lancer des planeurs un par un". Après beaucoup d'efforts, on a réussi à créer des portes **et** et des portes **ou** pour les planeurs. Par exemple, il existe cette structure gigantesque et ridicule : si vous avez un flux de planeurs entrant ici et un flux de planeurs entrant ici, vous pouvez produire un flux de planeurs sortant. Si les deux flux contiennent des planeurs, il y aura peut-être un flux de sortie. Mais si un seul d'entre eux en contient, rien ne sort. On pourrait donc construire quelque chose de ce genre. Et une fois ces portes élémentaires construites, rien qu'avec le génie logiciel, on peut construire presque tout. On peut même construire une machine de Turing. Ce sont d'énormes machines steampunk, ridicules à voir. Mais on a aussi créé des objets auto-réplicatifs dans le Jeu de la Vie. Une machine massive, une machine polynomiale, qui, sur une période de temps considérable, ressemble toujours à des canons planeurs, effectuant ces calculs steampunk. Elle créerait une autre version d'elle-même, capable de se répliquer.

LEX FRIDMAN : C'est tellement incroyable.

TERENCE TAO : Une grande partie de tout cela a été financé par la communauté, par des mathématiciens amateurs, en fait. J'avais donc eu connaissance de ces travaux. C'est en partie ce qui m'a inspiré à proposer la même chose avec Navier-Stokes, qui, comme je l'ai dit, est bien pire que le numérique. On ne peut pas simplement prendre les constructions du Jeu de la Vie et les intégrer directement. Mais encore une fois, cela montre que c'est possible.

LEX FRIDMAN : Vous savez, il y a une sorte d'émergence qui se produit avec ces automates cellulaires, des règles locales. C'est peut-être similaire aux fluides, je ne sais pas. Mais des règles locales opérant à grande échelle peuvent créer ces structures dynamiques incroyablement complexes. Pensez-vous que tout cela soit susceptible d'une analyse mathématique ? Avons-nous les outils pour approfondir ce sujet ?

TERENCE TAO : Le fait est qu'on peut obtenir ces structures émergentes très complexes, mais seulement avec des conditions initiales très soigneusement préparées. Il en est ainsi de ces canons planeurs, de ces portes et de ces machines logicielles : il suffit de placer des cellules au hasard, et vous n'en verrez aucune. C'est la même chose avec Navier-Stokes. Là encore, avec des conditions initiales classiques, aucun calcul étrange ne se produit. Mais grâce à l'ingénierie, en concevant des objets de manière très spécifique, on peut choisir des constructions astucieuses.

LEX FRIDMAN : Je me demande s'il est possible de prouver une sorte de négation, de prouver essentiellement que seule l'ingénierie peut permettre de créer quelque chose d'intéressant.

TERENCE TAO : C'est un défi récurrent en mathématiques que j'appelle la dichotomie entre structure et caractère aléatoire. La plupart des objets que l'on peut générer en mathématiques sont

aléatoires.

Ils semblent aléatoires. Les chiffres de π , nous pensons qu'ils en sont un bon exemple, mais très peu de choses présentent des motifs. Or, il est désormais possible de prouver l'existence d'un motif par simple construction. Si quelque chose présente un motif simple et que vous avez la preuve que ce motif se répète de temps en temps... Vous pouvez prouver, par exemple, que la plupart des suites de chiffres n'ont pas de motif. Ainsi, si vous choisissez des chiffres au hasard, il existe ce qu'on appelle les petits grands nombres, qui indiquent que vous obtiendrez autant de uns que de deux à long terme.

Mais nous avons beaucoup moins d'outils. Si je vous donne un modèle spécifique comme les chiffres de π , comment puis-je démontrer qu'il n'a pas de modèle étrange ? Un autre travail auquel je consacre beaucoup de temps consiste à prouver ce qu'on appelle des théorèmes de structure ou des théorèmes inverses, qui fournissent des tests pour déterminer si quelque chose est très structuré. Certaines fonctions sont dites additives, comme une fonction qui caractérise les entiers naturels. Par exemple, le double de deux est quatre, le double de trois est six, et ainsi de suite. Certaines fonctions sont également additives, ce qui signifie que si vous additionnez deux entrées, les sorties s'additionnent également. Par exemple, pour multiplier par une constante, si vous multipliez un nombre par 10, si vous multipliez A plus B par 10, cela revient à multiplier A par 10 et B par 10, puis à les additionner. Certaines fonctions sont donc additives. Certaines fonctions sont plus ou moins additives, mais pas complètement. Par exemple, si je multiplie un nombre par la racine carrée de 2 et que j'en prends la partie entière, 10 multiplié par la racine carrée de 2 donne environ 14,5. 10 a pour image 14. Dans ce cas, l'addition est vraie. 10 plus 10 font 20, et 14 plus 14 font 28. Cependant, à cause de cet arrondi, des erreurs d'arrondi peuvent survenir. Parfois, lorsqu'on additionne A et B, cette fonction ne donne pas exactement la somme des deux sorties, mais la somme plus ou moins un. C'est donc presque additif, mais pas tout à fait additif. Il existe donc de nombreux résultats utiles en mathématiques, et j'ai beaucoup travaillé sur ce type de développement : si une fonction présente une structure comme celle-ci, c'est qu'il y a une raison à cette structure. La raison en est qu'il existe une autre fonction proche, complètement structurée, qui explique ce type de motif partiel. Ainsi, ces théorèmes inverses créent une sorte de dichotomie : soit les objets étudiés sont dépourvus de structure, soit ils sont liés à quelque chose de structuré. Dans les deux cas, on peut progresser. Un bon exemple est le théorème de Szemerédi, un vieux théorème mathématique démontré dans les années 1970. Il s'agit de trouver un certain type de motif dans un ensemble de nombres. Ce motif est une progression arithmétique, comme 3, 5 et 7, ou 10, 15 et 20. Et Szemerédi, Endre Szemerédi, a prouvé que tout ensemble de nombres suffisamment grand, appelé densité positive, contient des progressions arithmétiques de n'importe quelle longueur. Par exemple, les nombres impairs ont un ensemble de densité $\frac{1}{2}$, et ils contiennent des progressions arithmétiques de n'importe quelle longueur. Dans ce cas, c'est évident, car les nombres impairs sont vraiment très structurés. Je peux simplement prendre 11, 13, 15, 17. Je peux facilement trouver des expressions arithmétiques dans cet ensemble. Mais le théorème de Szemerédi s'applique aussi aux ensembles aléatoires. Si je prends l'ensemble des nombres impairs et que je lance une pièce pour chaque nombre, je ne garde que les nombres pour lesquels j'ai obtenu face. Je tire au hasard la moitié des nombres et j'en garde l'autre moitié. Il s'agit donc d'un ensemble sans aucune structure, mais grâce aux fluctuations aléatoires, on obtient néanmoins de nombreuses progressions arithmétiques.

LEX FRIDMAN : Pouvez-vous prouver qu'il existe des progressions arithmétiques de longueur arbitraire dans un nombre aléatoire ?

TERENCE TAO : Oui. Avez-vous entendu parler du théorème associé au paradoxe du singe savant ? En général, les mathématiciens donnent des noms ennuyeux aux théories, mais il leur arrive de leur donner des noms originaux. La version populaire du paradoxe du singe savant est la suivante : si vous avez un nombre infini de singes dans une pièce, chacun avec une machine à écrire, et qu'ils tapent du texte au hasard, il est presque certain que l'un d'eux va générer le texte complet d'Hamlet ou de toute autre suite de texte finie.

Cela prendra simplement un certain temps, beaucoup de temps en fait. Mais si vous avez un nombre infini, cela se produit. En résumé, le théorème dit que si vous prenez une chaîne infinie de chiffres, ou autre, la structure finie souhaitée finira par émerger. Cela peut prendre du temps, mais cela finira par se produire. En particulier, des progressions arithmétiques de n'importe quelle longueur finiront par se produire. Mais il faut une séquence aléatoire extrêmement longue pour que cela se produise.

LEX FRIDMAN : Je suppose que c'est intuitif. C'est juste l'infini.

TERENCE TAO : Oui, l'infini absorbe beaucoup de péchés.

LEX FRIDMAN : Oui. Comment sommes-nous censés gérer l'infini ?

TERENCE TAO : Eh bien, on peut considérer l'infini comme une simple abstraction d'un nombre fini pour lequel il n'existe aucune limite. Rien dans la vie réelle n'est véritablement infini. Mais on peut se poser des questions comme "Et si j'avais autant d'argent que je voulais ?" Ou "Et si je pouvais aller aussi vite que je le voulais ?" Les mathématiciens formalisent cela en trouvant un formalisme idéalisant. Au lieu de considérer quelque chose comme extrêmement grand ou extrêmement petit, il faut qu'il soit exactement infini ou nul. Et souvent, les mathématiques deviennent beaucoup plus claires grâce à cela. En physique, on plaisante sur l'hypothèse des vaches sphériques. Les problèmes du monde réel ont toutes sortes d'effets concrets, mais on peut idéaliser, envoyer des choses à l'infini, envoyer quelque chose à zéro, et les mathématiques deviennent alors beaucoup plus simples à utiliser.

LEX FRIDMAN : Je me demande à quelle fréquence l'utilisation de l'infini nous oblige à nous écarter de la physique de la réalité.

TERENCE TAO : Oui, il y a donc beaucoup d'embûches. On passe donc beaucoup de temps en mathématiques de premier cycle à enseigner l'analyse. Et l'analyse consiste souvent à savoir comment prendre des limites et à savoir si, par exemple, $A + B$ est toujours $B + A$. Donc, quand on a un nombre fini de termes et qu'on les additionne, on peut les permuter sans problème. Mais quand on a un nombre infini de termes, on peut jouer à des jeux de dupes : on peut avoir une série qui converge vers une valeur, mais on la réorganise et elle converge soudainement vers une autre valeur. On peut donc faire des erreurs. Il faut savoir ce qu'on fait quand on admet l'infini. Il faut

introduire ces epsilons et deltas. Et il existe un certain type de raisonnement qui permet d'éviter les erreurs. Ces dernières années, on a commencé à considérer les résultats vrais dans des limites infinies et à les finir. On sait donc que quelque chose finira par se réaliser, mais on ne sait pas quand. Donnez-moi maintenant un taux. Ainsi, si je n'ai pas un nombre infini de singes, mais un grand nombre fini de singes, combien de temps dois-je attendre la sortie d'Hamlet ? C'est une question plus quantitative. On peut aborder ce problème par des méthodes purement finies. On peut utiliser son intuition finie, et dans ce cas, la longueur du texte que l'on essaie de générer est exponentielle. C'est pourquoi on ne voit jamais les singes créer Hamlet. On peut peut-être les voir créer un mot de quatre lettres, mais rien d'aussi long qu'Hamlet. Personnellement, je trouve qu'une fois qu'on finitise une affirmation infinie, elle devient beaucoup plus intuitive et n'est plus aussi étrange.

LEX FRIDMAN : Donc même si vous travaillez avec l'infini, il est bon de le finitiser afin de pouvoir avoir une certaine intuition.

TERENCE TAO : Oui. L'inconvénient, c'est que les preuves finies sont beaucoup plus complexes. Les preuves infinies sont donc trouvées en premier, généralement des décennies plus tôt, puis finalisées plus tard.

LEX FRIDMAN : Puisque nous avons beaucoup parlé de mathématiques et de physique, comment utiliser la différence entre les mathématiques et la physique en tant que disciplines, en tant que manières de comprendre et de voir le monde ? On pourrait peut-être ajouter l'ingénierie. Vous avez mentionné que votre épouse était ingénieure et qu'elle vous avait apporté une nouvelle perspective sur les circuits, une nouvelle façon de voir le monde. Étant donné que vous avez fait de la physique mathématique, vous avez porté presque toutes les casquettes.

TERENCE TAO : Oui, je pense que la science en général est une interaction entre trois éléments. Il y a le monde réel, ce que nous observons, nos observations, et nos modèles mentaux sur le fonctionnement du monde. Nous ne pouvons donc pas accéder directement à la réalité. D'accord. Nous ne disposons que des observations, qui sont incomplètes et erronées. Et il y a de nombreux cas où nous voulons savoir, par exemple, quel temps il fera demain. Or, nous n'avons pas encore d'observation et nous aimerions faire des prédictions. Et puis, nous avons ces modèles simplifiés, qui reposent parfois sur des hypothèses irréalistes, comme ces mondes idéaux dans lesquels les vaches sont sphériques. Ce sont les modèles mathématiques.

Les mathématiques s'intéressent aux modèles. La science recueille les observations et propose des modèles susceptibles de les expliquer. En mathématiques, nous restons dans le modèle et nous nous demandons quelles en sont les conséquences. Quelles prédictions le modèle ferait-il des observations futures ou passées ? Est-il cohérent avec les données observées ? Il existe donc une symbiose certaine. Je suppose que les mathématiques sont inhabituelles parmi d'autres disciplines : nous partons d'hypothèses, comme les axiomes d'un modèle, et nous nous demandons quelles conclusions en découlent. Dans presque toutes les autres disciplines, on part des conclusions. Je veux faire ceci. Je veux construire un pont, je veux gagner de l'argent, je veux faire cela. Ensuite, on trouve les moyens d'y parvenir. Il y a beaucoup moins de spéculations sur ce qui se passerait si je faisais ceci. On distingue la planification de modélisation. La fiction spéculative est peut-être un autre domaine, mais c'est à peu près tout. La plupart de nos actions, y compris la physique

et les sciences, sont guidées par des conclusions. Par exemple, on se demande : “Où va passer cet astéroïde ? Quel temps fera-t-il demain ?”. Mais les mathématiques ont aussi cette autre direction, celle qui part des axiomes.

LEX FRIDMAN : Qu’en pensez-vous ? Il existe une tension en physique entre théorie et expérimentation. Selon vous, quelle est la méthode la plus efficace pour découvrir des idées véritablement novatrices sur la réalité ?

TERENCE TAO : Eh bien, il faut une approche à la fois descendante et ascendante. Oui, il y a une réelle interaction entre tous ces éléments. Ainsi, avec le temps, les observations, la théorie et la modélisation devraient se rapprocher de la réalité. Mais au départ, c’est toujours le cas, elles sont toujours très éloignées. Or, il en faut une pour déterminer où pousser l’autre. Ainsi, si votre modèle prédit des anomalies non détectées par l’expérience, cela indique aux expérimentateurs où chercher davantage de données et affiner les modèles. Il y a donc un va-et-vient. Au sein même des mathématiques, il y a aussi une composante théorique et une composante expérimentale. C’est juste que jusqu’à très récemment, la théorie dominait presque entièrement. 99 % des mathématiques sont des mathématiques théoriques. Et il y a une infime part de mathématiques expérimentales. On le fait pour étudier les nombres premiers ou autre, il suffit de générer de grands ensembles de données. Avec l’avènement des ordinateurs, on a commencé à s’y intéresser un peu. Même avant, comme Gauss par exemple, il avait conjecturé le théorème le plus fondamental de la théorie des nombres, le théorème des nombres premiers, qui prédit le nombre de nombres premiers jusqu’à un million, voire un billion. La question n’est pas évidente. En fait, il calculait, je veux dire, principalement lui-même, mais il faisait aussi appel à des calculateurs, des personnes dont le métier consistait à faire de l’arithmétique, à calculer les cent mille premiers nombres premiers, ou quelque chose comme ça, à créer des tables et à faire des prédictions. C’était un exemple précoce de mathématiques expérimentales, mais jusqu’à très récemment, les mathématiques théoriques étaient simplement beaucoup plus performantes. Bien sûr, effectuer des calculs mathématiques complexes était tout simplement impossible jusqu’à très récemment. Et même aujourd’hui, malgré nos ordinateurs puissants, seules certaines notions mathématiques peuvent être explorées numériquement. On parle d’explosion combinatoire. Si vous souhaitez étudier, par exemple, le théorème de Zsigmondy, vous devez étudier tous les sous-ensembles possibles des nombres de 1 à 1 000. On se dit : “ces ensembles ne contiennent après tout que 1 000 nombres. À quel point cela pourrait-il être complexe ?”. Il s’avère que le nombre de sous-ensembles différents de 1 à 1000 est 2^{1000} , ce qui est bien plus grand que ce qu’un ordinateur peut actuellement, et même qu’un ordinateur pourra jamais dénombrer. Certains problèmes mathématiques deviennent donc très vite insolubles par calcul direct par force brute.

LEX FRIDMAN : Les échecs sont un autre exemple célèbre. Le nombre de positions aux échecs est un domaine qu’un ordinateur ne peut pas explorer pleinement. Mais maintenant, l’IA et les outils nous permettent d’explorer cet espace, non pas avec une garantie de réussite absolue, mais grâce à l’expérimentation. Nous pouvons donc résoudre les échecs empiriquement, par exemple. Nous disposons d’IA très performantes qui, sans explorer toutes les positions de l’arbre du jeu, ont trouvé de très bonnes approximations. Ces moteurs sont utilisés pour tester de nouvelles stratégies expérimentales du jeu d’échecs, revisitant ainsi d’anciennes théories échiquéennes, comme par exemple : “Ce type d’ouverture est un bon coup, celui-ci ne l’est pas”. Ces moteurs

permettent d'affiner, voire de renverser, les idées reçues sur les échecs. J'espère sincèrement que les mathématiques auront une plus grande composante expérimentale à l'avenir, peut-être grâce à l'IA.

TERENCE TAO : Nous en parlerons bien sûr. Mais dans le cas des échecs, et il y a un phénomène similaire en mathématiques, je ne pense pas qu'il s'agisse d'une explication formelle des différentes positions. Il s'agit simplement de dire quelle position est meilleure ou non. Et on peut en avoir l'intuition en tant qu'être humain, et à partir de là, nous, humains, pouvons construire une théorie du sujet. Vous avez mentionné l'allégorie de la caverne de Platon. Donc, au cas où les gens ne le sauraient pas, il s'agit pour des personnes coincées dans une caverne d'observer des ombres de la réalité, et non la réalité elle-même. Et les personnes dans la caverne croient que ce qu'elles observent est la réalité. Est-ce que, d'une certaine manière, les mathématiciens, et peut-être tous les humains, observent des ombres de la réalité ? Est-il possible que nous puissions vraiment accéder à la réalité ?

LEX FRIDMAN : Eh bien, il y a ces trois éléments ontologiques. Il y a la réalité, nos observations et nos modèles. Techniquement, ils sont distincts, et je pense qu'ils le resteront toujours. Mais ils peuvent se rapprocher avec le temps. Et ce rapprochement implique souvent de remettre en question ses intuitions initiales. L'astronomie offre d'excellents exemples. Un modèle initial du monde est plat parce qu'il paraît plat et qu'il est grand. Et le reste de l'univers, le ciel, ne l'est pas, comme le soleil, par exemple, qui paraît minuscule. On part donc d'un modèle très éloigné de la réalité, mais qui correspond en quelque sorte aux observations dont on dispose. Tout semble donc bien. Mais avec le temps, à mesure que les observations se rapprochent de la réalité, le modèle est entraîné avec lui. Ainsi, avec le temps, nous avons dû réaliser que la Terre est ronde, qu'elle tourne, qu'elle tourne autour du système solaire, que le système solaire tourne autour de la galaxie, et ainsi de suite. Et l'univers galactique est en expansion. Cette expansion s'accélère. Et en fait, très récemment, cette année ou à peu près, on a trouvé des preuves de ce que l'accélération de l'univers lui-même n'est pas constante.

LEX FRIDMAN : Et quelle est l'explication derrière cela ?

TERENCE TAO : Il se rattrape...

LEX FRIDMAN : Il rattrape son retard. C'est toujours la matière noire, l'énergie noire, ce genre de choses.

TERENCE TAO : Nous avons un modèle qui explique les données en quelque sorte, i.e. qui s'adapte parfaitement aux données. Il ne comporte que quelques paramètres à spécifier. On dit alors : "Oh, ce sont des facteurs d'erreur." Avec suffisamment de facteurs d'erreur, on peut tout expliquer. Mais l'intérêt mathématique du modèle est d'avoir moins de paramètres que de données pour les points dans l'ensemble d'observations. Donc, si vous avez un modèle à 10 paramètres qui explique 10 observations, c'est un modèle totalement inutile. C'est ce qu'on appelle un modèle surajusté. Mais si vous avez un modèle à deux paramètres qui explique mille milliards d'observations, ce qui est en gros le cas, oui, le modèle de la matière noire, je crois, a environ 14 paramètres et explique des pétaoctets de données dont disposent les astronomes. On peut imaginer une théorie. Une façon d'envisager la théorie physico-mathématique est de la considérer comme une compression de l'univers et des données. Vous avez donc ces pétaoctets d'observations. Vous voulez les compresser

dans un modèle que vous pouvez décrire en cinq pages et spécifier un certain nombre de paramètres, et qui puisse correspondre avec une précision raisonnable à la quasi-totalité de vos observations. Plus vous comprimez, meilleure est votre théorie.

LEX FRIDMAN : En fait, l'une des grandes surprises de notre univers et de tout ce qu'il contient est qu'il est tout simplement compressible. C'est "l'efficacité déraisonnable des mathématiques".

TERENCE TAO : Oui, Einstein avait une citation comme celle-là. "Le plus incompréhensible dans l'univers, c'est qu'il est compréhensible".

LEX FRIDMAN : Et pas seulement compréhensible. On peut formuler une équation comme " $E = mc^2$ ".

TERENCE TAO : Il existe en fait une explication mathématique possible à cela. Il existe donc un phénomène mathématique appelé universalité. La complexité de nombreux systèmes complexes à l'échelle macroscopique résulte de nombreuses interactions minuscules à l'échelle microscopique. Normalement, en raison de la forme courante des explosions, on pourrait penser que les équations à l'échelle macroscopique doivent être infiniment plus complexes que celles à l'échelle microscopique. Et elles le sont si on cherche à les résoudre avec une exactitude absolue. Par exemple, modéliser tous les atomes dans une boîte d'air, le nombre d'Avogadro est gigantesque. Il y a un nombre énorme de particules. Suivre chacune d'elles serait absurde. Mais certaines lois émergent à l'échelle macroscopique qui ne dépendent quasiment pas de ce qui se passe à l'échelle microscopique, ou seulement d'un très petit nombre de paramètres. Ainsi, pour modéliser un gaz de quintillions de particules dans une boîte, il suffit de connaître sa température, sa pression, son volume et quelques paramètres, au nombre de cinq ou six. Et cela modélise presque tout ce qu'il faut savoir sur ces si nombreuses particules (il y en a 6.10^{23} environ). Nous ne comprenons donc pas l'universalité aussi bien que nous le souhaiterions mathématiquement. Mais il existe des modèles plus simples, qui nous permettent de bien comprendre les raisons de l'universalité. Le plus fondamental est le théorème central limite, qui explique pourquoi la courbe en cloche est omniprésente dans la nature et pourquoi tant de choses sont distribuées selon une distribution dite gaussienne.

LEX FRIDMAN : La fameuse courbe en cloche. Il existe même un même de courbe en cloche. Et même si le même s'applique largement, il y a une universalité dans le même.

TERENCE TAO : Oui, on peut parler de méta-analyse si on veut, mais les processus sont très nombreux. Par exemple, on peut prendre un très grand nombre de variables aléatoires indépendantes et en faire la moyenne de diverses manières, en faisant une moyenne simple ou plus complexe. Et on peut démontrer dans divers cas l'émergence de ces courbes en cloche, de ces gaussiennes. Et c'est une explication satisfaisante.

Parfois, ce n'est pas le cas. Ainsi, si vous disposez de nombreuses entrées différentes et qu'elles sont toutes corrélées de manière systémique, vous pouvez obtenir une courbe en cloche très éloignée de celle-ci. Il est également important de savoir quand un système échoue. L'universalité n'est donc pas une valeur sûre à 100 %. La crise financière mondiale en est un exemple célèbre. On pensait que les défauts de paiement sur les prêts hypothécaires suivaient un comportement gaussien si l'on

demandait à une population de 100 000 Américains ayant un prêt hypothécaire, on se demandait quelle proportion d'entre eux feraient défaut. Si tout était décorrélé, la courbe en cloche serait bien définie, et il serait possible de gérer le risque avec des options, des produits dérivés, etc. C'est une théorie très intéressante. Mais si des chocs systémiques dans l'économie peuvent pousser tout le monde au défaut simultanément, ce comportement est tout à fait non gaussien.

Et ce problème n'avait pas été pleinement pris en compte en 2008. Je pense qu'aujourd'hui, on prend davantage conscience qu'il s'agit d'un risque systémique, mais d'un problème bien plus vaste. Et même si le modèle est beau et bien conçu, il peut ne pas correspondre à la réalité. L'analyse mathématique de l'effet des modèles est essentielle. Mais est également essentielle la connaissance permettant de valider les modèles correspondant à la réalité et de les invalider quand ils ne le font pas, vous avez besoin de savoir les deux. Mais les mathématiques peuvent être utiles, car, par exemple, ces théorèmes centraux limites indiquent que si certains axiomes, comme la non-corrélation de type, sont présents si toutes les entrées ne sont pas corrélées entre elles, alors on obtient ces comportements gaussiens indiquant que tout va bien. Cela indique où chercher les faiblesses du modèle. Ainsi, si vous avez une compréhension mathématique du théorème central limite et que quelqu'un propose d'utiliser ces gaussiennes ou autre pour modéliser le risque de défaut, si vous avez une formation mathématique, vous direz "D'accord, mais quelle est la corrélation systémique entre toutes vos entrées ?". Vous pouvez alors demander aux économistes : "Quel est le niveau de risque ?". Et ensuite, on peut chercher à le calculer. Il y a donc toujours cette synergie entre les sciences et les mathématiques.

LEX FRIDMAN : Un peu sur le sujet de l'universalité, vous êtes connu et célébré pour votre travail dans un domaine mathématique incroyablement vaste. Cela rappelle Hilbert il y a un siècle. D'ailleurs, le grand mathématicien Tim Gowers, lauréat de la médaille Fields, a déclaré que vous êtes le mathématicien qui se rapproche le plus de Hilbert

TERENCE TAO : Ha ! (*Lex rit.*)

LEX FRIDMAN : C'est un de vos collègues ?

TERENCE TAO : Oh oui, c'est un bon ami.

LEX FRIDMAN : Quoi qu'il en soit, vous êtes connu pour votre capacité à approfondir et à élargir les connaissances en mathématiques. Vous êtes donc la personne idéale à qui poser la question. Pensez-vous qu'il existe des liens entre tous les domaines disparates des mathématiques ? Existe-t-il une structure profonde sous-jacente à l'ensemble des mathématiques ?

TERENCE TAO : Il existe certainement de nombreux liens, et une grande partie des progrès des mathématiques peut être illustrée par l'histoire de deux domaines mathématiques auparavant disjoints et par la recherche de liens. La géométrie et la théorie des nombres en sont un exemple ancien. À l'époque des Grecs anciens, ces disciplines étaient considérées comme différentes. Les mathématiciens travaillaient sur les deux. Euclide a notamment travaillé sur la géométrie, mais aussi sur les nombres. Mais elles n'étaient pas vraiment considérées comme liées. Un peu comme si on pouvait dire que telle longueur était cinq fois plus grande, car on pouvait en prendre cinq copies,

et ainsi de suite. Mais ce n'est que Descartes qui a réellement compris qu'avec la géométrie analytique, on pouvait paramétrer le plan, un objet géométrique, par deux nombres réels. Chaque point peut l'être. Ainsi, les problèmes géométriques peuvent être transformés en problèmes de nombres. Aujourd'hui, cela semble presque trivial. Il n'y a pas de contenu à énumérer. Bien sûr, un plan, c'est x et y , car c'est ce que nous enseignons et c'est intériorisé. Mais l'unification de ces deux domaines a constitué une avancée majeure, et ce processus s'est répété sans cesse dans les mathématiques. L'algèbre et la géométrie ont été séparées, et nous avons maintenant une géométrie algébrique séparée qui les relie sans cesse. Et c'est certainement le type de mathématiques que j'apprécie le plus. Je pense donc qu'il existe différents styles de mathématiques. Je pense aux hérissons et aux renards. Un renard connaît beaucoup de choses, mais un hérisson en connaît une très, très bien. Et en mathématiques, il y a assurément des hérissons et des renards, et il y a aussi des personnes qui peuvent jouer les deux rôles. Et je pense qu'une collaboration idéale entre mathématiciens implique une certaine diversité, comme un renard travaillant avec plusieurs hérissons, ou vice versa. Mais je m'identifie surtout comme un renard. J'aime bien l'arbitrage, apprendre le fonctionnement d'un domaine, en apprendre les ficelles, puis passer à un autre domaine que les gens ne considèrent pas comme lié, mais auquel je peux adapter les astuces du premier domaine.

LEX FRIDMAN : Vous voyez donc les connexions entre les domaines.

TERENCE TAO : Oui. Il y a d'autres mathématiciens bien plus avancés que moi, ce sont de véritables hérissons. Ils maîtrisent parfaitement un domaine et y sont beaucoup plus rapides et efficaces. Mais je peux leur donner ces outils supplémentaires.

LEX FRIDMAN : Vous avez dit que vous pouviez être à la fois le hérisson et le renard, selon le contexte et la collaboration. Alors, pourriez-vous nous en dire davantage, si c'est possible ? Quelle est la différence entre ces deux façons d'aborder un problème ? Imaginez que vous êtes confronté à un nouveau problème et que vous cherchez des liens, plutôt qu'une concentration très particulière.

TERENCE TAO : Je suis beaucoup plus à l'aise avec le paradigme du renard. J'aime chercher des analogies, des récits. Je passe beaucoup de temps à observer un résultat dans un domaine, et j'aime bien le résultat, c'est un résultat intéressant. Mais je n'aime pas la preuve. Elle utilise des mathématiques que je ne maîtrise pas très bien. J'essaie souvent de la prouver moi-même avec mes outils préférés. Souvent, ma preuve est moins bonne, mais en faisant cet exercice, je peux me dire "Oh, maintenant je vois ce que l'autre preuve cherchait à faire". Et cela me permet de comprendre les outils utilisés dans ce domaine. C'est donc très exploratoire, avec des projets insolites, des constructions insolites et beaucoup de réinventions. Alors que le style du hérisson est, je pense, beaucoup plus académique. On est très axé sur la connaissance. On se tient au courant de toutes les avancées du domaine. On connaît toute l'histoire. On a une très bonne compréhension des forces et des faiblesses de chaque technique. Oui, je pense qu'on s'appuierait davantage sur des calculs que sur la recherche de récits. Donc, oui, je pourrais faire ça aussi, mais d'autres personnes sont extrêmement douées pour ça.

LEX FRIDMAN : Prenons du recul et examinons peut-être une version quelque peu romancée des mathématiques. Je crois que vous avez dit qu'au début de votre vie, les mathématiques étaient plutôt une activité de résolution d'énigmes. Quand avez-vous rencontré pour la première fois un

problème ou une démonstration qui vous a fait réaliser que les mathématiques pouvaient avoir une certaine élégance et une certaine beauté ?

TERENCE TAO : C'est une bonne question. Quand je suis arrivé en master à Princeton, John Conway était là à l'époque. Il est décédé il y a quelques années. Je me souviens que l'une des toutes premières conférences de recherche à laquelle j'ai assisté était une conférence de Conway sur ce qu'il appelait la preuve extrême. Conway avait cette façon étonnante de penser toutes sortes de choses d'une manière que l'on pourrait imaginer normalement. Il concevait les preuves elles-mêmes comme occupant un certain espace. Ainsi, si vous voulez prouver quelque chose, disons par exemple, vous voulez prouver qu'il existe une infinité de nombres premiers, vous avez un certain nombre de preuves différentes, mais vous pouvez les classer selon différents axes. Par exemple, certaines preuves sont élégantes, d'autres longues, d'autres élémentaires, etc. Il s'agit donc d'un nuage. L'espace de toutes les preuves a donc lui-même une forme. Conway s'intéressait donc aux points extrêmes de cette forme. Par exemple, parmi toutes ces preuves, laquelle est la plus courte au détriment de toutes les autres, ou la plus élémentaire, etc.

Il a donc donné des exemples de théorèmes connus, puis il a donné ce qu'il considérait comme la preuve ultime selon ces différents aspects. J'ai trouvé très révélateur qu'il ne s'agisse pas seulement d'obtenir la preuve d'un résultat, mais aussi, une fois cette preuve obtenue, d'essayer de l'optimiser de différentes manières, la preuve elle-même relevait d'un savoir-faire. Cela a certainement influencé mon style d'écriture, lorsque je faisais mes devoirs de mathématiques, mes devoirs de licence, etc., on m'encourageait à noter toute preuve valable et à la remettre. Lorsqu'une preuve est validée, je passe à autre chose. Mais si je veux que mes résultats soient réellement influents et lus, ils ne peuvent pas se contenter d'être corrects. Ils doivent aussi être agréables à lire, motivants, adaptables et généralisables. C'est pareil dans de nombreuses disciplines comme le codage. Il existe de nombreuses analogies entre les mathématiques et le codage. J'aime les analogies, si vous ne l'avez pas remarqué. (*Lex rit*). Mais on peut coder du code simple et rapide, efficace pour une tâche donnée. Il existe de nombreux principes pour bien écrire du code, afin que d'autres puissent l'utiliser, le développer et ainsi réduire les bugs. Il en va de même pour les mathématiques.

LEX FRIDMAN : Oui, tout d'abord, il y a tellement de belles choses là-dedans. Et Conway est l'un des plus grands esprits des mathématiques et de l'informatique. Le simple fait de considérer l'espace des preuves et de se demander : "À quoi ressemble cet espace et quels sont les preuves extrêmes ?". Comme vous l'avez mentionné, l'analogie avec le codage est intéressante, car il existe aussi cette compétition appelée Code Golf.

TERENCE TAO : Oh, oui, oui, oui.

LEX FRIDMAN : Ce que je trouve également beau et amusant, c'est que les gens utilisent différents langages de programmation pour essayer d'écrire le programme le plus court possible qui accomplit une tâche particulière.

TERENCE TAO : Oui.

LEX FRIDMAN : Je crois qu'il existe même des concours sur ce sujet. C'est aussi un bon moyen de

tester non seulement le type de programmes ou, dans ce cas, les preuves, mais aussi les différents langages. Il peut-être intéressant d'utiliser une notation différente pour accomplir une tâche différente.

TERENCE TAO : Oui, on apprend beaucoup. Ça peut paraître futile, mais ça peut générer des idées que l'on ne verrait peut-être pas sans cet objectif artificiel.

LEX FRIDMAN : Quelle est l'équation la plus belle ou la plus élégante en mathématiques ? L'une des qualités recherchées par les gens est souvent la simplicité. Prenons l'exemple de $E = mc^2$, dans laquelle plusieurs concepts sont réunis. C'est pourquoi l'identité d'Euler est souvent considérée comme la plus belle équation des mathématiques. Trouvez-vous de la beauté dans celle de l'identité d'Euler ?

TERENCE TAO : Oui, comme je l'ai dit, ce que je trouve le plus intéressant, ce sont les connexions entre différentes choses, donc $e^\pi = i^2 = -1$. Donc oui, les gens utilisent toujours toutes les constantes fondamentales. Bon, c'est mignon, mais pour moi... (*Lex rit*) La fonction exponentielle a été introduite par Euler pour mesurer la croissance exponentielle. Donc, les intérêts composés ou la décroissance. Tout ce qui croît, décroît et décroît continuellement, ou bien la dilatation ou la contraction, est modélisé par la fonction exponentielle. Alors que π est dérivé des cercles et de la rotation. Si vous voulez faire pivoter une aiguille, par exemple, de 180 degrés, vous devez la faire pivoter de π radians. Et i , les nombres complexes, représente l'ensemble des axes imaginaires d'une rotation de 90 degrés. Donc un changement de direction. Donc la fonction métrique x représente la croissance et la décroissance selon la direction qui est la vôtre. Lorsqu'on ajoute un i à l'exponentielle, au lieu d'un mouvement dans la direction courante, on obtient un mouvement dans une direction perpendiculaire à la direction courante, donc une rotation. Ainsi, $e^\pi = -1$ indique tourner de l'angle π est identique à calculer l'inverse.

Cela unifie donc la géométrie par la dilatation et la croissance exponentielle, ou la dynamique par cet acte de complexification, la rotation par i . Cela relie donc tous ces outils mathématiques, la dynamique, la géométrie et les nombres complexes. Ils sont tous considérés comme presque voisins en mathématiques du fait de cette identité.

LEX FRIDMAN : Pensez-vous que ce que vous avez mentionné est intéressant ? La collision de notations issues de domaines aussi disparates n'est-elle qu'un effet secondaire futile ? Ou pensez-vous qu'une seule notation a une valeur légitime ? Tous nos vieux amis se retrouvent le soir.

TERENCE TAO : Eh bien, c'est la confirmation que vous avez les bons concepts. Donc, quand vous étudiez quelque chose pour la première fois, vous devez mesurer les choses et leur donner des noms. Et au début, parfois, parce que votre modèle est encore trop éloigné de la réalité, vous donnez les mauvais noms aux mauvaises choses, et vous ne découvrez que plus tard ce qui est vraiment important.

LEX FRIDMAN : Les physiciens peuvent parfois faire cela, mais ça finit bien.

TERENCE TAO : En physique, $E = mc^2$. L'un des points importants était le E . Lorsqu'Aristote a formulé ses lois du mouvement, puis Galilée, Newton et les autres, ils ont vu les choses qu'ils

pouvaient mesurer. Ils pouvaient mesurer la masse, l'accélération, la force, etc. En mécanique newtonienne, par exemple, il y avait la célèbre deuxième loi du mouvement de Newton $F = ma$. C'étaient donc les objets principaux. Ils leur ont donc accordé une place centrale dans la théorie. Ce n'est que plus tard, après que les gens ont commencé à analyser ces équations, qu'il semblait toujours y avoir des quantités conservées, notamment la quantité de mouvement et l'énergie.

Il n'est pas évident que les choses aient une énergie. Ce n'est pas quelque chose que l'on peut mesurer directement, comme la masse, la vitesse, etc. Mais avec le temps, on a compris qu'il s'agissait d'un concept fondamental. Au XIXe siècle, Hamilton a finalement reformulé les lois de la physique de Newton en ce qu'on appelle la mécanique hamiltonienne, où l'énergie, aujourd'hui appelée hamiltonien, était l'objet dominant. Une fois que l'on sait mesurer l'hamiltonien d'un système, on peut décrire complètement sa dynamique, comme ce qui se passe dans tous les états. L'hamiltonien était vraiment un acteur central, ce qui n'était pas évident au départ. Et cela a été utile. En fait, ce changement de perspective a été très utile avec l'arrivée de la mécanique quantique, car les premiers physiciens qui ont étudié la mécanique quantique ont eu beaucoup de mal à adapter leur pensée newtonienne, car tout était une particule, etc., à la mécanique quantique, car désormais tout était une onde. Cela paraît vraiment étrange. On se demande quelle est la version quantique de $F = mA$? Et il est très difficile d'y répondre. Mais il s'avère que l'hamiltonien, si secrètement présent en mécanique classique, est aussi l'objet clé de la mécanique quantique. Il existe donc un objet appelé hamiltonien. C'est un type d'objet différent. C'est ce qu'on appelle un opérateur plutôt qu'une fonction. Mais une fois spécifié, on spécifie toute la dynamique.

Il existe donc l'équation de Schrödinger, qui explique précisément comment les systèmes quantiques évoluent une fois que l'on possède un hamiltonien. Mis côte à côte, ils présentent des aspects totalement différents. L'un implique des particules, l'autre des ondes, etc. Mais grâce à cette centralité, on pourrait commencer à transférer de nombreuses intuitions et connaissances de la mécanique classique à la mécanique quantique. Par exemple, en mécanique classique, il existe ce qu'on appelle le théorème de Noether. Chaque symétrie dans un système physique est associée à une loi de conservation. Les lois de la physique sont donc invariantes par translation. Par exemple, si je me déplace de dix pas vers la gauche, je ressens les mêmes lois de la physique que si j'étais ici. Cela correspond à la conservation du moment cinétique. Si je me tourne d'un certain angle, je ressens à nouveau les mêmes lois de la physique. Cela correspond à la conservation du moment cinétique. Si j'attends 10 minutes, les lois de la physique restent les mêmes. Cette invariance de transition temporelle correspond à la loi de conservation de l'énergie. Il existe donc un lien fondamental entre symétrie et conservation. C'est également vrai en mécanique quantique, même si les équations sont complètement différentes. Mais comme elles proviennent toutes deux de l'hamiltonien, celui-ci contrôle tout. Chaque fois que l'hamiltonien présente une symétrie, les équations obéiront à une loi de conservation. Une fois le langage approprié utilisé, des choses beaucoup plus complexes s'expriment d'une manière bien plus propre.

L'un des problèmes qui nous empêche encore d'unifier la mécanique quantique et la relativité générale est que nous n'avons pas encore compris à quoi ressemblent les objets fondamentaux. Par exemple, nous devons abandonner l'idée que l'espace et le temps sont des espaces quasi euclidiens. Or, nous savons qu'à des échelles infimes, il y aura des fluctuations quantiques, une mousse spatio-temporelle, et utiliser les coordonnées cartésiennes x, y, z est un échec, mais nous ne savons pas par

quoi les remplacer. Nous ne disposons pas des concepts mathématiques nécessaires. L'analogie a un hamiltonien qui a en quelque sorte tout organisé.

LEX FRIDMAN : Votre instinct vous dit-il qu'il existe une théorie du tout, donc qu'il est possible d'unifier, de trouver ce langage qui unifie la relativité générale et la mécanique quantique ?

TERENCE TAO : Je le crois. L'histoire de la physique a été celle de l'unification, un peu comme celle des mathématiques. Au fil des ans, l'électricité et le magnétisme étaient des théories distinctes, puis Maxwell les a unifiées. Newton a unifié les mouvements du ciel avec ceux des objets terrestres, et ainsi de suite. C'est donc normal. C'est juste que, pour revenir à ce modèle d'observation et de théorie, une partie de notre problème est que la physique est victime de son propre succès, que nos deux grandes théories, la relativité générale et la mécanique quantique, sont si bonnes aujourd'hui, qu'ensemble, elles couvrent 99,9 % de toutes les observations que nous pouvons faire. Et il faut soit se baser sur des accélérations de particules extrêmement folles, soit sur l'univers primitif, soit sur des phénomènes très difficiles à mesurer, pour obtenir un écart par rapport à l'une ou l'autre de ces deux théories au point de pouvoir les combiner. Mais je suis convaincu que puisque nous faisons cela depuis des siècles, et puisque nous avons toujours progressé, il n'y a aucune raison que ça s'arrête.

LEX FRIDMAN : Pensez-vous que vous serez un mathématicien qui développera une théorie de tout ?

TERENCE TAO : Souvent, lorsque les physiciens ont besoin d'une théorie mathématique, il existe un précurseur élaboré par les mathématiciens. Ainsi, lorsqu'Einstein a commencé à comprendre que l'espace était courbe, il a consulté un mathématicien et lui a demandé "Existe-t-il une théorie de l'espace courbe déjà élaborée par les mathématiciens qui pourrait être utile ?". Celui-ci lui a répondu "Oh oui. Je pense que Riemann a trouvé quelque chose". Et effectivement, Riemann avait développé la géométrie riemannienne, qui est précisément une théorie des espaces courbés de diverses manières générales, ce qui s'est avéré être presque exactement ce dont avait besoin la théorie d'Einstein. Cela renvoie à l'efficacité déraisonnable des mathématiques selon Wigner. Je pense que les théories qui fonctionnent bien pour expliquer l'univers ont tendance à utiliser les mêmes objets mathématiques que celles qui fonctionnent bien pour résoudre des problèmes mathématiques. En fin de compte, ce sont simplement deux manières d'organiser les données de manière utile.

LEX FRIDMAN : J'ai juste l'impression que vous pourriez avoir besoin d'aller dans un pays étrange, très difficile à appréhender, comme si tu avais besoin de la théorie des cordes...

TERENCE TAO : Oui, c'était un candidat de premier plan pendant des décennies. Je pense que cette théorie des cordes est en train de passer de mode, car elle ne correspond pas à l'expérience.

LEX FRIDMAN : Donc l'un des grands défis, bien sûr, comme vous l'avez dit, c'est que l'expérimentation est très difficile.

TERENCE TAO : Oui.

LEX FRIDMAN : En raison de l'efficacité des deux théories. Mais l'autre théorie, comme vous le

dites, ne se limite pas à dévier de l'espace-temps, mais s'étend à un nombre incroyable de dimensions. On fait toutes sortes de choses étranges. Pour nous, nous sommes tellement éloignés de cette Terre plate de départ, comme vous l'avez mentionné.

TERENCE TAO : Oui, exactement.

LEX FRIDMAN : Maintenant, soyons justes, il nous est très difficile d'utiliser nos capacités limitées en tant que descendants des singes pour avoir une idée intuitive de ce à quoi ressemble réellement cette réalité.

TERENCE TAO : C'est pourquoi les analogies sont si importantes. Effectivement, la Terre ronde n'est pas intuitive, car on y est bloqué. Mais pour les objets ronds en général, on a une assez bonne intuition. On a aussi une intuition sur le fonctionnement de la lumière, etc. C'est un bon exercice de comprendre comment les éclipses et les phases du Soleil, de la Lune, etc., peuvent être facilement expliquées par les modèles d'une Terre et d'une Lune rondes. On peut simplement prendre un ballon de basket, une balle de golf et une source lumineuse et faire ces choses soi-même. L'intuition est donc là, mais il faut la transférer.

LEX FRIDMAN : C'est un grand pas intellectuel pour nous de passer d'une Terre plate à une Terre ronde, car nous vivons principalement en terrain plat, pour intégrer cette information. Et nous la tenons tous pour acquise. Nous tenons beaucoup de choses pour acquises, car la science a établi de nombreuses preuves à ce sujet. Mais nous sommes entourés de roches volant dans l'espace. C'est un grand pas en avant, et il faut enchaîner ces sauts à mesure que nous progressons.

TERENCE TAO : Tout à fait. La science moderne est peut-être, encore une fois, victime de son succès ; pour être plus précis, on doit s'éloigner de plus en plus de l'intuition initiale. Pour quelqu'un qui n'a pas suivi tout le processus d'éducation scientifique, cela paraît de plus en plus suspect. Il nous faut donc plus de fondements, je pense. Il y a des scientifiques qui font d'excellentes actions de vulgarisation, mais il y a beaucoup de choses scientifiques que l'on peut faire chez soi. Il existe de nombreuses vidéos Youtube. J'en ai fait une récemment avec Grant Sanderson. Nous avons parlé de la manière dont les Grecs anciens étaient capables de mesurer des choses comme la distance de la Terre à la Lune, grâce à des techniques reproductibles. Il n'est pas nécessaire de recourir à des télescopes spatiaux sophistiqués et à des mathématiques intimidantes.

LEX FRIDMAN : Oui, je recommande vivement cette vidéo. Je trouve que vous avez donné une conférence et réalisé une vidéo incroyable avec Grant. C'est une expérience magnifique que de se mettre dans la peau d'une personne de cette époque enveloppée de mystère. Vous êtes sur cette planète, vous n'en connaissez ni la forme ni la taille. Vous voyez des étoiles, vous voyez des choses, et vous essayez de vous situer dans ce monde et de formuler des hypothèses générales sur la distance entre les lieux.

TERENCE TAO : Changer de perspective est vraiment important. Vous dites que voyager ouvre l'esprit. C'est un voyage intellectuel. Imaginez-vous dans l'esprit des Grecs anciens ou d'autres personnes, à une autre époque ; formulez des hypothèses, imaginez des vaches sphériques, etc., spéculiez. C'est ce que font les mathématiciens et certains artistes, d'ailleurs.

LEX FRIDMAN : C'est tout simplement incroyable qu'en dépit de contraintes extrêmes, on puisse encore dire des choses très fortes. C'est pourquoi il est inspirant de se pencher sur l'histoire et de constater combien de choses peuvent être comprises sans trop de travail de compréhension.

TERENCE TAO : Si l'on propose des axiomes, les mathématiques permettent de les suivre jusqu'à leurs conclusions. Et parfois, on peut s'éloigner considérablement des hypothèses initiales.

LEX FRIDMAN : Si l'on peut rester dans le domaine de l'étrange, vous avez mentionné la relativité générale. Vous avez contribué à la compréhension mathématique des équations de champ d'Einstein. Pouvez-vous expliquer ces travaux ? Et d'un point de vue mathématique, quels aspects de la relativité générale vous intriguent, vous posent problème ?

TERENCE TAO : J'ai travaillé sur certaines équations. Il y a ce qu'on appelle le modèle sigma en théorie des champs, qui n'est pas exactement l'équation de la gravité spatio-temporelle elle-même, mais celle de certains champs qui pourraient exister au-dessus de l'espace-temps. Les équations de relativité d'Einstein décrivent donc simplement l'espace et le temps eux-mêmes. Mais il y a aussi d'autres champs qui se superposent à cela. Il y a le champ électromagnétique, les champs de Yang-Mills, et toute une hiérarchie d'équations différentes, dont celle d'Einstein est considérée comme l'une des plus non linéaires et des plus complexes. Mais relativement bas dans cette hiérarchie se trouvait l'équation des cartes d'ondes. Il s'agit donc d'une onde qui, en tout point donné, est fixée sur une sphère. Je peux donc imaginer un ensemble de flèches dans l'espace et le temps, pointant dans des directions différentes, mais se propageant comme des ondes. Si vous agitez une flèche, elle se propage et fait bouger toutes les flèches, un peu comme des gerbes de blé dans un champ. Et je me suis à nouveau intéressé au problème de régularité globale pour cette question. Est-il possible que toute l'énergie ici se concentre en un point ? L'équation que j'ai étudiée était en fait ce qu'on appelle une équation critique, dont le comportement à toutes les échelles est sensiblement le même. J'ai pu, de justesse, démontrer qu'il était impossible de forcer un scénario où toute l'énergie se concentre en un point, et que l'énergie devait se disperser légèrement, et qu'à partir du moment où elle se dispersait légèrement, elle resterait régulière. C'était en l'an 2000. C'est en partie pour cela que je me suis intéressé à Navier-Stokes par la suite. J'ai donc développé des techniques pour résoudre ce problème. Ce problème est en partie non linéaire en raison de la courbure de la sphère. Il y avait un certain effet non linéaire, non perturbatif. En temps normal, il paraissait plus important que les effets linéaires de l'équation d'onde. Il était donc difficile de garder le contrôle, même avec une énergie faible. Mais j'ai développé ce qu'on appelle une transformation de jauge.

L'équation est donc comparable à l'évolution de gerbes de blé qui se courbent d'avant en arrière. Il y a donc beaucoup de mouvement. Mais imaginez que vous pouvez stabiliser l'écoulement en fixant de petites caméras à différents points de l'espace, qui tentent de se déplacer de manière à capturer la majeure partie du mouvement, et sous cet écoulement stabilisé, l'écoulement devient beaucoup plus linéaire. J'ai découvert un moyen de transformer l'équation pour réduire les effets non linéaires. J'ai ensuite pu résoudre l'équation. J'ai découvert cette transformation lors d'une visite chez ma tante en Australie. J'essayais de comprendre la dynamique de tous ces champs. Or, je n'y arrivais pas avec un crayon et du papier. Et je n'avais pas assez d'ordinateurs pour faire des simulations. J'ai donc fini par fermer les yeux, allongé par terre, et m'imaginer être ce champ

vectorel, en roulant sur place, pour essayer de voir comment modifier les coordonnées de manière à ce que les objets, dans toutes les directions, se comportent de manière raisonnablement linéaire. Et oui, ma tante m'a surpris pendant que je faisais ça. Et elle m'a demandé pourquoi je me roulais par terre !

LEX FRIDMAN : Ce qui est compliqué, c'est plutôt de trouver la réponse à lui fournir.

TERENCE TAO : Oui, oui. Et elle a rajouté : "Bon, d'accord, tu es jeune. Je ne pose pas de questions."

LEX FRIDMAN : Je dois vous demander comment vous abordez la résolution de problèmes complexes. S'il est possible d'explorer votre esprit lorsque vous réfléchissez, visualisez-vous des objets mathématiques, des symboles, par exemple ? Que visualisez-vous habituellement dans votre esprit lorsque vous réfléchissez ?

TERENCE TAO : J'use beaucoup de papier et de crayon. Une chose qu'on apprend en tant que mathématicien, c'est ce que j'appelle tricher stratégiquement. La beauté des mathématiques, c'est qu'on peut modifier le problème, changer les règles à sa guise. On ne peut pas faire ça dans d'autres domaines. Si vous êtes ingénieur et que quelqu'un vous dit "Construisez un pont sur cette rivière", vous ne pouvez pas dire "Je préfère construire ce pont ici plutôt que là", ou : "Je préfère le construire en papier plutôt qu'en acier." Mais lorsque vous êtes un mathématicien, vous pouvez faire ce que vous voulez. C'est comme essayer de résoudre un jeu vidéo avec des codes de triche illimités. Et donc, vous pouvez définir cette dimension qui est grande, vous pouvez la définir comme étant égale à un.

Donc je résoudrais d'abord le problème unidimensionnel. Il y a un terme principal et un terme d'erreur. Je vais faire l'hypothèse d'une vache sphérique. Je suppose que le terme d'erreur est nul. La façon de résoudre ces problèmes ne se résume pas à un mode Iron Man où l'on augmente la difficulté au maximum. En réalité, pour tout problème mathématique raisonnable, il faut aborder le problème de la manière suivante si dix éléments vous compliquent la vie, trouvez une version qui désactive neuf des difficultés et n'en conserve qu'une, et résolvez-la. Donc, vous installez neuf codes de triche. Si vous en résolvez dix, le jeu est trivial. Mais vous installez neuf codes de triche, vous résolvez un problème qui vous apprend à gérer cette difficulté particulière, puis vous la désactivez, puis vous en activez un autre, et enfin vous la résolvez. Une fois que vous savez résoudre les dix problèmes, dix difficultés séparément, vous devez les fusionner petit à petit. Enfant, je regardais beaucoup de films d'action de Hong-Kong, qui font partie de ma culture. À chaque scène de combat, le héros est parfois assailli par une centaine de méchants, mais la chorégraphie est toujours faite pour qu'il n'affronte qu'un seul individu à la fois. Il le vaincra et passera ensuite au suivant. Grâce à cela, il pourra tous les vaincre. Alors que si les ennemis s'étaient battus plus intelligemment et avaient assailli le héros tous d'un coup, ils auraient gagné mais le film aurait été bien moins réussi !

LEX FRIDMAN : Travaillez-vous habituellement avec du papier et un stylo ? Ou bien travaillez-vous sur ordinateur en écrivant en $\text{\LaTeX}$?

TERENCE TAO : En fait, je travaille principalement avec du papier et un stylo. Dans mon bureau,

j'ai quatre tableaux noirs géants et parfois, je dois simplement écrire tout ce que je sais sur le problème, puis m'asseoir sur mon canapé et visualiser l'ensemble.

LEX FRIDMAN : Est-ce que ce sont uniquement des symboles comme des notations, ou y a-t-il des dessins ?

TERENCE TAO : Oh, il y a beaucoup de dessins et de gribouillages sur mesure qui n'ont de sens que pour moi. Et c'est la beauté d'un tableau noir. On efface. Et c'est très naturel. J'utilise de plus en plus d'ordinateurs, en partie parce que l'IA facilite grandement les choses simples, pour coder des choses. Avant, pour tracer une fonction, ce qui était assez compliqué comme une itération, je devais me rappeler comment configurer un programme **Python** et comment fonctionne une boucle "**for**", puis la déboguer. Cela me prenait deux heures, et ainsi de suite. Maintenant, je peux le faire en 10 à 15 minutes. J'utilise de plus en plus l'ordinateur pour des explorations simples.

LEX FRIDMAN : Parlons un peu d'IA, si possible. Un bon point de départ serait peut-être de parler des preuves assistées par ordinateur en général. Pouvez-vous décrire le langage de programmation de preuve formelle **Lean** et son utilité comme assistant de preuve ? Comment l'avez-vous utilisé et comment vous a-t-il aidé ?

TERENCE TAO : **Lean** est un langage informatique très similaire aux langages standards comme **Python**, **C**, etc., à la différence que la plupart d'entre eux privilégient l'utilisation de code exécutable. Les lignes de code effectuent des actions : elles inversent des bits, font bouger un robot, ou encore affichent du texte sur Internet. **Lean** est donc un langage capable de faire cela. Il peut également être exécuté comme un langage traditionnel standard, mais il peut aussi produire des certificats. Un langage logiciel comme **Python** peut effectuer un calcul et donner comme réponse sept. La somme de trois et quatre est-elle égale à sept ? Mais **Lean** peut produire non seulement la réponse, mais aussi une preuve expliquant comment il a obtenu la réponse sept, soit trois et quatre, et toutes les étapes impliquées. Il crée des objets plus complexes, non seulement des instructions, mais des instructions avec des preuves qui leur sont attachées. Et chaque ligne de code est simplement un moyen d'assembler des instructions précédentes pour en créer de nouvelles. L'idée n'est donc pas nouvelle. Ces outils sont appelés assistants de preuve, et ils fournissent des langages permettant de créer des preuves mathématiques assez complexes. Et ils produisent ces certificats qui garantissent à 100 % la validité de vos arguments, si vous faites confiance au compilateur, bien sûr. Mais ils ont conçu un compilateur très compact, et il existe plusieurs compilateurs différents pour le même niveau.

LEX FRIDMAN : Pouvez-vous expliquer la différence entre écrire sur papier et utiliser le langage de programmation **Lean** ? Est-il difficile de formaliser une déclaration ?

TERENCE TAO : Eh bien, de nombreux mathématiciens ont été impliqués dans la conception de **Lean**, il est donc conçu de manière à ce que les lignes de code individuelles ressemblent aux lignes individuelles d'un argument mathématique. Vous pourriez vouloir introduire une variable, ou prouver une contradiction. Il existe plusieurs méthodes standard, et la méthode est écrite de telle sorte qu'elle devrait idéalement ressembler à une correspondance biunivoque. En pratique, ce n'est pas le cas, car **Lean** revient à expliquer une preuve à un collègue extrêmement pédant qui vous fera

remarquer : “Ok, vous vouliez vraiment dire ça ? Que se passe-t-il si c’est zéro ?” Comment justifiez-vous cela ? **Lean** comporte donc beaucoup d’automatisation pour essayer d’être moins ennuyeux. Ainsi, par exemple, tout objet mathématique doit être d’un certain type. Par exemple, si je parle de x , x est-il un nombre réel, un nombre naturel, une fonction ou autre chose ? Si on écrit les choses de manière informelle, c’est souvent en fonction du contexte. On dit “Il est clair que x est égal à...”, “Soit x la somme de y et z ”, et si y et z étaient déjà des nombres réels, x devrait aussi être un nombre réel. **Lean** peut faire beaucoup de choses sur ce sujet, mais il demande parfois : “Attendez, pouvez-vous m’en dire plus sur cet objet ? De quel type d’objet s’agit-il ?”. Il faut réfléchir davantage à un niveau philosophique, pas seulement aux calculs que l’on effectue, mais à ce que chaque objet est réellement, d’une certaine manière.

LEX FRIDMAN : Est-ce qu’on utilise des LLM pour faire l’inférence de types ?

TERENCE TAO : Il s’agit d’une IA beaucoup plus traditionnelle, dite à l’ancienne. On peut représenter tous ces éléments sous forme d’arbres, et il existe toujours des algorithmes pour les associer.

LEX FRIDMAN : Il est donc réellement possible de déterminer si quelque chose est un nombre réel ou un nombre naturel ?

TERENCE TAO : Chaque objet est accompagné d’une histoire de sa provenance et on peut en quelque sorte la retracer.

LEX FRIDMAN : Oh, je vois.

TERENCE TAO : Oui, c’est donc conçu pour la fiabilité. Les IA modernes ne sont pas utilisées, c’est une technologie disjointe. On commence à utiliser des IA en complément de **Lean**. Lorsqu’un mathématicien essaie de programmer des preuves en **Lean**, il y a souvent une étape. Bon, maintenant, je veux utiliser le calcul fondamental pour passer à l’étape suivante. Les développeurs de **Lean** ont donc développé ce projet colossal appelé **Mathlib**, une collection de dizaines de milliers d’informations utiles sur les objets mathématiques. Et quelque part, on y trouve le thème fondamental du calcul, mais il faut le trouver. Donc, souvent, le goulot d’étranglement est la recherche de lemmes. Il y a un outil dont on sait qu’il existe quelque part et qu’il faut trouver, Il existe donc différents moteurs de recherche spécialisés pour **Mathlib**, mais il existe maintenant ces grands modèles de langage qui permettent de dire “J’ai besoin du calcul fondamental à ce stade”. Et c’est comme, par exemple, quand je code : j’ai GitHub Copilot installé comme plugin dans mon IDE, et il analyse mon texte, voit ce dont j’ai besoin et me le fournit. Je pourrais même taper : “maintenant je dois utiliser le théorème fondamental du calcul”. Il peut alors suggérer : “Ok, essaie ça”, et peut-être que les 25 premières fois, ça fonctionne parfaitement. Et puis les 10, 15 fois suivantes, ça ne fonctionne pas tout à fait, mais c’est assez proche pour que je puisse dire : “Ah oui, si je change ça ici et là, ça fonctionnera”. Et puis, environ la moitié du temps, ça me donne un résultat complètement nul. Mais les gens commencent à utiliser des IA un peu plus avancées, principalement au niveau de la saisie semi-automatique sophistiquée, où on peut taper la moitié d’une ligne de preuve et elle trouve la suite et vous la dit.

LEX FRIDMAN : Oui, mais une fantaisie, particulièrement une Fantasy avec une le F majuscule, permettrait de supprimer une partie des frictions que les mathématiciens pourraient ressentir lorsqu'ils passent du stylo et du papier à la formalisation.

TERENCE TAO : Oui, oui. Donc, actuellement, j'estime que l'effort, le temps et les efforts nécessaires pour formaliser une preuve sont environ dix fois supérieurs à ceux nécessaires pour l'écrire. Oui, donc c'est faisable, mais c'est ennuyeux.

LEX FRIDMAN : Mais est-ce que ça ne gâche pas tout le plaisir à être mathématicien que d'avoir ce collègue pédant ?

TERENCE TAO : Oui, si c'était le seul aspect, d'accord. Mais bon, il y a des cas où il est plus agréable de procéder de manière formelle. J'ai donc formalisé un théorème, et une certaine constante 12 est apparue dans l'énoncé final. Ce 12 devait donc être appliqué tout au long de la démonstration, et il fallait tout vérifier, pour que tous les autres nombres soient cohérents avec ce nombre final 12. Nous avons donc rédigé un article sur ce théorème avec ce nombre 12, et quelques semaines plus tard, quelqu'un a dit "Oh, on peut vraiment améliorer ça. On peut passer de 12 à 11 en retravaillant certaines de ces étapes." Et lorsque cela se produit avec un crayon et du papier, chaque fois que vous modifiez un paramètre, vous devez vérifier ligne par ligne que chaque ligne de votre preuve fonctionne toujours. Et il peut y avoir des subtilités dont vous n'aviez pas tout à fait conscience, comme certaines propriétés du nombre 12 que vous n'aviez même pas conscience d'exploiter. Une preuve peut donc échouer à un endroit subtil. Nous avons donc formalisé la preuve avec cette constante 12. Et puis, lorsque ce nouvel article est sorti, nous avons dit : "Oh, il a fallu environ trois semaines pour formaliser cette preuve originale et une vingtaine de personnes." J'ai dit : "Oh, mais maintenant, essayons de faire passer cette constante de 12 à 11." Avec *Lean*, vous pouvez remplacer 12 par 11 dans votre théorème principal. Vous exécutez le compilateur et, sur les milliers de lignes de code existantes, 90 % fonctionnent encore. Quelques-unes sont en rouge. Je ne peux pas justifier ces étapes, mais cela permet d'identifier immédiatement les lignes à modifier.

Mais vous avez la possibilité de tout ignorer, ce qui permet d'"exécuter" la preuve. Et si vous programmez correctement, avec de bonnes pratiques, la plupart de vos lignes ne seront pas rouges. Et il y aura juste quelques endroits où, si vous ne codez pas vos constantes en dur, mais que vous utilisez des tactiques intelligentes, vous pourrez localiser les éléments à modifier et les modifications nécessiteront une courte période. Donc, en un jour ou deux, nous avons mis à jour notre preuve, car c'est un processus très rapide. Vous apportez une modification. Il y a maintenant dix choses qui ne fonctionnent pas. Pour chacune d'elles, vous apportez une modification. Et maintenant, il y en a cinq autres qui ne fonctionnent pas. Mais le processus converge beaucoup plus facilement qu'avec un stylo et du papier.

LEX FRIDMAN : Donc, ce vous venez d'évoquer concerne l'écriture. Êtes-vous capable de lire du *Lean* ? Par exemple, si quelqu'un d'autre vous envoie une preuve, pouvez-vous dire de quoi il s'agit, par simple lecture du papier contenant du *Lean* ?

TERENCE TAO : Oui, les preuves sont plus longues, mais chaque partie est plus facile à lire. Par exemple, si je prends un devoir de mathématiques, que je saute à la page 27, que je regarde le

sixième paragraphe dans lequel il y a une ligne de texte mathématique, je n'arrive souvent pas à la lire immédiatement car elle suppose diverses définitions, auxquelles je dois revenir. Or, cette définition a été donnée peut-être dix pages plus tôt, et les preuves sont dispersées un peu partout, ce qui oblige à lire de manière assez séquentielle. Ce n'est pas comme, par exemple, un roman, où, en théorie, on pourrait l'ouvrir à mi-chemin et commencer à lire. Le contexte est très riche.

Mais avec une preuve en **Lean**, si vous placez votre curseur sur une ligne de code, chaque objet, vous pouvez le survoler et le logiciel vous indiquera sa nature, son origine et sa justification. Vous pouvez remonter à la source bien plus facilement qu'en feuilletant un devoir de mathématiques. **Lean** permet notamment de collaborer sur des preuves à une échelle vraiment immense, ce qui était impossible auparavant. Traditionnellement, avec du papier et un crayon, pour collaborer avec un autre mathématicien, on le fait soit au tableau noir, ce qui permet une réelle interaction, soit par e-mail ou autre, il faut segmenter. Je vais terminer la section trois, vous passerez à la section quatre, mais vous ne pourrez pas vraiment travailler simultanément sur le même sujet. Mais avec **Lean**, on peut essayer de formaliser une partie de la preuve et dire "Je suis bloqué à la ligne 67, je dois prouver ceci, mais ça ne fonctionne pas vraiment. Voici les trois lignes de code qui me posent problème." Mais comme tout le contexte est là, quelqu'un d'autre peut dire "Oh, d'accord, je comprends ce que vous devez faire. Vous devez appliquer telle astuce ou tel outil", et vous pouvez avoir des conversations extrêmement précises. Grâce à **Lean**, je peux collaborer avec des dizaines de personnes à travers le monde, dont la plupart ne se sont jamais rencontrées en personne, et je ne sais peut-être même pas si leurs preuves sont fiables, mais **Lean** me donne un certificat de confiance, ce qui me permet de faire des mathématiques avec ce degré de confiance.

LEX FRIDMAN : Il y a donc tellement de questions intéressantes. Premièrement, vous êtes connu pour être un excellent collaborateur. Alors, quelle est la bonne approche pour résoudre un problème mathématique complexe en collaboration ? Est-ce que vous pratiquez une approche "diviser pour régner", ou vous concentrez-vous sur un aspect particulier et vous faites du brainstorming ?

TERENCE TAO : Il y a toujours un brainstorming préalable. Oui. Donc, dans les projets de recherche en mathématiques, par nature, au début, on ne sait pas vraiment comment résoudre le problème. Ce n'est pas comme un projet d'ingénierie où la théorie est établie depuis des décennies et où sa mise en œuvre constitue la principale difficulté. Il faut même trouver la bonne voie. C'est ce que j'ai dit à propos de la triche. C'est comme, pour revenir à l'analogie de la construction d'un pont : supposons d'abord que vous ayez un budget illimité et une main-d'œuvre illimitée, etc. Pouvez-vous construire ce pont ? Bon, maintenant, avec un budget illimité et une main-d'œuvre limitée. Pouvez-vous faire cela, etc. ? Bien sûr, aucun ingénieur ne peut réellement le faire. Ils ont des exigences fixes. Oui, il y a toujours ce genre de jam sessions au début, où l'on essaie toutes sortes de choses folles, et on fait toutes ces hypothèses irréalistes qu'on prévoit de corriger plus tard. On essaie de voir s'il existe ne serait-ce qu'une ébauche d'approche qui pourrait fonctionner, et on espère ensuite décomposer le problème en sous-problèmes plus petits, dont on ne sait pas comment s'y prendre, mais on se concentre ensuite sur ces sous-problèmes, et parfois, certains collaborateurs sont plus doués pour travailler sur certains points. L'un des théorèmes pour lesquels je suis connu est un théorème de Ben Green, aujourd'hui appelé théorème de Green-Tao. Il affirme qu'on peut trouver des suites de n'importe quelle longueur de nombres premiers en progressions arithmétiques. C'est donc une modification du théorème de Szemerédi. Notre collaboration s'explique par le fait

que Ben avait déjà démontré un résultat similaire pour les progressions de longueur trois. Il a montré que des ensembles comme l'ensemble des nombres premiers contiennent de très nombreuses progressions de longueur trois. Et même des sous-ensembles de nombres premiers, certains sous-ensembles en contiennent. Mais ses techniques ne fonctionnaient que pour les progressions de longueur trois. Elles ne fonctionnaient pas pour les progressions plus longues. Mais je disposais de ces techniques issues de la théorie ergodique, avec laquelle j'avais joué, et je les connaissais mieux que Ben à l'époque. Ainsi, si je pouvais justifier certaines propriétés aléatoires d'un ensemble relatif aux nombres premiers, par exemple en présence d'une certaine condition technique, si je pouvais la justifier, si Ben pouvait me fournir ce fait, je pourrais conclure le théorème. Mais j'ai posé une question très difficile en théorie des nombres, et il m'a répondu "Il n'y a aucun moyen de prouver cela." Il m'a donc demandé "Pouvez-vous prouver votre partie du théorème en utilisant une hypothèse plus faible, que j'aie la possibilité de prouver ?" Il a proposé une hypothèse qu'il pouvait prouver, mais trop faible pour moi. Je ne pouvais pas l'utiliser. Il y avait donc une conversation qui allait et venait.

LEX FRIDMAN : Différentes ruses aussi.

TERENCE TAO : Oui, je voulais ruser davantage, il voulait ruser moins. Mais finalement, nous avons trouvé une propriété qu'il pourrait, A, prouver, et B, utiliser, et ensuite nous pourrions prouver notre point de vue. Il y a toutes sortes de dynamiques. Chaque collaboration a sa propre histoire. Il n'y en a pas deux identiques.

LEX FRIDMAN : Et puis, de l'autre côté de la médaille, comme vous l'avez mentionné avec la programmation **Lean**, c'est presque une autre histoire, car vous pouvez créer, je pense que vous avez mentionné une sorte de plan pour un problème, et ensuite vous pouvez vraiment faire un "diviser pour régner" avec **Lean**, où vous travaillez sur des parties séparées et ils utilisent le vérificateur de preuve du système informatique, essentiellement pour s'assurer que tout est correct en cours de route.

TERENCE TAO : Oui. Cela rend tout compatible et fiable. Actuellement, seuls quelques projets mathématiques peuvent être découpés de cette manière. En l'état actuel des connaissances, l'essentiel de l'activité **Lean** consiste à formaliser des preuves déjà prouvées par des humains. Un article de mathématiques est en quelque sorte un plan directeur. Il s'agit de prendre un énoncé complexe, comme un grand théorème, et de le décomposer en 100 petits énoncés, souvent rédigés avec suffisamment de détails pour que chacun puisse être formalisé directement. Un plan directeur est comme une version très méticuleuse d'un article, où chaque étape est expliquée avec le plus de détails possible, en essayant de la rendre autonome ou dépendante d'un nombre très précis d'énoncés antérieurs prouvés, de sorte que chaque nœud de ce graphe engendré à partir du plan directeur puisse être traité indépendamment des autres, sans même avoir besoin de connaître le fonctionnement global. C'est donc comme une chaîne logistique moderne. Si vous souhaitez créer un smartphone ou un autre objet complexe, aucune personne ne peut construire un seul objet, mais vous pouvez avoir des spécialistes qui, s'ils reçoivent des spécifications et des composants d'une autre entreprise, peuvent les combiner pour former un composant légèrement plus grand.

LEX FRIDMAN : Je pense que c'est une possibilité vraiment excitante, car si vous parvenez à trou-

ver des problèmes qui pourraient être décomposés de cette façon, vous pourriez avoir des milliers de contributeurs, n'est-ce pas ? Les preuves pourraient être entièrement distribuées.

TERENCE TAO : Oui, oui, oui. Je vous ai déjà parlé de la distinction entre mathématiques théoriques et expérimentales. À l'heure actuelle, la plupart des mathématiques sont théoriques et seule une infime partie est expérimentale. Je pense que la plateforme **Lean** et d'autres outils logiciels, comme **GitHub** ou d'autres outils similaires, permettront aux mathématiques expérimentales de se développer bien plus largement qu'aujourd'hui.

Actuellement, si vous souhaitez explorer mathématiquement un modèle mathématique, vous avez besoin de code pour l'écrire. Il existe parfois des logiciels de calcul formel, mais souvent, il s'agit d'un seul mathématicien qui code énormément en **Python** ou autre. Le codage étant une activité très sujette aux erreurs, il n'est pas pratique de permettre à d'autres personnes de collaborer avec vous pour écrire des modules pour votre code, car si l'un d'eux présente un bug, l'ensemble devient peu fiable. On obtient donc ce code spaghetti sur mesure, écrit non pas par des programmeurs professionnels, mais par des mathématiciens, et il est lourd et lent. De ce fait, il est difficile de produire des résultats expérimentaux en masse. Mais avec **Lean**, je commence déjà des projets où nous ne nous contentons pas d'expérimenter avec des données, mais avec des preuves. J'ai donc ce projet appelé "Projet Théories Équationnelles". En gros, nous avons généré environ 22 millions de petits problèmes d'algèbre abstraite. Je devrais peut-être revenir en arrière et vous expliquer en quoi consiste le projet : l'algèbre abstraite étudie des opérations comme la multiplication et l'addition, ainsi que leurs propriétés abstraites. La multiplication, par exemple, est commutative. $x \times y$ est toujours égal à $y \times x$, du moins pour les nombres. Elle est aussi associative : $(x \times y) \times z$ est identique à $x \times (y \times z)$. Ces opérations obéissent donc à certaines lois, auxquelles d'autres opérations n'obéissent pas. Par exemple, $x \text{ times } x$ n'est pas toujours égal à x , cette loi n'est donc pas toujours vraie. Ainsi, une opération donnée obéit à certaines lois et pas à d'autres. Nous avons donc généré environ 4 000 lois possibles de l'algèbre, que certaines opérations peuvent satisfaire. Notre question est quelles lois en impliquent d'autres ? Par exemple, la commutativité implique-t-elle l'associativité ? La réponse est non, car il s'avère qu'on peut décrire une opération qui obéit à la loi commutative, mais pas à la loi associative. Ainsi, en donnant un exemple, vous pouvez montrer que la commutativité n'implique pas l'associativité, mais que d'autres lois impliquent d'autres lois par substitution, et ainsi de suite. Vous pouvez ensuite en formuler une preuve algébrique. Nous examinons donc toutes les paires entre ces 4 000 lois, et il y en a environ 22^1 millions de ces paires. Et pour chaque paire, nous demandons "Cette loi implique-t-elle cette loi ? Si oui, donnez-en une preuve. Sinon, donnez un contre-exemple. Donc, 22 millions de problèmes, chacun pouvant être donné à un étudiant en algèbre de premier cycle, l'étudiant ayant de bonnes chances de le résoudre. Bien qu'il y ait beaucoup de problèmes, au moins 22 millions, il y en a une centaine qui sont vraiment difficiles, mais beaucoup sont faciles. Le projet consistait simplement à déterminer le graphe complet des implications, lesquels impliquent lesquels.

LEX FRIDMAN : C'est un projet incroyable, soit dit en passant. Une excellente idée, un excellent test à grande échelle de ce dont nous avons parlé. C'est remarquable.

TERENCE TAO : Oui, donc ça n'aurait pas été faisable. L'état de l'art dans la littérature se limi-

¹16 ?

tait à 15 équations et à leur application. C'est la limite de ce qu'un article rédigé par un humain peut faire. Il faut donc étendre cela. Il faut donc recourir au crowdsourcing (codage à plusieurs), mais il faut aussi faire confiance à l'ordinateur : personne ne peut vérifier seul ces 22 millions de preuves. Il fallait qu'elles soient informatisées. Et c'est devenu possible uniquement grâce à **Lean**. Nous espérons également utiliser beaucoup d'IA. Le projet est donc presque terminé. Sur ces 22 millions, toutes sauf deux ont été réglées.

LEX FRIDMAN : Waouh !

TERENCE TAO : En fait, pour ces deux-là, nous avons une preuve papier pour l'une des deux, et nous sommes en train de finir l'autre. D'ailleurs, ce matin, je travaillais à la terminer. Nous avons donc presque terminé.

LEX FRIDMAN : C'est incroyable.

TERENCE TAO : Oui, fantastique.

LEX FRIDMAN : Combien de personnes avez-vous pu réunir ?

TERENCE TAO : Environ 50, ce qui en mathématiques est considéré comme un nombre énorme.

LEX FRIDMAN : C'est un nombre de collaborateurs énorme. C'est fou !

TERENCE TAO : Oui. Nous aurons donc un article de 50 auteurs et une longue annexe détaillant qui a contribué à quoi.

LEX FRIDMAN : Voici une question intéressante. Sans vouloir en parler de manière plus générale. Avec ce vivier de personnes, est-il possible d'organiser les contributions par niveau d'expertise ? Bon, je pose beaucoup de questions bêtes, mais j'imagine un groupe d'humains et peut-être, à l'avenir, des IA.

Pourrait-on imaginer une situation de type classement ELO, comme au jeu d'échecs ?

TERENCE TAO : La beauté de ces projets **Lean** est que vous obtenez automatiquement toutes ces données. Tout a donc été téléchargé sur **GitHub**, et **GitHub** enregistre les contributions, ce qui permet de générer des statistiques ultérieurement. On pourrait dire "Oh, telle personne a contribué à tant de lignes de code, ou autre." Ce sont des indicateurs très approximatifs. Je ne voudrais surtout pas... Cela pourrait être intégré aux évaluations de titularisation. Mais je pense que dans l'informatique d'entreprise, on utilise déjà certaines de ces mesures pour évaluer la performance d'un employé. Encore une fois, c'est une direction que les universitaires craignent un peu. Nous n'aimons pas tellement les indicateurs.

LEX FRIDMAN : Et pourtant, les universitaires utilisent des indicateurs, ils utilisent simplement des indicateurs obsolètes : le nombre d'articles.

TERENCE TAO : Oui, oui, c'est vrai.

LEX FRIDMAN : J'ai l'impression que cette mesure, bien qu'imparfaite, va plutôt dans la bonne direction, n'est-ce pas ?

TERENCE TAO : Oui.

LEX FRIDMAN : C'est intéressant C'est une mesure très intéressante.

TERENCE TAO : Oui, je pense que c'est intéressant à étudier. On peut étudier si ces indicateurs sont plus efficaces. Il existe un problème appelé la loi de Goodhart. Si une statistique est utilisée pour inciter à la performance, elle devient un outil de manipulation et ce n'est alors plus une mesure utile.

LEX FRIDMAN : Oh, les humains sont toujours partants.

TERENCE TAO : Oui, oui, Non, c'est rationnel. Donc, pour ce projet, nous avons fait une auto-évaluation. Il existe en fait des catégories standard dans les sciences pour déterminer les types de contributions. Il y a donc ce concept de validation, de ressources, de codage, etc. Il y a donc une liste standard d'environ 12 catégories, et nous demandons simplement à chaque contributeur (il existe une grande matrice de tous les auteurs et de toutes les catégories) de cocher les cases où il pense avoir contribué, et de donner une idée générale. Vous avez donc codé et fourni des données, mais vous n'avez effectué aucune vérification papier ni autre. Et je pense que cela fonctionne. Traditionnellement, les mathématiciens classent simplement les travaux par ordre alphabétique. Nous n'avons donc pas cette tradition, comme dans les sciences, d'auteur principal et de second auteur, etc., dont nous sommes fiers. Nous accordons un statut égal à tous les auteurs, mais cela ne s'adapte pas vraiment à cette ampleur. Il y a dix ans, j'ai participé à des projets appelés Polymath. Il s'agissait de mathématiques participatives, mais sans la composante *Lean*. Il y avait donc des limites : il fallait un modérateur humain pour vérifier la validité de toutes les contributions reçues. C'était un véritable goulot d'étranglement. Malgré cela, nous avions des projets d'une dizaine d'auteurs, mais nous avons décidé à l'époque de ne pas essayer de déterminer qui faisait quoi, mais d'utiliser un pseudonyme unique. Nous avons donc créé un personnage fictif appelé D. H. J. Polymath, dans l'esprit de Bourbaki. Bourbaki est le pseudonyme d'un célèbre groupe de mathématiciens du XXe siècle. L'article a donc été rédigé sous un pseudonyme, et aucun de nous n'a été crédité. Cela s'est avéré peu judicieux pour plusieurs raisons. Premièrement, si vous vouliez être candidat à un poste permanent, vous ne pouviez pas utiliser cet article tel que vous l'aviez soumis dans vos publications, car vous n'aviez pas de crédit officiel. Deuxièmement, nous avons compris bien plus tard que lorsque les gens faisaient référence à ces projets, ils faisaient naturellement référence à la personne la plus célèbre qui y avait participé. Ah, donc c'était le Projet Polymath de Tim Gowers, et celui de Terence Tao, sans parler des 19 autres personnes impliquées. On essaie donc quelque chose de différent cette fois-ci. où tout le monde est auteur, mais nous aurons une annexe avec cette matrice et nous verrons comment cela fonctionne.

LEX FRIDMAN : Ces deux projets sont donc incroyables. Le simple fait que vous soyez impliqués dans des collaborations aussi importantes. Mais il me semble avoir vu une conférence de Kevin Buzzard sur le langage de programmation *Lean* il y a quelques années, et vous disiez

que cela pourrait être l'avenir des mathématiques. C'est donc passionnant que vous embrassiez, vous, l'un des plus grands mathématiciens du monde, ce qui semble être le fondement de l'avenir des mathématiques. Je dois donc vous interroger sur l'intégration de l'IA dans tout ce processus. **AlphaProof** de **DeepMind** a été entraîné par apprentissage par renforcement sur des preuves formelles **Lean**, réussies et ratées, de problèmes IMO. C'est donc une sorte de lycée de haut niveau.

TERENCE TAO : de très haut niveau.

LEX FRIDMAN : Oui, des problèmes de mathématiques de très haut niveau, de niveau lycée. Que pensez-vous du système et quel est l'écart entre ce système, capable de résoudre des problèmes de niveau lycée, et ceux de niveau master ?

TERENCE TAO : Oui, la difficulté augmente exponentiellement avec le nombre d'étapes nécessaires à la preuve. C'est une véritable explosion combinatoire. Le problème des grands modèles de langage, c'est qu'ils font des erreurs. Ainsi, si une preuve comporte 20 étapes et que vous en avez 10 à chaque étape qui vont dans la mauvaise direction, il est extrêmement improbable qu'elle atteigne son objectif.

LEX FRIDMAN : En fait, juste pour prendre une petite tangente ici, à quel point est-il difficile de faire correspondre le langage naturel au langage formel ?

TERENCE TAO : Oh oui, c'est extrêmement difficile en fait. Le langage naturel est très tolérant aux pannes. On peut faire quelques petites erreurs grammaticales et un locuteur de la deuxième langue peut comprendre ce que l'on dit. Mais en langage formel, une petite erreur suffit à rendre le tout absurde. Même la traduction d'un langage formel en un autre est très difficile. Il existe différentes préfaces incompatibles entre ces langues. Il y a le langage **Lean**, mais aussi le langage **Coq**, le langage **Isabelle**, etc. La traduction d'un langage formel en un autre est un problème irrésolu, fondamentalement irrésolu.

LEX FRIDMAN : C'est fascinant. D'accord, mais une fois qu'on a un langage formel, ils utilisent leur modèle entraîné par apprentissage réel, donc, quelque chose comme **AlphaZero**, qu'ils utilisaient pour essayer de fournir des preuves. Ils ont aussi un modèle. Je crois que c'est un modèle distinct pour les problèmes géométriques. Qu'est-ce qui vous impressionne dans ce système, et quel est, selon vous, l'écart ?

TERENCE TAO : Oui, oui, nous avons parlé plus tôt de choses extraordinaires qui, avec le temps, deviennent plus ou moins normales. Donc, d'une certaine manière, la géométrie est un problème soluble.

LEX FRIDMAN : C'est vrai, c'est vrai. C'est toujours aussi beau.

TERENCE TAO : Oui, oui, c'est un excellent travail qui montre ce qu'il est possible de faire. L'approche n'est pas encore applicable à grande échelle. Il faut trois jours de temps serveur **Google** pour résoudre un problème de mathématiques de niveau lycée. Il y a un problème. Ce n'est pas une perspective évolutive, surtout avec l'augmentation exponentielle de la complexité.

LEX FRIDMAN : Il faut mentionner qu'ils ont obtenu une médaille d'argent.

TERENCE TAO : L'équivalent de...

LEX FRIDMAN : L'équivalent d'une performance médaillée d'argent.

TERENCE TAO : Tout d'abord, ils ont pris beaucoup plus de temps que prévu, et ils ont bénéficié de l'aide des humains pour la formalisation, mais aussi pour obtenir la note maximale pour la solution, qui, je suppose, est formellement vérifiée. C'est donc normal. Des efforts sont en cours, et il y aura bientôt une proposition pour organiser une olympiade mathématique d'IA où, parallèlement aux problèmes de l'olympiade, les IA se verront également proposer les mêmes problèmes avec la même période de temps. Les résultats devront être notés par les mêmes juges, ce qui signifie qu'ils devront être rédigés en langage naturel plutôt qu'en langage formel.

LEX FRIDMAN : Oh, j'espère que ça arrivera.

TERENCE TAO : À mon avis, ça n'arrivera pas. Les performances ne sont pas assez bonnes dans le délai imparti. Mais il existe des compétitions plus modestes. Certaines où la réponse est un nombre plutôt qu'une preuve longue. Et les IA sont bien plus performantes pour les problèmes avec une réponse numérique spécifique, car il est facile d'y appliquer l'apprentissage par renforcement. Que vous ayez la bonne réponse ou la mauvaise, c'est un signal très clair. Mais une preuve longue doit être soit formelle, et l'expert peut alors l'approuver ou la rejeter, soit informelle. Mais il faut alors un humain pour la noter. Et si vous essayez de réaliser des milliards d'exécutions d'apprentissage par renforcement, vous ne pouvez pas embaucher suffisamment de personnes pour les noter. C'est déjà assez difficile pour les derniers modèles de langage d'appliquer l'apprentissage par renforcement uniquement sur le texte standard que les gens reçoivent. Mais maintenant, si vous engagez vraiment du personnel, pas seulement pour approuver ou rejeter, mais pour vérifier le résultat mathématiquement, oui, c'est trop cher.

LEX FRIDMAN : Si l'on explore simplement ce futur possible, quelle est la particularité des humains en mathématiques, qui explique pourquoi l'IA pourrait ne pas parvenir à les imiter avant un certain temps ? Inventer de nouvelles théories, formuler de nouvelles conjectures plutôt que de les prouver, construire de nouvelles abstractions, de nouvelles représentations, peut-être une IA à la Terence, capable d'identifier de nouvelles connexions entre des domaines disparates ?

TERENCE TAO : C'est une bonne question. Je pense que la nature du travail des mathématiciens a beaucoup évolué au fil du temps. Il y a 1000 ans, les mathématiciens devaient calculer la date de Pâques. Ils devaient faire des calculs très complexes, mais tout est automatisé depuis des siècles. Nous n'en avons plus besoin. Autrefois, ils naviguaient, faisaient de la navigation sphérique, de la trigonométrie sphérique, pour naviguer entre l'ancien et le nouveau monde. Je pense donc qu'un calcul très complexe, encore une fois, peut être automatisé. Même une grande partie des mathématiques de premier cycle, même avant l'IA, un outil comme **Wolfram Alpha**, par exemple, n'est pas un modèle de langage, mais peut résoudre de nombreux problèmes mathématiques de premier cycle. Du côté calculatoire, vérifier des choses courantes, comme avoir un problème, et je

dis “Voici un problème d’équations aux dérivées partielles, pourriez-vous le résoudre en utilisant l’une des 20 normes techniques ?”. Et l’IA dirait : “Oui, j’ai essayé les 20, voici les 100 permutations différentes et voici mes résultats”. Et ce genre de chose, je pense que ça fonctionnera très bien. Une sorte de mise à l’échelle qui, une fois un problème résolu, force l’IA à attaquer 100 problèmes adjacents. Des choses que les humains font encore. Donc, là où l’IA a vraiment du mal actuellement, c’est d’une part de savoir quand elle fait une erreur, et d’autre part, l’IA n’est pas capable de se dire : “Oh, je vais résoudre ce problème. Je vais le diviser en deux cas. Je vais essayer cette technique.”. Et parfois, si vous avez de la chance et que c’est un problème simple, c’est la bonne technique et l’IA pourrait le résoudre. Et parfois, elle aurait un problème. l’IA proposerait une approche totalement absurde, mais qui ressemble à une preuve. C’est donc un aspect agaçant des mathématiques générées par les LLM. Nous avons eu des mathématiques générées par des humains de très mauvaise qualité, comme des soumissions de personnes sans formation formelle, etc. Mais si une preuve humaine est mauvaise, on le voit assez vite. Elle comporte des erreurs très élémentaires. En revanche, les preuves générées par l’IA peuvent paraître superficiellement parfaites. Et c’est en partie parce que l’apprentissage par renforcement les a entraînées à produire du texte qui semble correct, ce qui est suffisant pour de nombreuses applications. Les erreurs sont donc souvent très subtiles, et lorsqu’on les repère, elles sont vraiment stupides. Aucun humain n’aurait commis de telles erreurs.

LEX FRIDMAN : Oui, c’est vraiment frustrant en programmation, car je programme beaucoup. Et oui, lorsqu’un humain crée un code de mauvaise qualité, il y a ce qu’on appelle une odeur de code. Ca se voit. On le voit immédiatement, genre, il y a des signes, mais avec l’IA, on génère du code, ...

TERENCE TAO : Les erreurs dont je parle sont inodores.

LEX FRIDMAN : ...Et puis vous avez raison, vous finissez par trouver une chose stupide et évidente qui ressemble simplement à du bon code.

TERENCE TAO : Oui.

LEX FRIDMAN : C’est aussi très délicat et frustrant de travailler pour une raison quelconque.

TERENCE TAO : Oui. Donc l’odorat. Voilà. C’est une propriété humaine, et c’est une odeur mathématique métaphorique. On ne voit pas très bien comment faire pour que l’IA puisse la reproduire. Finalement, si AlphaZero et les autres progressent au go et aux échecs, c’est parce qu’ils ont développé un flair pour les positions au go et aux échecs, percevant que telle position est bonne pour les Blancs, telle autre pour les Noirs. Ils ne peuvent pas expliquer pourquoi, mais ce simple flair leur permet d’élaborer des stratégies. Si les IA acquièrent cette capacité à évaluer la viabilité de certaines stratégies de preuve, elles pourront dire “Je vais essayer de décomposer ce problème en deux sous-tâches plus petites”, et elles pourront dire “Oh, ça a l’air bien. Deux tâches semblent plus simples que la tâche principale, et elles ont quand même de bonnes chances d’être vraies. C’est donc une bonne idée d’essayer” ou bien “Non, vous avez aggravé le problème car chacun des deux sous-problèmes est en réalité plus difficile que le problème initial”, ce qui se produit généralement lorsqu’on tente une chose au hasard. Il est généralement très facile de transformer un problème

en un problème encore plus difficile. Il est très rare de le transformer en un problème plus simple. Alors, si les outils d'IA pouvaient développer leur odorat, ils pourraient peut-être rivaliser avec des mathématiciens de niveau humain.

LEX FRIDMAN : C'est une question difficile, mais il ne s'agit pas de concurrence, mais de collaboration.

TERENCE TAO : C'est vrai.

LEX FRIDMAN : Hypothèse. Si je vous donnais un oracle capable de réaliser certains aspects de ce que vous faites et que vous pouviez simplement collaborer avec lui...

TERENCE TAO : Oui, oui.

LEX FRIDMAN : Que serait cet oracle ? Que souhaiteriez-vous qu'il soit capable de faire ? Aimeriez-vous qu'il soit un vérificateur qui répondrait à la question "Ce code sent-il bon ?", en vous disant quelque chose comme : "Oui, Professeur Tao, c'est la bonne direction, c'est une direction prometteuse et fructueuse."

TERENCE TAO : Oui, oui.

LEX FRIDMAN : Ou préférez-vous qu'il génère des preuves possibles et que vous déterminiez ensuite laquelle est la bonne ? Ou préférez-vous qu'il génère des représentations différentes, des façons totalement différentes d'aborder ce problème ?

TERENCE TAO : Oui, je pense à tout ce qui précède. Une grande partie du problème est que nous ne savons pas utiliser ces outils, car c'est un paradigme. Nous n'avons pas eu par le passé d'assistants suffisamment compétents pour comprendre des instructions complexes et efficaces à grande échelle, mais qui sont également peu fiables. C'est intéressant, subtilement peu fiable, tout en fournissant des résultats de qualité. C'est une combinaison intéressante. Vous travaillez avec des étudiants de troisième cycle qui apprécient ce système, mais pas à grande échelle. Et nous disposons auparavant d'outils logiciels capables de fonctionner à grande échelle, mais de portée très limitée. Il nous faut donc trouver comment les utiliser. Tim Gowers, en fait, a anticipé en 2000 ce que seraient les mathématiques deux décennies et demi plus tard. (*Lex et Terence rient*)

LEX FRIDMAN : C'est drôle.

TERENCE TAO : Oui. Dans son article, il a décrit une sorte de conversation hypothétique entre un assistant mathématique du futur et lui-même. Il essaie de résoudre un problème et ils discutent. Parfois, l'humain propose une idée et l'IA l'évalue ; parfois, l'IA propose une idée et, parfois, un calcul est nécessaire et l'IA dit simplement : "Ok, j'ai vérifié les 100 cas nécessaires." Ou : "Vous avez dit que c'est vrai pour tout n . J'ai vérifié en faisant aller n de 1 à 100 et ça a l'air bien pour l'instant." Ou encore "Attendez, il y a un problème pour $n = 46$." C'est donc une conversation libre où l'on ne sait pas à l'avance où les choses vont aboutir. Mais je pense que les idées sont bonnes, proposées des deux côtés. Des calculs sont proposés des deux côtés. J'ai eu des conversations avec

des IA où je dis : “Ok, nous allons collaborer pour résoudre ce problème mathématique.” Comme je connais déjà la solution, j’essaie de la susciter. Bon, voilà le problème. Je suggère d’utiliser cet outil, et il trouvera cet argument intéressant en utilisant un outil complètement différent, qui finira par s’enfoncer et l’IA finira par dire “Non, non, non, essayez d’utiliser celui-ci”. L’IA aurait pu commencer par utiliser celui-ci, puis revenir à l’outil qu’il voulait utiliser auparavant, et il faudrait le forcer à continuer sur la voie souhaitée. J’aurais pu éventuellement le forcer à fournir la preuve que je voulais, mais c’était comme essayer de rassembler des chats. Et j’ai dû déployer des efforts personnels considérables non seulement pour le stimuler, mais aussi pour vérifier ses résultats, car il y en avait beaucoup. Je sais, par exemple, que s’il y a un problème sur la ligne 17, discuter avec l’IA sera plus épuisant que de le faire sans aide, mais c’est l’état actuel des choses.

LEX FRIDMAN : Je me demande s’il y a un changement de phase qui se produit à un point où l’on n’a plus l’impression d’essayer de rassembler des chats, et peut-être que nous serons surpris de la rapidité avec laquelle ce changement aura lieu.

TERENCE TAO : Je crois. Concernant la formalisation, j’ai déjà mentionné qu’il faut dix fois plus de temps pour formaliser une preuve que pour l’écrire à la main. Grâce à ces outils d’IA modernes et à des outils plus performants, les développeurs **Lean** font un excellent travail en ajoutant de plus en plus de fonctionnalités et en rendant le système plus convivial. On passe de neuf à huit, puis à sept. Bon, ce n’est pas énorme. Mais un jour, ce sera en dessous de un, et c’est le changement de phase, car soudain, il devient logique, lorsqu’on rédige un article, de le rédiger d’abord en **Lean** ou via une IA conversationnelle qui génère du **Lean** à la volée avec soi, et les revues l’acceptent naturellement. Elles proposeront peut-être une évaluation accélérée. Si un article a déjà été formalisé en **Lean**, elles demanderont simplement à l’évaluateur de commenter la pertinence des résultats et leur lien avec la littérature, sans se soucier de leur exactitude, car cela a été certifié. Les articles de mathématiques sont de plus en plus longs et il est de plus en plus difficile d’obtenir une bonne évaluation pour les articles très longs, sauf s’ils sont vraiment importants. La formalisation arrive à point nommé pour résoudre ce problème.

LEX FRIDMAN : Plus cela devient facile grâce aux outils et à tous les autres facteurs, plus on en verra davantage, comme **Mathlib** qui connaîtra une croissance potentiellement exponentielle. C’est un cercle vertueux, d’accord,

TERENCE TAO : L’adoption de $\text{\LaTeX}$ a été un tournant majeur dans ce domaine. $\text{\LaTeX}$ est le langage de composition que tous les mathématiciens utilisent aujourd’hui. Autrefois, on utilisait toutes sortes de traitements de texte, de machines à écrire, etc., mais à un moment donné, $\text{\LaTeX}$ est devenu plus facile à utiliser que tous ses concurrents et les gens ont adopté $\text{\LaTeX}$ en quelques années. C’était un véritable bouleversement.

LEX FRIDMAN : C’est une question un peu folle, mais en quelle année ? À quelle distance sommes-nous d’un système d’IA collaborant sur une preuve qui remporterait la médaille Fields, donc, à ce niveau ?

TERENCE TAO : D’accord. Cela dépend du niveau de collaboration.

LEX FRIDMAN : Partageons le mérite d'obtenir la médaille Fields, donc moitié-moitié entre l'humain et l'IA.

TERENCE TAO : J'imagine déjà qu'un article primé bénéficierait d'une assistance par IA. La saisie semi-automatique, je l'utilise. Elle accélère ma propre rédaction. On peut avoir un théorème, une preuve, et cette preuve comporte trois cas. J'écris la preuve du premier cas, et la saisie semi-automatique me suggère simplement comment la preuve du second cas pourrait fonctionner. Et c'est tout à fait exact. C'est super. L'outil de saisie automatique m'a fait gagner 5 à 10 minutes de saisie.

LEX FRIDMAN : Mais dans ce cas, le système d'IA n'obtient pas la médaille Fields. (*rires*)

TERENCE TAO : Non.

LEX FRIDMAN : On parle de 20 ans, 50 ans, 100 ans ? Qu'en pensez-vous ?

TERENCE TAO : D'accord, j'ai donc publié une prédiction. D'ici 2026, soit l'année prochaine, il y aura des collaborations mathématiques avec l'IA. Il ne s'agira donc pas de médailles Fields, mais de véritables articles de recherche.

LEX FRIDMAN : Comme les idées publiées qui sont en partie générées par l'IA.

TERENCE TAO : Peut-être pas les idées, mais au moins certains calculs, certaines vérifications.

LEX FRIDMAN : Est-ce que cela s'est déjà produit ?

TERENCE TAO : C'est déjà arrivé, oui. Certains problèmes ont été résolus par un processus complexe dialoguant avec l'IA pour proposer des solutions. L'humain essaie, puis revient sans succès. Mais il pourrait proposer une idée différente. C'est difficile à démêler précisément. Il y a certainement des résultats mathématiques qui n'auraient pu être obtenus que grâce à la collaboration d'un mathématicien et d'une IA, mais il est difficile d'en démêler le mérite. Ces outils ne reproduisent pas toutes les compétences mathématiques, mais ils peuvent en reproduire un pourcentage non négligeable, 30 ou 40 %, afin de combler les lacunes. Le codage est un bon exemple. Coder en `Python` est pénible pour moi. Je ne suis ni natif ni programmeur professionnel, mais avec l'IA, le coût de friction est considérablement réduit. Ce qui comble ce défaut, me concernant, c'est le fait que l'IA devient de plus en plus performante en analyse documentaire. Il y a toujours un problème des références hallucinatoires inexistantes, mais je pense que c'est un problème résoluble. Si vous vous entraînez correctement et vérifiez sur Internet, vous devriez d'ici quelques années trouver le lemme dont vous avez besoin et demander à l'IA : "Quelqu'un a-t-il déjà prouvé ce lemme ?" Il exécutera alors une recherche web sophistiquée avec une IA et vous dira : "Oui, il y a six articles où quelque chose de similaire est démontré." Vous pouvez les lui demander tout de suite et il vous donnera les six articles, dont un peut-être est légitime et pertinent, un autre existe mais n'est pas pertinent et quatre sont hallucinatoires. Son taux de réussite est actuellement non nul, mais il y a tellement de bêtises, le rapport signal/bruit est si faible qu'il est particulièrement utile lorsqu'on connaît déjà un peu la littérature et qu'il est plus rapide de se rappeler le nom d'un article parce

qu'il était ancré dans mon subconscient.

LEX FRIDMAN : Versus : l'IA peut vous aider à découvrir de nouvelles choses dont vous n'étiez même pas conscient mais qui contiennent la citation correcte.

TERENCE TAO : Oui, ça peut arriver parfois, mais quand ça arrive, c'est enterré dans une liste d'options qui sont de mauvaises options.

LEX FRIDMAN : Je veux dire que pouvoir générer automatiquement une section de travail connexe qui est correcte, c'est en fait une belle chose qui pourrait être un autre changement de phase, car cela attribue le crédit correctement.

TERENCE TAO : Oui.

LEX FRIDMAN : Cela vous permet de sortir des silos de pensée.

TERENCE TAO : Attention, il y a un obstacle majeur à franchir en ce moment. C'est comme pour les voitures autonomes. La marge de sécurité doit être très élevée pour que ce soit réalisable. Donc oui, il y a un problème de dernière minute avec beaucoup d'applications d'IA on peut développer des outils qui fonctionnent 80 % du temps, et ne fonctionnent pas bien seulement 20% du temps, mais ce n'est toujours pas suffisant. Et c'est même pire que bon à certains égards.

LEX FRIDMAN : Une autre façon de poser la question de la médaille Fields est de vous demander : "En quelle année pensez-vous vous réveiller et être vraiment surpris de lire le titre annonçant une avancée majeure de l'IA". L'IA n'aime pas la médaille Fields, mais pour l'hypothèse de Riemann, est-ce que ce genre de phénomène pourrait se produire ?...

TERENCE TAO : Oui. Cette décennie, je la vois bien faire une conjecture entre deux choses que les gens pensaient sans rapport.

LEX FRIDMAN : Oh, intéressant. Générer une conjecture qui est une belle conjecture.

TERENCE TAO : Oui. Et il y a de réelles chances que cela soit juste et pertinent.

LEX FRIDMAN : Parce que c'est faisable, je suppose. Mais où sont les données ? Ce serait vraiment incroyable.

TERENCE TAO : Les modèles actuels ont beaucoup de mal. En d'autres termes, les physiciens rêvent de faire découvrir de nouvelles lois de la physique à l'IA. Ce rêve, c'est de lui fournir toutes ces données, et que l'IA propose un nouveau modèle jamais observé auparavant. Mais en réalité, même l'état actuel de la technique peine à découvrir d'anciennes lois de la physique à partir des données. Ou, s'il y parvient, il existe un risque important de contamination. Il y a un risque que l'IA y parvienne uniquement parce que, quelque part dans cet apprentissage, elle connaissait la loi de Boyle ou la loi que l'on tente de reconstruire. Cela s'explique en partie par le manque de données d'apprentissage appropriées. Donc, pour les lois de la physique, nous n'avons pas un

million d'univers différents avec un million de lois de la nature différentes. Une grande partie de ce qui nous manque en mathématiques réside dans l'espace négatif. Nous avons donc publié des hypothèses que les chercheurs ont pu prouver, des conjectures qui ont fini par être vérifiées, ou peut-être des contre-exemples produits. Mais nous ne disposons pas de données sur les propositions qui ont été faites, et c'est une bonne chose à essayer. Mais les gens ont vite compris que c'était une mauvaise conjecture et se sont dit : "Oh, mais nous devrions modifier notre affirmation pour la rendre plus plausible." Il y a un processus d'essais et d'erreurs qui fait partie intégrante de la découverte mathématique humaine, et que nous n'enregistrons pas, car c'est gênant. Nous faisons des erreurs mais nous ne publions que nos réussites.

Et l'IA n'a pas accès à ces données pour s'entraîner. Je plaisante parfois en disant que l'IA doit faire des études supérieures et suivre des cours, faire ses devoirs, assister aux permanences, commettre des erreurs, obtenir des conseils pour les corriger et en tirer des leçons.

LEX FRIDMAN : Permettez-moi de vous interroger, si vous le permettez, sur Grigori Perelman. Vous avez mentionné qu'il faut être prudent dans son travail et qu'il faut veiller à ne pas se laisser complètement envahir par un problème. Vous êtes simplement passionné par le problème et vous ne pouvez vous reposer tant que vous ne l'avez pas résolu. Mais vous vous êtes empressé d'ajouter que cette approche peut parfois s'avérer très fructueuse. Vous avez cité comme exemple Grigori Perelman, qui a prouvé la conjecture de Poincaré en travaillant seul pendant sept ans, avec peu de contacts avec le monde extérieur.

Pouvez-vous nous expliquer ce problème du Prix du Millénaire qui a été résolu, la conjecture de Poincaré, et peut-être nous parler du parcours de Grigori Perelman ?

TERENCE TAO : Très bien, il s'agit d'espaces courbes. La Terre en est un bon exemple. On peut donc la considérer comme une surface bidimensionnelle. En se déplaçant autour de la Terre, on pourrait la considérer comme un tore percé d'un trou, ou de plusieurs. Il existe a priori de nombreuses topologies différentes pour une surface, même en la supposant délimitée et lisse, etc. Nous avons donc compris comment classer les surfaces. En première approximation, tout est déterminé par ce qu'on appelle le genre, le nombre de trous qu'elle comporte. Ainsi, une sphère a un genre nul, une bouée a un genre un, etc. Une propriété permettant de distinguer ces surfaces est la propriété de la sphère, dite simplement connexe. Si l'on prend une boucle fermée sur la sphère, comme une grosse corde fermée, on peut la contracter jusqu'à un point tout en restant à la surface. La sphère a cette propriété, mais pas le tore. Si vous êtes sur un tore et que vous prenez une corde qui entoure, par exemple, le diamètre extérieur du tore, il n'y a aucun moyen qu'elle ne passe pas par le trou. Il n'y a aucun moyen de la contracter jusqu'à un point. Il s'avère donc que la sphère est la seule surface possédant cette propriété de contractibilité des boucles. Il y a des surfaces qui peuvent être transformées par des déformations continues en la sphère, elles sont dites topologiquement équivalentes à la sphère. Poincaré pose donc la même question en dimensions supérieures. La visualisation devient donc difficile, car on peut considérer une surface comme intégrée à trois dimensions. Or nous n'avons pas une bonne intuition de l'espace à quatre dimensions pour visualiser un espace libre courbe dans l'espace à 4 dimensions. Il existe aussi des espaces à trois dimensions qui ne peuvent même pas être plongés dans l'espace à quatre dimensions. Il en faut cinq, six, voire plus. Quoi qu'il en soit, mathématiquement, on peut toujours se poser la question suivante : "si l'on dispose d'un

espace tridimensionnel borné, possédant également cette propriété de simple connexion que chaque boucle peut être contractée, peut-on le transformer en une version tridimensionnelle de la sphère ?”. C’est donc là que la conjecture, étrangement en dimensions supérieures, 4 et 5, était en fait plus facile, et elle a donc été résolue en premier lieu en dimensions supérieures. Il y a plus de place pour la déformation, il est plus facile de déplacer des objets autour d’une sphère. Mais trois, c’était vraiment difficile. On a donc essayé plusieurs approches. Il y a des approches de type cohomologique où l’on découpe la surface en petits triangles ou tétraèdres, et on essaie d’argumenter en se basant sur la façon dont les faces interagissent. Il y a aussi des approches algébriques. Il existe divers objets algébriques, comme le groupe fondamental, que l’on peut associer à l’homologie, à la cohomologie et à tous ces outils très sophistiqués. Mais ces approches n’ont pas vraiment fonctionné. Richard Hamilton a proposé une approche par équations aux dérivées partielles. Le problème, c’est que l’on a cet objet qui est secrètement la sphère, mais qui nous est donné d’une manière étrange. Imaginez une balle froissée et tordue, dont on ne voit pas forcément qu’il s’agit d’une balle, mais si vous avez une surface, une sphère déformée, vous pourriez, par exemple, la considérer comme la surface d’un ballon. Vous pourriez essayer de la gonfler. On le gonfle et, naturellement, en le remplissant d’air, les rides s’estompent et il se transforme en une belle sphère ronde. À moins, bien sûr, qu’il ne s’agisse d’un tore, auquel cas il se bloquerait à un moment donné. Par exemple, si on gonfle un tore, il y aura un point au milieu où l’anneau intérieur se rétractera jusqu’à zéro. On obtient une singularité, et on ne peut plus gonfler, l’air ne peut plus passer. Perelman a donc créé cet écoulement, aujourd’hui appelé écoulement de Ricci, qui consiste à prendre une surface ou un espace arbitraire et à le lisser pour le rendre de plus en plus rond, pour lui donner l’apparence d’une sphère. Il voulait démontrer que ce processus donnerait l’un ou l’autre. Soit vous avez une sphère, soit cela créerait une singularité. Tout comme les EDP, soit elles ont une régularité globale, soit on a une explosion en temps fini. En gros, c’est presque exactement la même chose. Tout est connecté. Perelman a démontré que pour des surfaces bidimensionnelles, si l’on partait du principe qu’aucune singularité ne se formerait, on ne rencontrerait aucun problème, l’air pourrait s’écouler et on pourrait obtenir une sphère. Il a ainsi obtenu une nouvelle preuve du résultat bidimensionnel.

LEX FRIDMAN : Au fait, c’est une belle explication du flot de Ricci et de son application dans ce contexte. Quelle est la difficulté mathématique ici pour le cas 2D ?

TERENCE TAO : Oui, ce sont des équations assez sophistiquées, comparables aux équations d’Einstein. Le cas 2-dimensionnel est un peu plus simple, certes, mais ces équations étaient considérées comme difficiles à résoudre. De nombreuses astuces en 2D ont été utiles. Mais en 3D, le problème était que cette équation était en réalité supercritique. Les mêmes problèmes que pour Navier-Stokes à mesure que l’on agrandissait, la courbure se concentrait peut-être dans des régions plus fines et plus petites. L’équation paraissait de plus en plus non linéaire, et la situation devenait de plus en plus inégale. Et toutes sortes de singularités pouvaient apparaître. Certaines singularités, comme les pincements de cou, où la surface se comporte comme une barre et se pince en un point. Certaines singularités sont suffisamment simples pour permettre d’anticiper la suite. Il suffit de découper une surface, puis de la transformer en deux et de les faire évoluer séparément. Mais il y avait le risque d’apparition de singularités nouvelles vraiment désagréables, impossibles à résoudre, sans intervention chirurgicale. Il faut donc classer toutes les singularités, par exemple, quelles sont les causes possibles d’un dysfonctionnement ? Perelman a tout d’abord transformé le problème supercritique en problème critique. J’ai déjà expliqué comment l’invention de l’énergie

et de l'hamiltonien a véritablement clarifié la mécanique newtonienne. Perelman a donc introduit ce qu'on appelle aujourd'hui le volume réduit et l'entropie de Perelman. Il a également introduit de nouvelles quantités, comme l'énergie, identiques à toutes les échelles, transformant le problème en un problème critique où les non-linéarités semblaient soudainement beaucoup moins effrayantes qu'auparavant. Il a ensuite dû le résoudre. Perelman a dû analyser les singularités de ce problème critique. Et c'était un problème similaire à celui des cartes d'ondes sur lequel je travaillais, en termes de difficulté. Il a donc réussi à classer toutes les singularités de ce problème et à montrer comment appliquer la chirurgie à chacune d'elles. Ce faisant, il a pu résoudre la conjecture de Poincaré. Il s'agissait donc de nombreuses étapes vraiment ambitieuses, et rien de ce qu'un grand modèle de langage actuel, par exemple, pourrait faire. Au mieux, je pouvais imaginer proposer cette idée parmi des centaines d'autres, mais les 99 autres seraient des impasses totales, dont on ne découvrirait la solution qu'après des mois de travail. Perelman devait avoir le pressentiment que c'était la bonne voie à suivre, car il faut des années pour passer du point A au point B.

LEX FRIDMAN : Donc, comme vous l'avez dit, vous avez effectivement accompli, voyez-vous, même d'un point de vue strictement mathématique, mais plus largement, en termes de processus, vous avez accompli des choses tout aussi difficiles. Que pouvez-vous déduire du processus que Perelman a suivi, puisqu'il le faisait seul ? Quels sont les moments difficiles dans un tel processus ? Quand vous commencez à avoir des difficultés, comme vous l'avez mentionné, comme quand l'IA ne sait pas quand elle échoue. Que se passe-t-il, assis dans votre bureau, quand vous réalisez que ce que vous avez fait ces derniers jours, voire ces dernières semaines, est un échec ?

TERENCE TAO : Eh bien, pour moi, je passe à un problème différent. (*Lex rit*) Donc, comme je l'ai dit, je suis un renard, je ne suis pas un hérisson.

LEX FRIDMAN : Mais vous, légitimement, est-ce qu'une pause que vous pouvez prendre, c'est de prendre du recul et de regarder un problème différent ?

TERENCE TAO : Oui, on peut aussi modifier le problème. On peut demander à un tricheur s'il y a un problème spécifique qui nous bloque, un cas problématique récurrent pour lequel notre outil ne fonctionne pas. On peut simplement supposer que ce cas problématique ne se produit pas. On fait donc appel à la pensée magique, mais stratégiquement, d'accord, pour voir si le reste de l'argumentation est valable. Si votre approche présente plusieurs problèmes, on peut abandonner. Mais si c'est le seul problème, et que tout le reste est vérifié, ça vaut toujours le coup de se battre. Donc oui, il faut parfois faire un peu de reconnaissance. (*Lex rit*).

LEX FRIDMAN : Et c'est parfois productif de se dire "Ok, on finira par trouver une solution."

TERENCE TAO : Oh, oui. Parfois, c'est même productif de faire des erreurs. Il y a eu un projet pour lequel nous avons remporté des prix, avec quatre autres personnes.

Nous avons retravaillé ce problème d'EDP, en fait ce problème de régularité d'explosion. Il était considéré comme très difficile. Jean Bourgain, un autre médaillé Fields, a travaillé sur un cas particulier, mais n'a pas réussi à résoudre le cas général. Nous avons travaillé sur ce problème pendant deux mois et pensions l'avoir résolu. Nous avions cet argument intéressant si tout collait et comme

nous étions enthousiastes, nous prévoyions de fêter ça en buvant du champagne ou quelque chose du genre. Nous avons commencé à le rédiger, et l'un de nous, pas moi en fait, mais un autre co-auteur, a dit : "Oh, dans ce lemme-ci, nous devons estimer ces 13 termes qui apparaissent dans ce développement. Et nous en avons estimé 12. Mais dans nos notes, je ne trouve pas l'estimation du 13^{ième}. Quelqu'un pourrait-il appliquer cela ?". J'ai répondu : "Bien sûr, je vais regarder ça". Et en fait, oui, nous n'avions pas abordé ce sujet. Nous avons complètement omis ce terme. Et il s'est avéré pire que les 12 autres termes réunis.

En fait, nous ne pouvions pas estimer ce terme. Nous avons essayé pendant quelques mois encore, avec toutes sortes de permutations, et il restait toujours ce point, ce terme, que nous ne pouvions contrôler. C'était donc très frustrant. Mais comme nous avions déjà investi des mois et des mois d'efforts dans ce projet, nous y sommes restés. Nous avons tenté des solutions de plus en plus désespérées et insensées. Au bout de deux ans, nous avons constaté que cette approche était en réalité assez différente de notre stratégie initiale, qui ne générerait pas ces termes problématiques et résolvait le problème. Nous l'avons donc résolu au bout de deux ans. Mais si nous n'avions pas eu cette première intuition de quasi-résolution, nous aurions abandonné au bout de deux mois environ et travaillé sur un problème plus simple. Si nous avions su que cela prendrait deux ans, je ne suis pas sûr que nous aurions commencé le projet. Parfois, se tromper, c'est comme Colomb voyageant vers le Nouveau Monde. Il disposait d'une version erronée de la mesure de la taille de la Terre. Il pensait trouver une nouvelle route commerciale vers l'Inde, ou du moins, c'est ainsi qu'il l'a présenté dans son programme, je veux dire qu'il se pourrait qu'il l'ait su en secret.

LEX FRIDMAN : Juste sur le plan psychologique, ressentez-vous des doutes émotionnels ou personnels qui vous submergent de cette façon ? Parce que ce genre de choses, on a l'impression que les mathématiques sont tellement captivantes qu'elles peuvent vous briser. Quand on s'investit tellement dans un problème et qu'il se révèle faux, on peut recommencer à essayer, et recommencer encore, et les échecs ont parfois brisé certaines personnes.

TERENCE TAO : Oui, je pense que les mathématiciens ont des niveaux d'investissement émotionnel différents dans leur travail. Pour certains, c'est juste un travail. On a un problème et si ça ne marche pas, on passe au suivant. Donc, le fait de pouvoir toujours passer à un autre problème réduit le lien émotionnel. Il y a des cas. Il y a ce qu'on appelle des maladies mathématiques : on s'accroche à un problème et on passe des années à ne penser qu'à lui, et ça peut nuire à sa carrière, etc. On se dit : "D'accord, mais cette grande victoire, une fois ce problème résolu, compensera toutes ces années d'opportunités perdues.". Parfois, ça marche, mais je ne le recommande vraiment pas aux personnes qui n'ont pas le courage nécessaire. Pour ma part, je n'ai jamais été très investi dans un problème en particulier. Ce qui est pratique, c'est qu'on n'a pas besoin de nommer ses problèmes à l'avance. Lorsque nous soumettons des demandes de subvention, nous affirmons que nous étudierons cet ensemble de problèmes, même si nous ne promettons pas de fournir une preuve définitive de tous ces éléments dans cinq ans. On promet de progresser ou de découvrir des phénomènes intéressants, et on ne résout peut-être pas le problème, mais on découvre un problème connexe sur lequel on peut apporter des éléments nouveaux, ce qui est beaucoup plus réalisable.

LEX FRIDMAN : Mais je suis sûr que vous rencontrez des problèmes comme celui-ci. Vous avez fait d'énormes progrès sur les problèmes les plus difficiles de l'histoire des mathématiques. Alors, y

a-t-il un problème qui vous hante, qui se terre dans un recoin obscur? La conjecture des nombres premiers jumeaux, l'hypothèse de Riemann, la conjecture de Goldbach?

TERENCE TAO : La conjecture des nombres premiers jumeaux semble (*Lex rit*)... Encore une fois, donc, je veux dire que ce problème est comme l'hypothèse de Riemann, ceux-ci sont tellement hors de portée.

LEX FRIDMAN : Tu penses ?

TERENCE TAO : Oui. Il n'y a même pas de stratégie viable. Même si j'activais toutes les astuces que je connais pour ce problème, il n'y aurait toujours aucun moyen d'aller de A à B. Je pense qu'il faudrait d'abord une avancée dans un autre domaine des mathématiques et que quelqu'un reconnaisse l'utilité de ce concept pour ce problème.

LEX FRIDMAN : Nous devrions peut-être prendre un peu de recul et simplement parler des nombres premiers. On les appelle souvent les atomes des mathématiques. Pourriez-vous nous parler de la structure qu'ils forment ?

TERENCE TAO : Pour les nombres naturels, on a deux opérations de base : l'addition et la multiplication. Pour les engendrer, deux solutions s'offrent à vous. Vous pouvez commencer par un et lui additionner des uns à l'infini, ce qui engendre les nombres naturels. Additivement, ils sont très faciles à engendrer : 1, 2, 3, 4, 5. Ou, pour une multiplication, vous pouvez prendre tous les nombres premiers, 2, 3, 5, 7, et les multiplier. Ensemble, vous obtenez tous les nombres naturels, sauf peut-être un. Il existe donc deux façons distinctes d'appréhender les nombres naturels, d'un point de vue additif et d'un point de vue multiplicatif. Séparément, ce n'est pas si mal. Ainsi, toute question qui ne fait appel qu'à l'addition est relativement facile à résoudre. Et toute question qui ne fait appel qu'à la multiplication est relativement facile à résoudre. Mais ce qui est frustrant, c'est de combiner les deux.

On les met ensemble et soudain, on obtient une richesse extraordinaire. On sait que certains énoncés en théorie des nombres sont indécidables. Certains polynômes sont construits avec un certain nombre de variables. Existe-t-il une solution à telle équation polynomiale dans les entiers naturels ? La réponse dépend d'un énoncé indécidable, comme la cohérence des axiomes mathématiques. Mais même les problèmes les plus simples combinant une partie multiplicative sur les nombres premiers, avec une partie additive, comme un décalage de deux, ces parties étant prises séparément, nous les comprenons bien. Mais si vous vous demandez quand on décale un nombre premier de deux, à quelle fréquence peut-on obtenir un autre nombre premier ? Il est extrêmement difficile de relier les deux parties, la partie additive et la partie multiplicative.

LEX FRIDMAN : Et on peut dire que la conjecture des nombres premiers jumeaux est précisément cela. Elle postule qu'il existe une infinité de paires de nombres premiers qui diffèrent de deux. Ce qui est intéressant, c'est que vous avez réussi à faire progresser ce domaine en répondant à des questions complexes de cette sorte. Comme vous l'avez mentionné, le théorème de Green-Tao prouve que l'ensemble des nombres premiers contient des progressions arithmétiques de n'importe quelle longueur.

TERENCE TAO : C'est vrai.

LEX FRIDMAN : C'est époustouffant que vous ayez pu prouver quelque chose comme ça.

TERENCE TAO : Tout à fait ! Ce type de recherche nous a permis de comprendre que différents motifs ont différents niveaux d'indestructibilité. Ce qui rend le problème des nombres premiers jumeaux difficile, c'est que si l'on prend tous les nombres premiers du monde (2, 3, 5, 7, 11, etc.), on y trouve des jumeaux. 11 et 13 sont des nombres premiers jumeaux, une paire de nombres premiers jumeaux, etc. Mais on pourrait facilement, si on le voulait, supprimer les nombres premiers jumeaux parmi les nombres premiers. Les jumeaux apparaissent et sont infiniment nombreux, mais ils sont en réalité assez rares. Au début, ils sont assez nombreux, mais une fois arrivés à des millions, voire des billions, ils deviennent de plus en plus rares. Et on pourrait simplement... Si quelqu'un avait accès à la base de données des nombres premiers, il suffirait d'en supprimer quelques-uns ici et là. On pourrait fausser la conjecture des nombres premiers jumeaux en supprimant simplement environ 0,01 des nombres premiers. C'est une excellente idée de faire cela. On pourrait ainsi présenter une base de données censurée des nombres premiers (dans laquelle on a supprimé les nombres premiers jumeaux) qui passe tous les tests statistiques. Elle obéit à des principes comme le théorème des nombres premiers et d'autres principes concernant les nombres premiers, mais ne contient plus de nombres premiers jumeaux. C'est un véritable obstacle à la conjecture des nombres premiers jumeaux. Cela signifie que toute stratégie de structure de preuve visant à trouver des nombres premiers jumeaux parmi les nombres premiers réels échouera forcément lorsqu'elle sera appliquée à ces nombres premiers légèrement modifiés. Il doit donc s'agir d'une caractéristique très subtile et délicate des nombres premiers, impossible à obtenir par une ruse.

LEX FRIDMAN : Ok, donc on a oublié cette idée (*rires*).

TERENCE TAO : Oui, d'un autre côté, les progressions arithmétiques se sont révélées beaucoup plus robustes. On peut prendre les nombres premiers et en éliminer 99, et on peut prendre les 90 participants de son choix. Et il s'avère, et nous l'avons également prouvé, qu'on obtient toujours des progressions arithmétiques. Les progressions arithmétiques sont bien plus... comme des bugs.

LEX FRIDMAN : De longueur arbitraire.

TERENCE TAO : Oui, oui.

LEX FRIDMAN : C'est fou. Pour ceux qui ne le savent pas, une progression arithmétique est une suite de nombres qui diffèrent chacun du suivant d'une valeur fixe.

TERENCE TAO : Oui, mais c'est encore une fois comme un paradoxe des singes savants. Pour un cardinal fixé de votre ensemble, vous n'obtenez pas de progressions arbitraires, vous n'obtenez que des progressions assez courtes.

LEX FRIDMAN : Mais vous avez dit que le problème des nombres premiers jumeaux n'était pas lié au paradoxe des singes savants.

TERENCE TAO : Je veux dire que c'est lié au paradoxe des singes savants d'une façon très subtile.

LEX FRIDMAN : C'est quand même un paradoxe de singe savant.

TERENCE TAO : C'est vrai, oui, si les nombres premiers étaient réellement aléatoires, si les nombres premiers étaient générés par des singes savants, alors oui, en fait, ils vérifieraient le théorème du paradoxe des singes savants.

LEX FRIDMAN : Oh, mais si vous dites que le théorème de l'infinitude de l'ensemble des nombres premiers jumeaux est faux, on ne peut pas utiliser les mêmes outils. Cela ne semble presque pas aléatoire.

TERENCE TAO : Eh bien, on ne sait pas. On pense que l'ensemble des nombres premiers se comporte comme un ensemble aléatoire. La raison pour laquelle nous nous intéressons à la conjecture des nombres premiers jumeaux est qu'elle constitue un cas test pour savoir si nous pouvons véritablement, en toute confiance et avec 0 % de risque d'erreur, affirmer que l'ensemble des nombres premiers se comporte comme un ensemble aléatoire. Les versions aléatoires des nombres premiers que nous connaissons contiennent des jumeaux. Nous pensons donc que les nombres premiers sont aléatoires. La raison pour laquelle les progressions arithmétiques sont indestructibles est que, qu'elles paraissent aléatoires ou structurées comme des nombres périodiques, dans les deux cas, des progressions arithmétiques apparaissent, mais pour des raisons différentes. Et c'est essentiellement la façon dont le théorème... Il existe de nombreuses preuves de ces théorèmes de progression arithmétique, et elles sont toutes prouvées par une sorte de dichotomie où l'ensemble est soit structuré, soit aléatoire. Dans les deux cas, on peut dire quelque chose, puis on assemble les deux cas. Mais concernant l'ensemble des nombres premiers jumeaux, si l'ensemble des nombres premiers est aléatoire, on est content, on gagne. Mais si l'ensemble des nombres premiers est structuré, il pourrait l'être d'une manière spécifique qui élimine les jumeaux. Et on ne peut pas exclure cette conspiration.

LEX FRIDMAN : Et pourtant, vous avez pu faire, si j'ai bien compris, des progrès sur la version k -uplets.

TERENCE TAO : Tout à fait. Ce qui est drôle avec les conspirations, c'est qu'elles sont toutes très difficiles à réfuter. Si vous croyez que le monde est dirigé par des lézards, vous dites "Voici des preuves qu'il n'est pas dirigé par des lézards." Eh bien, ces preuves ont été semées par les lézards. Vous avez peut-être déjà rencontré ce genre de phénomène. Il est quasiment impossible d'exclure définitivement une conspiration. Et c'est la même chose en mathématiques : une conspiration vise uniquement à éliminer les nombres premiers jumeaux. Il faudrait aussi infiltrer d'autres domaines des mathématiques.

Mais on pourrait la rendre cohérente, du moins à notre connaissance. Or, il existe un phénomène étrange on peut faire en sorte qu'une conspiration exclue d'autres conspirations. Donc, si le monde est dirigé par des lézards, il ne peut pas être aussi dirigé par des extraterrestres.

LEX FRIDMAN : (*rires*) C'est vrai.

TERENCE TAO : Il est donc difficile de réfuter une affirmation déraisonnable. Mais il existe plusieurs outils. Par exemple, nous savons qu'il existe une infinité de suite de nombres, dont aucun n'est un nombre premier, et donc une infinité de paires de nombres premiers dont la différence est d'au plus 246.

LEX FRIDMAN : Donc il y a comme une limite.

TERENCE TAO : Oui, il existe des nombres premiers jumeaux. Il existe des nombres premiers cousins qui diffèrent de quatre. Il existe des nombres premiers dits "sexy" qui diffèrent de six.

LEX FRIDMAN : Pardon, que sont les nombres premiers sexy ?

TERENCE TAO : Ce sont des nombres premiers qui diffèrent de six. Le nom est bien moins explicite, et le concept est bien moins captivant que son nom le suggère.

LEX FRIDMAN : Compris.

TERENCE TAO : On peut donc exclure une théorie du complot, mais une fois qu'on en a cinquante, on ne peut plus toutes les exclure d'un coup. Ça demande trop d'énergie, en quelque sorte, dans ce domaine.

LEX FRIDMAN : Comment calcule-t-on la limite ? Comment déduit-on la différence entre deux nombres premiers alors que leur nombre est infini ?

TERENCE TAO : Cela repose donc en fin de compte sur ce qu'on appelle le principe des tiroirs. Ce principe stipule que si vous avez plusieurs pigeons et qu'ils doivent tous être placés dans des tiroirs, et qu'il y a plus de pigeons que de tiroirs, alors l'un des tiroirs doit contenir au moins deux pigeons. Il faut donc que deux pigeons soient proches l'un de l'autre. Ainsi, par exemple, si vous avez 100 nombres compris entre un et mille espacés à peu près régulièrement, deux d'entre eux doivent être distants d'au plus 10, car on peut disposer les nombres de 1 à 100 en 100 tiroirs. Disons que si vous avez 101 nombres, deux d'entre eux doivent être distants d'au plus 10, car deux d'entre eux doivent appartenir à la même case. C'est donc une caractéristique fondamentale d'un principe mathématique fondamental. Cela ne fonctionne donc pas directement avec les nombres premiers, car ils deviennent de plus en plus rares à mesure qu'on s'éloigne, et de moins en moins de nombres sont premiers. Mais il existe un moyen d'attribuer des pondérations aux nombres. Il existe donc des nombres presque premiers, mais qui n'ont aucun facteur autre qu'eux-mêmes, ou bien qui ont très peu de facteurs. Or, nous comprenons bien mieux les nombres presque premiers que les nombres premiers. Par exemple, on savait depuis longtemps qu'il existait des nombres presque premiers qui étaient jumeaux. Cela a été résolu. Les nombres presque premiers sont donc quelque chose que nous comprenons plus ou moins. On peut donc se concentrer sur un ensemble approprié de nombres presque premiers. Et bien que les nombres premiers soient globalement très rares par rapport aux nombres presque premiers, ils sont en réalité beaucoup moins rares. On peut établir un ensemble de nombres presque premiers dont la densité est disons de 1%. Et cela vous donne une chance de

prouver, en appliquant un principe original, qu'il existe des paires de nombres premiers dont la densité est d'environ 100. Mais pour prouver la conjecture des nombres premiers jumeaux, il faut amener la densité des nombres premiers parmi les nombres presque premiers à un seuil de 50. Une fois atteint 50, on obtient des nombres premiers jumeaux. Malheureusement, il existe des barrières. Nous savons que, quel que soit le bon ensemble de nombres presque premiers choisi, la densité des nombres premiers ne peut jamais dépasser 50. C'est ce qu'on appelle la barrière de parité. Et j'aimerais beaucoup la trouver. Oui, donc l'un de mes rêves à long terme est de trouver un moyen de franchir cette barrière, car cela ouvrirait la voie non seulement à la conjecture des nombres premiers jumeaux, mais aussi à la conjecture de Goldbach et à de nombreux autres problèmes de théorie des nombres qui sont actuellement bloqués, car nos techniques actuelles nécessiteraient de dépasser cette barrière de parité théorique. C'est comme d'aller plus vite que la lumière.

LEX FRIDMAN : Oui. On devrait donc parler d'une conjecture des nombres premiers jumeaux comme de l'un des plus grands problèmes de l'histoire des mathématiques. La conjecture de Goldbach aussi peut être classée comme l'un des plus grands problèmes de l'histoire des mathématiques. On les croirait voisines. Avez-vous eu l'impression de voir le chemin ?

TERENCE TAO : Ah oui. Parfois, on essaie quelque chose et ça marche super bien. On retrouve ce flair mathématique dont on parlait plus tôt. On apprend par l'expérience que quand les choses vont trop bien, on va être confronté à certaines difficultés. Je crois qu'un de mes collègues a dit ça ; c'est comme si vous étiez dans les rues de New York, que vous mettiez un bandeau sur les yeux, que vous montiez dans une voiture et qu'au bout de quelques heures, le bandeau était enlevé et que vous étiez à Pékin. C'était trop facile. On ne pouvait pas dire qu'il y avait un océan à traverser. Même si on ne sait pas exactement ce qui a été fait, on soupçonnait que quelque chose clochait.

LEX FRIDMAN : Mais est-ce que vous avez encore cette idée de revenir à ces nombres premiers de temps en temps pour voir ?

TERENCE TAO : Oui, quand je n'ai rien de mieux à faire, ce qui est de moins en moins le cas. Je suis pris par tellement de choses ces temps-ci. Mais oui, quand j'ai du temps libre et que je suis trop frustré pour travailler sur mes projets de recherche, et que je n'ai pas envie de m'occuper de mes tâches administratives, ou de faire des courses pour ma famille, je peux jouer à ces jeux pour le plaisir. Et généralement, ça ne mène à rien. Oui, il faut apprendre à se dire : "Bon, d'accord, encore une fois, rien ne s'est passé. Je passe à autre chose.". Il arrive très souvent que je pense que j'ai résolu un de ces problèmes, ou parfois, comme tu dis, tu penses l'avoir résolu, et puis tu fais une pause d'un quart d'heure, et tu te dis que tu devrais vérifier, parce que c'était trop facile, trop beau pour être vrai. Et c'est généralement le cas.

LEX FRIDMAN : Que pensez-vous du moment où ces problèmes, la conjecture de l'infinitude de l'ensemble des nombres premiers jumeaux et la conjecture de Goldbach, seront résolus?

TERENCE TAO : Même si je suis premier ministre, je pense que nous continuerons à obtenir des résultats partiels. Il en faut au moins un. Cette barrière de parité est le principal obstacle restant. Il existe des versions plus simples de la conjecture, dont nous nous rapprochons vraiment. Je pense donc que, dans dix ans, nous obtiendrons beaucoup plus de résultats beaucoup plus proches.

Nous n'aurons peut-être pas la totalité, donc les nombres premiers jumeaux sont assez proches. L'hypothèse de Riemann, je n'en ai aucune idée. Ça arrivera par accident, je crois.

LEX FRIDMAN : L'hypothèse de Riemann est donc une sorte de conjecture plus générale sur la distribution des nombres premiers.

TERENCE TAO : C'est vrai. On a indiqué que les nombres premiers sont en quelque sorte considérés de manière multiplicative, pour les questions impliquant uniquement la multiplication, sans addition. Les nombres premiers se comportent vraiment de manière aussi aléatoire qu'on pourrait l'espérer. Il existe donc un phénomène en probabilités appelé annulation de la racine carrée : si vous souhaitez sonder, par exemple, les Américains sur une question donnée et que vous interrogez un électeur sur deux, vous risquez d'obtenir un échantillon erroné et d'obtenir une mesure très imprécise de la moyenne globale. Mais si vous échantillonnez de plus en plus de personnes, la précision s'améliore de plus en plus, jusqu'à atteindre l'équivalent de la racine carrée du nombre de personnes échantillonnées. De la même manière, si vous mesurez les nombres premiers dans un certain sens multiplicatif, vous pouvez mesurer un certain type de statistique sur la fonction zêta de Riemann, qui fluctue à la hausse et à la baisse. Mais d'une certaine manière, à mesure que vous augmentez la moyenne, si vous échantillonnez de plus en plus, la fluctuation devrait diminuer, comme si elle était aléatoire. Et il existe un moyen très précis de quantifier cela. L'hypothèse de Riemann est une méthode très élégante pour le capturer. Mais comme pour beaucoup d'autres méthodes en mathématiques, nous disposons de très peu d'outils pour montrer qu'un phénomène se comporte véritablement de manière aléatoire. Et ce n'est pas juste un peu aléatoire, mais cela demande un comportement aussi aléatoire qu'un ensemble réellement aléatoire, cette annulation de racine carrée. Et nous savons, en raison de problèmes liés au problème de parité, que la plupart des techniques habituelles ne peuvent pas espérer résoudre cette question. La preuve doit venir de nulle part. Oui, mais en fait, personne n'a de proposition sérieuse. Et il existe plusieurs façons, comme je l'ai dit, de modifier légèrement les nombres premiers et de détruire l'hypothèse de Riemann. Il faut donc être très délicat. On ne peut pas appliquer une méthode qui présente d'énormes marges d'erreur. Cela ne fonctionnerait que très peu. Et il y a tous ces pièges qu'il faut éviter avec beaucoup d'adresse.

LEX FRIDMAN : Les nombres premiers sont tout simplement fascinants.

TERENCE TAO : Oui.

LEX FRIDMAN : Qu'est-ce qui est le plus mystérieux pour vous dans les nombres premiers ?

TERENCE TAO : C'est une bonne question. Conjecturalement, nous en avons un bon modèle. Comme je l'ai dit, ils présentent certaines régularités, comme le fait que les nombres premiers soient généralement impairs. Mais au-delà de ces régularités évidentes, ils se comportent de manière très aléatoire. Et si l'on suppose qu'ils se comportent ainsi, il existe donc ce qu'on appelle le modèle aléatoire de Cramér² des nombres premiers : après un certain point, les nombres premiers se comportent comme un ensemble aléatoire. Ce modèle a subi quelques légères modifications, mais il s'avère très bon. Il est conforme aux chiffres. Il nous indique ce qu'il faut prédire. Je peux vous

²de 1936.

affirmer avec une certitude absolue que la conjecture des nombres premiers jumeaux est vraie. Le modèle aléatoire donne une probabilité écrasante qu'elle soit vraie. Je ne peux tout simplement pas le prouver. La plupart de nos mathématiques sont optimisées pour résoudre des problèmes comportant des régularités. Et les nombres premiers ont cet anti-régularité, comme presque tout le reste. Mais nous ne pouvons pas le prouver. Je suppose que ce n'est pas mystérieux que les nombres premiers soient plutôt aléatoires, car ils n'ont aucune raison d'avoir un motif secret. Mais ce qui est mystérieux, c'est le mécanisme qui force réellement ce caractère aléatoire à se produire. Et celui-ci est tout simplement absent.

LEX FRIDMAN : Un autre problème incroyablement difficile est la conjecture de Collatz.

TERENCE TAO : Oh, oui.

LEX FRIDMAN : Simple à énoncer, belle à visualiser par sa simplicité, et pourtant extrêmement difficile à résoudre. Et pourtant, vous avez progressé. Paul Erdős a dit, à propos de la conjecture de Collatz, que les mathématiques n'étaient peut-être pas prêtes à résoudre de tels problèmes. D'autres ont affirmé qu'il s'agissait d'un problème extraordinairement difficile, totalement inaccessible. En 2010, cette conjecture était hors de portée des mathématiques d'alors. Et pourtant, vous avez progressé. Pourquoi cette conjecture est-elle si difficile à résoudre ? Pouvez-vous seulement expliquer ce qui la rend si difficile ?

TERENCE TAO : Oui, c'est un problème que je peux expliquer. Des aides visuelles seraient plus parlantes encore, mais oui. Donc, on prend un nombre naturel, comme 13, et on lui applique la procédure suivante : si c'est un nombre pair, on le divise par deux et si c'est un nombre impair, on le multiplie par trois et on ajoute un au résultat du produit. Ainsi, les nombres pairs ont un successeur plus petit qu'eux-mêmes, tandis que les nombres impairs ont un successeur plus grand qu'eux-mêmes. Ainsi, 13 deviendrait 40, car 13 fois trois font 39. Ajoutez un, et vous obtenez 40. C'est donc un processus simple pour les nombres pairs et impairs ; ce sont deux opérations très simples. Ensuite, on les assemble, et c'est encore relativement simple. Mais ensuite, on se demande ce qui se passe lorsqu'on itère le processus : on prend le résultat obtenu et on le réinjecte. Donc 13 devient 40. 40 est maintenant pair, divisé par 2, 20. 20 est toujours pair, divisé par 2, 10, 5. Et puis 5 fois 3 plus 1 fait 16, puis 8, 4, 2, 1. Et de 1, on obtient 1, 4, 2, 1, 4, 2. Et le cycle est infini. Donc, la séquence que je viens de décrire 13, 40, 20, 10. On les appelle aussi séquences de grêlons, car il existe un modèle simplifié de la formation des grêlons qui n'est pas tout à fait exact, mais on l'enseigne encore aux lycéens. En première approximation, on dit qu'un petit morceau de glace se forme dans un nuage, un cristal de glace qui monte et descend sous l'effet du vent. Et parfois, lorsqu'il fait froid, il prend un peu de masse, et peut-être fond-il légèrement. Ce processus de montée et de descente crée de la glace partiellement fondue, qui finit par former de la grêle, qui finit par retomber sur Terre. On suppose donc que, quelle que soit l'altitude initiale, on prend un nombre se chiffrant en millions ou en milliards. Ce processus, qui monte si la masse est impaire et descend si elle est paire, finit par redescendre sur Terre.

LEX FRIDMAN : Peu importe où vous commencez, avec cet algorithme très simple, vous arrivez à un.

TERENCE TAO : C'est cela, oui.

LEX FRIDMAN : Et vous pourriez grimper pendant un certain temps.

TERENCE TAO : C'est vrai, oui.

LEX FRIDMAN : De haut en bas.

LEX FRIDMAN : Oui, si on les représente graphiquement, ces séquences ressemblent à un mouvement brownien, à la bourse. Elles fluctuent simplement selon un schéma apparemment aléatoire. Et en fait, c'est généralement ce qui se passe : si on introduit un nombre aléatoire, on peut prouver, au moins initialement, que cela ressemble à une marche aléatoire. Or, il s'agit bien d'une marche aléatoire avec une dérivée descendante. C'est comme si vous jouiez constamment à la roulette au casino, avec des probabilités légèrement défavorables. Parfois, vous gagnez, parfois vous perdez, mais à long terme, vous perdez un peu plus que vous ne gagnez. Et donc, normalement, votre portefeuille finira par se vider si vous continuez à jouer encore et encore.

LEX FRIDMAN : Donc statistiquement, cela a du sens.

TERENCE TAO : Oui. Donc, le résultat que j'ai prouvé, en gros, affirme que statistiquement, environ 99 % des entrées diminueraient, peut-être pas jusqu'à un, mais jusqu'à être bien plus petites que le montant initial. C'est comme si je vous disais que si vous allez au casino, si vous continuez à jouer suffisamment longtemps, vous vous retrouvez la plupart du temps avec un montant inférieur à celui de vos débuts. C'est un peu le résultat que j'ai prouvé.

LEX FRIDMAN : Alors pouvez-vous prolonger ce résultat, continuer dans ce droit fil pour prouver la conjecture complète ?

TERENCE TAO : Le problème, c'est que j'ai utilisé des arguments issus de la théorie des probabilités, et il y a toujours cet événement exceptionnel. En probabilités, nous avons cette loi des grands nombres qui nous dit, par exemple, que si vous jouez à un jeu de casino avec une espérance de perte, avec une probabilité proche de 100, vous êtes presque assuré de perdre de l'argent. Mais il y a toujours cette valeur aberrante exceptionnelle. Il est mathématiquement possible que, même lorsque les chances ne sont pas de votre côté, vous continuiez à gagner légèrement plus souvent que vous ne perdiez. Un peu comme dans la théorie de Navier-Stokes, il se pourrait que vos vagues se dispersent la plupart du temps. Il pourrait y avoir un seul choix aberrant de conditions initiales qui vous conduirait à l'explosion. Et il pourrait y avoir un choix aberrant d'un nombre particulier que vous insérez et qui fait que ça s'écroule à l'infini, ou avec d'autres nombres, que ça s'écroule sur un. En fait, certains mathématiciens, comme Alex Kontorovich, ont suggéré que ces itérations de Collatz sont comme des automates cellulaires. En fait, si on observe ce qui se passe en binaire, on constate qu'ils ressemblent un peu à ces schémas du Jeu de la Vie. Par analogie avec la façon dont le Jeu de la Vie peut créer ces objets massifs auto-réplicatifs, etc., on pourrait créer une sorte de machine volante plus lourde que l'air, un nombre qui code cette machine, dont le rôle est de coder pour créer une version plus grande d'elle-même. Une machine plus lourde que l'air codée dans un nombre qui vole pour toujours. Oui, donc Conway a en fait travaillé sur ce problème également.

LEX FRIDMAN : Oh, ouaw !

TERENCE TAO : Conway, c'est similaire, en fait. C'était une source d'inspiration pour le projet Navier-Stokes, Conway a étudié les généralisations du problème de Collatz. Au lieu de multiplier par trois et d'ajouter un ou de diviser par deux, on a des règles de branchement plus complexes. Mais au lieu d'avoir deux cas, on peut en avoir 17, et on monte et on descend. Il a montré qu'une fois l'itération suffisamment compliquée, on peut coder des machines de Turing, rendre ces problèmes indécidables et réaliser des choses comme ça. Il a même inventé un langage de programmation pour ce type de transformations linéaires fractionnaires. Il l'a appelé **Fractran**, un jeu de mots avec **Fortran**, et il a démontré qu'on pouvait programmer, que le résultat était Turing complet. On pouvait créer un programme qui, si le nombre inséré était codé comme un nombre premier, se synchroniserait sur zéro, descendrait, sinon il monterait, et ainsi de suite. Ainsi, la classe générale de ce genre de problèmes est aussi complexe que toutes les mathématiques.

LEX FRIDMAN : Une partie du mystère des automates cellulaires dont nous avons parlé réside dans le fait qu'il existe un cadre mathématique pour dire quoi que ce soit sur les automates cellulaires. Peut-être que le même type de cadre est nécessaire pour la conjecture de Collatz.

TERENCE TAO : Oui, si vous voulez le faire, non pas statistiquement, mais si vous voulez vraiment obtenir 100 % des données pour la Terre. Donc, statistiquement, 99 % pourraient être réalisables. Mais comme tout, cela semble difficile.

LEX FRIDMAN : Selon vous, quel est le problème le plus difficile que nous ayons aujourd'hui parmi ces fameux problèmes hors de portée ? Est-ce l'hypothèse de Riemann ?

TERENCE TAO : Riemann est tout là-haut. " $P = NP$?" est un bon problème, car c'est un méta-problème. Si on le résout de manière positive, en trouvant un algorithme PnP³, cela résoudra potentiellement de nombreux autres problèmes.

LEX FRIDMAN : Il faut aussi mentionner certaines des conjectures dont nous avons parlé. Beaucoup de choses reposent désormais sur elles. Il y a des effets d'entraînement. " $P = NP$?" a plus d'effets d'entraînement que pratiquement n'importe quelle autre théorie.

TERENCE TAO : Oui, si l'hypothèse de Riemann était réfutée, ce serait un choc psychologique majeur pour les théoriciens des nombres, mais cela aurait des répercussions sur la cryptographie. Car une grande partie de la cryptographie utilise la théorie des nombres, des constructions théoriques impliquant des nombres premiers, etc.

Et cela repose en grande partie sur l'intuition que la théorie des nombres a construite au fil de très nombreuses années quant aux opérations impliquant des nombres premiers qui se comportent de manière aléatoire et à celles qui ne le sont pas. Nos méthodes de chiffrement, en particulier, sont conçues pour transformer l'information écrite en texte indiscernable du bruit aléatoire. Nous pensons donc qu'il est quasiment impossible à déchiffrer, du moins mathématiquement. Mais si une

³PnP acronyme de Perspective-n-Points.

hypothèse aussi fondamentale que l'hypothèse de Riemann est erronée, cela signifie qu'il existe des schémas réels de nombres premiers dont nous ignorons l'existence. Et s'il en existe un, il y en aura probablement d'autres. Du coup, nombre de nos systèmes de chiffrement sont remis en question.

LEX FRIDMAN : Oui, mais alors comment dire des choses sur les nombres premiers ?

TERENCE TAO : C'est ça.

LEX FRIDMAN : Comme si tu t'orientais à nouveau vers la conjecture de Collatz, parce que tu veux que ce soit aléatoire, n'est-ce pas ? Tu veux que ce soit aléatoire.

TERENCE TAO : Oui, donc plus généralement, je cherche simplement plus d'outils, plus de moyens de démontrer que les choses sont aléatoires. Comment prouver qu'une conspiration n'existe pas ?

LEX FRIDMAN : Y a-t-il une chance que " $P = NP$?" Pouvez-vous imaginer un univers possible ?

TERENCE TAO : C'est possible. Il existe plusieurs scénarios. Il y en a un ou c'est techniquement possible, mais en réalité, ce n'est jamais réalisable. Les données penchent légèrement en faveur du non, car P n'est probablement pas égal à NP .

LEX FRIDMAN : On dirait que c'est un cas similaire à l'hypothèse de Riemann. Je pense que les preuves penchent fortement vers la réponse négative.

TERENCE TAO : Les tentatives de preuves tenter plutôt de prouver que $P \neq NP$ plutôt que l'inverse. Ce qui est curieux avec " $P = NP$?", c'est que nous rencontrons beaucoup plus d'obstacles que pour presque tout autre problème. Ainsi, même s'il existe des preuves, nous disposons également de nombreux résultats qui excluent de très nombreuses approches du problème. C'est là le seul domaine où l'informatique excelle réellement. Elle affirme que certaines approches ne peuvent pas fonctionner, ce sont des théorèmes de non-conformité. Cela pourrait être indécidable. On ne sait pas.

LEX FRIDMAN : J'ai lu une histoire amusante selon laquelle, lorsque vous avez remporté la médaille Fields, quelqu'un de Internet vous a écrit pour vous demander ce que vous comptiez faire maintenant que vous avez remporté ce prix prestigieux. Et puis, vous avez répondu rapidement et très humblement : "ce métal brillant ne résoudrait aucun des problèmes sur lesquels je travaille actuellement. Je vais continuer à travailler dessus". C'est juste que, tout d'abord, je trouve amusant que vous répondiez à un courriel dans ce contexte. Ensuite, cela témoigne de votre humilité. Mais enfin, vous pourriez peut-être parler de la médaille Fields. C'est une autre façon pour moi de vous interroger sur Grigori Perelman. Que pensez-vous de son refus notoire de la médaille Fields et du prix du Millénaire, doté d'un million de dollars ? Il a déclaré que l'argent et la célébrité ne l'intéressaient pas, que le prix n'avait aucune importance pour lui. Si la preuve est correcte, aucune autre reconnaissance n'est nécessaire.

TERENCE TAO : Oui, il est un peu à part, même parmi les mathématiciens qui ont tendance à avoir des opinions plutôt idéalistes. Je ne l'ai jamais rencontré. Je pense que j'aimerais le rencontrer un

jour, mais je n'en ai jamais eu l'occasion. Je connais des gens qui l'ont rencontré, mais il a toujours eu des opinions tranchées sur certains sujets. Enfin, il n'était pas complètement isolé de la communauté mathématique. Il donnait des conférences, il écrivait des articles, etc., mais à un moment donné, il a décidé de ne plus s'engager auprès du reste de la communauté. Il était désillusionné, je ne sais pas. Il a donc décidé de se retirer et de cueillir des champignons à Saint-Petersbourg, ou quelque chose comme ça. Et c'est très bien, on peut le faire. C'est le revers de la médaille, car beaucoup des problèmes que nous résolvons ont des applications pratiques, et c'est formidable. Mais si on arrête de réfléchir à un problème, il n'a pas publié depuis dans ce domaine, mais ce n'est pas grave. Beaucoup d'autres l'ont fait aussi. Oui, donc je suppose qu'une chose que je n'avais pas réalisée au départ avec la médaille Fields, c'est qu'elle vous intègre à l'establishment. La plupart des mathématiciens, même les mathématiciens de carrière, se concentrent sur la publication du prochain article, peut-être une promotion, un grade, et le lancement de quelques projets, peut-être l'embauche de quelques étudiants, etc. Mais soudain, les gens veulent votre avis, et il faut réfléchir un peu à ce que vous pourriez dire bêtement, car vous savez que personne ne vous écouterait. C'est plus important maintenant.

LEX FRIDMAN : Est-ce que ça a été contraignant pour toi ? Réussis-tu à t'amuser, à être rebelle, à tenter des choses folles et à expérimenter des idées ?

TERENCE TAO : J'ai beaucoup moins de temps libre qu'avant. Surtout par choix. J'ai évidemment la possibilité de décliner. Du coup, je décline beaucoup de choses. Je pourrais en refuser encore plus, ou me faire une réputation de personne si peu fiable qu'on ne me poserait même plus de questions.

LEX FRIDMAN : J'adore les différentes possibilités ici encore, c'est génial !

TERENCE TAO : C'est toujours une option. Je ne passe pas autant de temps qu'en postdoctorat à travailler sur un seul problème à la fois ou à faire des bêtises. Je le fais encore un peu. Mais oui, à mesure qu'on avance dans sa carrière, certaines compétences plus générales, comme les mathématiques, placent en quelque sorte toutes les compétences techniques au premier plan. Donc, en tant que postdoctorant, on vous conseille de vous concentrer sur la démonstration de théorèmes très techniques, pour faire vos preuves et prouver les théorèmes. Mais ensuite, à mesure qu'on progresse, on commence à encadrer, à donner des entretiens et à essayer de façonner l'orientation du domaine, tant sur le plan de la recherche que parfois, en s'employant à diverses tâches administratives. C'est en quelque sorte le bon contrat social, car il faut travailler sur le terrain pour voir ce qui peut aider les mathématiciens.

LEX FRIDMAN : L'autre aspect positif de l'establishment, c'est que vous êtes une source d'inspiration pour de nombreux jeunes mathématiciens ou jeunes qui s'intéressent simplement aux mathématiques. C'est comme ça que fonctionne l'esprit humain. C'est pourquoi j'apprécie la médaille Fields, car elle inspire beaucoup de jeunes. C'est comme ça que fonctionne le cerveau humain.

TERENCE TAO : Oui.

LEX FRIDMAN : En même temps, je tiens aussi à témoigner mon respect à quelqu'un comme Gri-

gori Perelman, qui est critique envers les récompenses. Ce sont ses principes. Et tout être humain est capable, par ses principes, de faire ce que la plupart des humains ne pourraient pas faire. C'est magnifique à voir.

TERENCE TAO : Une certaine reconnaissance est nécessaire et importante. Mais oui, il est aussi important de ne pas laisser ces choses prendre le dessus et de ne se préoccuper que de la prochaine grande récompense. Enfin, oui, encore une fois, voyez-vous, ces gens essaient de résoudre uniquement des problèmes mathématiques complexes et de ne pas s'attaquer à des choses moins intéressantes, si vous voulez, mais tout de même intéressantes et instructives. Comme vous le dites, le fonctionnement de l'esprit humain nous permet de mieux comprendre les choses lorsqu'elles sont liées à des humains, et même à un petit nombre d'entre eux. Notre esprit humain est conçu de telle sorte que nous pouvons comprendre les relations entre 10 ou 20 personnes. Mais au-delà de 100 personnes, il y a une limite. Je pense qu'il y a un nom pour cela, ce phénomène du nombre au-delà duquel l'autre devient simplement l'autre. Il faut donc simplifier l'ensemble des 99,9 humains pour que l'autre devienne source d'intérêt pour soi. Souvent, ces modèles sont erronés, ce qui engendre toutes sortes de problèmes. Donc, pour humaniser un sujet, par exemple, en identifiant un petit nombre de personnes et en disant : "Ce sont des personnes représentatives de ce sujet", les modèles, par exemple, jouent un rôle, mais leur excès peut aussi être néfaste.

Car je serai le premier à dire que mon parcours n'est pas celui d'un mathématicien typique. J'ai suivi une formation accélérée. J'ai séché beaucoup de cours. Je pense avoir eu beaucoup de chance d'être encadré et d'être au bon endroit au bon moment. Ce n'est pas parce que quelqu'un n'a pas mon parcours qu'il ne peut pas être un bon mathématicien. Il peut être bon, mais avec un style très différent. Et nous avons besoin de personnes avec un style différent. Parfois, on accorde trop d'importance à celui qui réalise la dernière étape d'un projet, en mathématiques ou ailleurs, qui a nécessité des siècles, voire des décennies, avec beaucoup de travail préparatoire et beaucoup de travail préalable. Mais c'est une histoire difficile à raconter pour les non-experts, car il est plus facile de se contenter de dire "Untel ou Unetelle a fait telle chose." Cela simplifie beaucoup l'histoire.

LEX FRIDMAN : Je pense que, globalement, c'est extrêmement positif de parler de Steve Jobs comme d'un représentant d'Apple, alors que je connais personnellement, et bien sûr tout le monde connaît, l'incroyable design, les équipes d'ingénieurs exceptionnelles, et simplement les individus qui les composent. Ce n'est pas une équipe. Ce sont des individus au sein d'une équipe. Et il y a beaucoup de génie là-dedans, mais c'est juste un joli raccourci, comme π .

TERENCE TAO : Oui.

LEX FRIDMAN : Steve Jobs, π .

TERENCE TAO : Oui, oui. Comme point de départ, en première approximation.

LEX FRIDMAN : Et puis lisez quelques biographies et examinez ensuite votre première approximation beaucoup plus approfondie.

TERENCE TAO : Oui.

LEX FRIDMAN : C'est exact. Vous avez donc mentionné à Andrew Wiles que vous étiez à Princeton à cette époque.

TERENCE TAO : Oh, oui.

TERENCE TAO : Il était professeur là-bas.

LEX FRIDMAN : C'est un moment amusant de voir à quel point l'histoire est interconnectée. À cette époque, il annonçait avoir prouvé le dernier théorème de Fermat. Qu'avez-vous pensé, avec un peu de recul, de ce moment de l'Histoire des mathématiques?

TERENCE TAO : Oui, j'étais étudiant en master à l'époque. Je me souviens vaguement que la presse s'y intéressait, et on avait tous la même chose. On avait des casiers dans la même salle de courrier. On a donc tous envoyé notre courrier, et soudain, la boîte aux lettres d'Andrew Wiles s'est remplie à craquer.

LEX FRIDMAN : (*rires*) C'est une bonne mesure !

TERENCE TAO : Oui. On en a tous parlé autour d'un thé, etc. On n'a pas compris, la plupart d'entre nous n'ont pas compris la preuve. On comprend les détails de haut niveau. D'ailleurs, un projet est en cours pour formaliser la preuve de Wiles en **Lean**. Kevin Buzzard y travaille.

LEX FRIDMAN : Oui. On peut prendre cette petite tangente ? C'est difficile, car si j'ai bien compris, la preuve du dernier théorème de Fermat utilise des objets super-complicqués.

TERENCE TAO : Oui.

LEX FRIDMAN : Vraiment difficile à formaliser, non ?

TERENCE TAO : Oui, je suppose, oui, tu as raison. Les objets qu'ils utilisent, on peut les définir. Ils ont donc été définis dans **Lean**. Il est donc possible de les définir simplement. Ce n'est pas trivial, mais cela a été fait. Cependant, de nombreux faits fondamentaux concernant ces objets ont mis des décennies à être prouvés et figurent dans de nombreux articles de mathématiques. Nombre d'entre eux doivent donc également être formalisés. L'objectif de Kevin Buzzard est d'obtenir une bourse de cinq ans pour formaliser le dernier théorème de Fermat. Il ne pense pas pouvoir descendre jusqu'aux axiomes de base. Il souhaite cependant le formaliser au point que les seules choses sur lesquelles il devra s'appuyer comme boîtes noires soient celles qui étaient connues des théoriciens des nombres de l'époque en 1980. Ensuite, il faudrait faire appel à d'autres personnes, réaliser d'autres travaux pour y parvenir. C'est donc un domaine des mathématiques différent de celui auquel je suis habitué. En analyse, qui est en quelque sorte mon domaine, les objets que nous étudions sont beaucoup plus proches du terrain. J'étudie des choses comme les nombres premiers et les fonctions et des choses qui entrent dans le cadre d'un enseignement mathématique au lycée, pour au moins pouvoir les définir.

Il y a aussi ce côté algébrique très avancé de la théorie des nombres sur lequel les gens ont travaillé. Ils construisent des structures sur des structures depuis un bon moment. C'est une structure très solide à la base, du moins, et elle est extrêmement bien développée dans les manuels, etc. Mais on en arrive à un point où, si vous n'avez pas étudié pendant des années et que vous souhaitez vous renseigner sur ce qui se passe au niveau six de cette tour, il faut passer un certain temps avant de parvenir à voir quelque chose que vous reconnaissez.

LEX FRIDMAN : Qu'est-ce qui vous inspire dans son parcours, qui était similaire à celui dont nous avons parlé : sept ans, en travaillant principalement dans le secret ?

TERENCE TAO : Oui. C'est romantique, donc ça correspond assez à l'image romantique que les gens se font des mathématiciens, dans la mesure où ils les considèrent comme des sortes de magiciens excentriques. Ça a certainement accentué cette perspective. C'est une grande réussite. Sa façon de résoudre les problèmes est tellement différente de la mienne, ce qui est formidable. On a besoin de gens comme ça.

LEX FRIDMAN : Pouvez-vous en parler, par rapport à ces collaborations que vous aimez ?

TERENCE TAO : J'aime bien passer à autre chose si un problème est trop difficile. Mais il faut des personnes tenaces et courageuses. J'ai collaboré avec des personnes comme celles-là, et j'ai même eu envie d'abandonner, car la première approche que nous avons essayée n'a pas fonctionné, ni la deuxième, mais elles étaient convaincues et elles ont trouvé des solutions, comme la troisième, la quatrième et la cinquième. Et j'ai dû ravalier mes paroles. Bon, je ne pensais pas que ça marcherait, mais oui, tu avais raison.

LEX FRIDMAN : Et pour ceux qui ne le savent pas, vous êtes reconnu non seulement pour l'excellence de votre travail, mais aussi pour votre incroyable productivité, notamment pour le nombre d'articles, tous de très grande qualité. Il est donc remarquable de pouvoir passer d'un sujet à l'autre.

TERENCE TAO : Oui, ça me convient. Oui. Il y a aussi des gens très productifs qui se concentrent profondément sur un seul sujet. Je pense que chacun doit trouver sa propre méthode. Ce qui est dommage en mathématiques, c'est qu'il existe une approche universelle de l'enseignement des mathématiques. Nous avons donc un programme spécifique, etc. L'expérience peut être légèrement différente si vous participez des concours de mathématiques ou autre. Mais je pense que beaucoup de gens ne découvrent leur langue maternelle mathématique que très tard, voire trop tard.

Ils arrêtent donc de faire des mathématiques et vivent une mauvaise expérience avec un professeur qui essaie de leur enseigner une seule méthode, ils n'aiment pas ça. Ma théorie est que les humains ne sont pas nés de l'évolution, que nous n'avons pas été directement dotés d'un centre cérébral dédié aux mathématiques. Nous avons un centre de la vision, un centre du langage et d'autres centres que l'évolution a perfectionnés, mais nous n'avons pas de sens inné des mathématiques. Cependant, nos autres centres sont suffisamment sophistiqués pour que, selon les individus, nous puissions réaffecter d'autres zones de notre cerveau aux mathématiques. Ainsi, certains ont découvert comment utiliser le centre visuel pour faire des mathématiques et pensent donc de manière très visuelle. D'autres

ont réaffecté leur centre du langage et pensent de manière très symbolique. Certaines personnes, si elles sont très compétitives et aiment les jeux, possèdent une partie de leur cerveau très douée pour résoudre des énigmes et des jeux, et cette partie peut être réaffectée. Mais quand je parle à d'autres mathématiciens, ils ne réfléchissent pas vraiment, je peux dire qu'ils utilisent des styles de pensée différents des miens. Enfin, pas complètement disjoints non plus, mais ils préfèrent peut-être le visuel. En fait, je ne préfère pas tellement le visuel. J'ai besoin de beaucoup d'aires. J'utilise moi-même des supports visuels. Les mathématiques offrent un langage commun, ce qui nous permet de communiquer entre nous, même si nos pensées diffèrent.

LEX FRIDMAN : Mais vous pouvez dire qu'il y a un ensemble différent de sous-systèmes utilisés dans le processus de la réflexion.

TERENCE TAO : Oui, ils empruntent des chemins différents, ils sont très rapides dans les choses avec lesquelles j'ai du mal et vice versa, et pourtant ils arrivent toujours au même but.

LEX FRIDMAN : C'est magnifique.

TERENCE TAO : Mais je veux dire, la façon dont nous éduquons, à moins d'avoir un tuteur personnalisé ou autre, l'éducation, par nature, doit être produite en masse. Il faut enseigner à 30 enfants. S'ils ont 30 styles différents, on ne peut pas enseigner de 30 façons différentes.

LEX FRIDMAN : À ce propos, quels conseils donneriez-vous aux élèves, aux jeunes qui ont des difficultés en mathématiques, mais qui s'y intéressent et souhaitent progresser ? Dans ce contexte éducatif complexe, quel serait votre conseil ?

TERENCE TAO : Oui, c'est un problème délicat. Un point positif, c'est qu'il existe désormais de nombreuses sources d'enrichissement mathématique en dehors des salles de classe. À mon époque, il y avait déjà des concours de mathématiques et des ouvrages de mathématiques populaires à la bibliothèque. Mais maintenant, il y a **Youtube**. Il y a des forums consacrés à la résolution d'énigmes mathématiques. Et les mathématiques sont présentes ailleurs. Par exemple, il y a des amateurs qui jouent au poker pour le plaisir et qui, pour des raisons bien précises, s'intéressent à des questions de probabilités très précises. Il existe une communauté de probabilistes amateurs au poker, aux échecs, au baseball. Bref, les mathématiques sont omniprésentes. J'espère qu'avec ces nouveaux outils comme **Lean** et autres, nous pourrions intégrer le grand public aux projets de recherche en mathématiques. C'est quasiment inexistant actuellement. Dans les sciences, il y a donc une place pour la science citoyenne, comme les astronomes amateurs qui observent le ciel et qui découvrent des comètes, et les biologistes amateurs qui identifient les papillons, etc. Il existe un petit nombre d'activités permettant aux mathématiciens amateurs de découvrir de nouveaux nombres premiers, etc. Mais auparavant, comme il fallait vérifier chaque contribution, la plupart des projets de recherche mathématique ne bénéficiaient pas de la contribution du grand public. En réalité, cela prenait beaucoup de temps, à cause de la simple vérification des erreurs et de tout le reste. Mais ces projets de formalisation ont l'avantage d'attirer davantage de participants. Je suis donc certain que des lycéens ont déjà contribué à certains de ces projets de formalisation, et ont contribué à **Mathlib**. Il n'est pas nécessaire d'être titulaire d'un doctorat pour travailler sur l'une des briques.

LEX FRIDMAN : Il y a quelque chose dans la formalisation des mathématiques qui, dans un premier temps, les ouvre aussi à la communauté des programmeurs, à ceux qui sont déjà à l'aise avec la programmation. On dirait que la programmation est, c'est peut-être juste une question de ressenti, plus accessible que les mathématiques. Les mathématiques sont perçues comme extrêmes, et les mathématiques modernes, en particulier, sont perçues comme un domaine extrêmement difficile d'accès. Or, la programmation ne l'est pas. Cela pourrait donc être une simple porte d'entrée.

TERENCE TAO : On peut exécuter du code et obtenir des résultats, et afficher “Bonjour tout l'univers !” assez rapidement. Si la programmation était enseignée comme une matière presque exclusivement théorique, où l'on se contenterait d'enseigner l'informatique, la théorie des fonctions et des procédures, etc., en dehors de quelques devoirs très spécialisés, on ne programmerait pas le week-end pour le plaisir. Ce serait considéré comme aussi difficile que les mathématiques. Comme je l'ai dit, il existe des communautés de non-mathématiciens qui utilisent les mathématiques pour des objectifs très précis, comme optimiser leur jeu de poker, et pour eux, les mathématiques deviennent alors un plaisir.

LEX FRIDMAN : Quels conseils donneriez-vous en général aux jeunes pour choisir une carrière, pour se trouver ?

TERENCE TAO : C'est une question difficile. En effet, il y a beaucoup d'incertitude dans le monde aujourd'hui. Après la guerre, en Occident, si vous veniez d'une “bonne famille”, vous aviez un parcours très stable vers une bonne carrière. Vous alliez à l'université, vous faisiez des études, vous choisissiez une profession et vous vous y teniez. C'est de plus en plus révolu. Je pense donc qu'il faut simplement être adaptable et flexible. Je pense que les gens doivent acquérir des compétences transférables, comme apprendre un langage de programmation spécifique ou une matière mathématique spécifique, ce qui n'est pas une compétence super-transférable en soi. Mais savoir raisonner avec des concepts abstraits ou résoudre des problèmes face à une difficulté, ce sont des compétences dont nous aurons toujours besoin, même avec l'amélioration de nos outils. Vous travaillerez avec l'IA, le sport, etc.

LEX FRIDMAN : Mais en fait, vous êtes un cas d'école intéressant. Vous êtes l'un des plus grands mathématiciens vivants, n'est-ce pas ? Vous aviez une certaine façon de faire, et soudain, vous recommencez à apprendre. D'abord, vous continuez à explorer de nouveaux domaines, mais vous apprenez le *Lean*. Ce n'est pas une chose facile à apprendre.

TERENCE TAO : Effectivement.

LEX FRIDMAN : Pour beaucoup de gens, c'est un saut extrêmement inconfortable à effectuer, n'est-ce pas, pour beaucoup de mathématiciens.

TERENCE TAO : Tout d'abord, j'ai toujours été intéressé par les nouvelles façons de faire des mathématiques. J'ai l'impression que beaucoup de nos méthodes actuelles sont inefficaces. Mes collègues et moi passons beaucoup de temps à effectuer des calculs très routiniers ou à faire des choses que d'autres mathématiciens sauraient immédiatement faire, mais nous ne savons pas les faire. Pourquoi ne pouvons-nous pas effectuer des recherches et obtenir une réponse rapide ? C'est

pourquoi j'ai toujours été intéressé par l'exploration de nouveaux modes de travail.

Il y a quatre ou cinq ans, je faisais partie d'un comité chargé de recueillir des idées pour des ateliers intéressants à organiser dans un Institut de mathématiques. À l'époque, Peter Scholze et des spécialistes des outils de preuves informatiques venaient de formaliser l'un de ses nouveaux théorèmes, et d'autres avancées en matière de démonstration assistée par ordinateur semblaient intéressantes. J'ai alors dit : "Oh, on devrait organiser un atelier sur ce sujet. Ce serait une bonne idée".

Et puis, j'étais un peu trop enthousiaste à propos de cette idée. On m'a donc proposé de la mettre en œuvre. C'est ce que j'ai fait avec d'autres personnes, Kevin Buzzard, Jordan Ellenberg et d'autres, et ce fut un franc succès. Nous avons réuni des mathématiciens, des informaticiens et d'autres personnes, et nous nous sommes mis à jour sur l'état de l'art. C'était vraiment intéressant de voir des développements que la plupart des mathématiciens ignoraient, et de nombreuses preuves de concepts intéressantes nous ont fait entrevoir ce qui allait se passer. C'était juste avant **ChatGPT**, mais même alors, on avait eu une discussion sur les modèles de langage et leurs capacités potentielles à venir.

Cela m'a enthousiasmé pour ce sujet. J'ai donc commencé à donner des conférences sur ce sujet, et c'est un sujet que nous aurions dû être plus nombreux à étudier, maintenant que j'avais donné cette conférence. Puis **ChatGPT** est arrivé, et soudain, l'IA s'est répandue partout. J'ai donc été interviewé à de nombreuses reprises sur ce sujet, et en particulier sur l'interaction entre l'IA et les assistants de preuve formelle. Et j'ai dit : "Oui, il faudrait les combiner."

C'est une synergie parfaite. Et à un moment donné, j'ai réalisé qu'il ne fallait pas se contenter de parler, mais il fallait passer à l'action. Je ne travaille ni en apprentissage automatique, ni en formalisation de preuves, et il y a une limite à ce que je peux faire en me basant sur l'autorité et en disant : "Je suis un mathématicien reconnu. Faites-moi confiance quand je dis que cela va changer les mathématiques", si je ne le fais pas moi-même. J'ai donc ressenti le besoin de me justifier. En fait, pour de nombreux projets, je ne sais pas vraiment à l'avance combien de temps je vais devoir leur consacrer. Et ce n'est qu'une fois plongé dans un projet que je réalise à quel point je suis engagé.

LEX FRIDMAN : Eh bien, c'est profondément admirable que tu sois prêt à te lancer dans la bataille, à être, d'une certaine manière, un débutant. Ou à relever certains défis qu'un débutant rencontrerait. De nouveaux concepts, de nouvelles façons de penser, et même, tu sais, être nul dans un domaine que d'autres maîtrisent mieux. Je pense que, d'après cette conférence, tu peux être un mathématicien médaillé Fields mais pourtant, un étudiant de premier cycle en sait plus que toi.

TERENCE TAO : Oui. Je pense que les mathématiques sont intrinsèquement tellement vastes de nos jours que personne ne connaît tout des mathématiques modernes, et inévitablement, nous faisons des erreurs, et on ne peut pas les dissimuler par une sorte de bravade, parce qu'on vous demandera des preuves, et si vous n'avez pas de preuves, eh bien, vous n'avez pas de preuves.

LEX FRIDMAN : J'adore les mathématiques.

TERENCE TAO : Oui. (*Lex rit*) Donc ça nous aide à rester honnêtes. Ce n'est pas la panacée, mais je pense que nous avons davantage une culture de l'aveu d'erreur, car on nous y force constamment.

LEX FRIDMAN : Question ridicule. Je m'en excuse encore une fois. Qui est le plus grand mathématicien de tous les temps ? (*Terence rit*) Peut-être quelqu'un qui n'est plus parmi nous. Qui sont les candidats ? Euler, Gauss, Newton, Ramanujan, Hilbert... ?

TERENCE TAO : Donc tout d'abord, comme mentionné précédemment, il y a une certaine dépendance au temps.

LEX FRIDMAN : Disons aujourd'hui même.

TERENCE TAO : D'accord. Si l'on cumule les données au fil du temps, par exemple, Euclide est l'un des principaux prétendants. Et puis, peut-être, avant lui, des mathématiciens anonymes, ceux qui ont inventé le concept de nombre.

LEX FRIDMAN : Les mathématiciens d'aujourd'hui ressentent-ils encore l'impact de Hilbert ?

TERENCE TAO : Oh oui.

LEX FRIDMAN : Directement, malgré tout ce qui s'est passé au *xxe* siècle?

TERENCE TAO : Oui, les espaces de Hilbert. On a plein de choses qui portent le nom de Hilbert, bien sûr. Rien que l'organisation des mathématiques et l'introduction de certains concepts. Ses 23 problèmes ont eu une influence considérable..

LEX FRIDMAN : Il y a un étrange pouvoir à déclarer quels problèmes sont difficiles à résoudre, à fournir l'énoncé des problèmes ouverts.

TERENCE TAO : Oui, c'est une capacité de spectateur omniprésent. Si personne ne dit "Tu devrais faire telle chose", tout le monde attend que quelqu'un d'autre fasse quelque chose, et rien ne se passe. Il faut absolument enseigner aux étudiants en mathématiques de premier cycle qu'il faut toujours essayer quelque chose. On voit souvent des étudiants de premier cycle se montrer paralysés lorsqu'ils essaient de résoudre un problème de mathématiques. S'ils reconnaissent qu'une technique peut être appliquée, ils l'essaieront.

Mais il y a des problèmes pour lesquels ils voient qu'aucune de leurs techniques standard ne s'applique. Et la réaction courante est alors la paralysie : "Je ne sais pas quoi faire". Je crois qu'il y a une citation des Simpson : "Je n'ai rien essayé, et je suis à court d'idées." (*Lex rit*) L'étape suivante consiste donc à tout essayer, aussi stupide soit-elle. Et en fait, plus c'est stupide, mieux c'est. Une technique qui est presque vouée à l'échec. Mais la façon dont elle échoue sera instructive. Elle échoue parce qu'on ne prend pas du tout en compte cette hypothèse. Or cette hypothèse doit être utile. C'est un indice.

LEX FRIDMAN : Je crois que vous avez aussi suggéré quelque part cette approche fascinante qui

m'a vraiment marqué, car les étudiants l'utilisent et elle fonctionne vraiment. Je crois que vous avez dit que cela s'appelle la *procrastination structurée* !

TERENCE TAO : Oui.

LEX FRIDMAN : C'est quand vous ne voulez vraiment pas faire quelque chose, alors vous imaginez une chose que vous ne voulez plus faire.

TERENCE TAO : Oui.

LEX FRIDMAN : C'est pire que ça. Et puis, de cette façon, on remet les choses à plus tard en ne faisant pas, ce qui est pire.

TERENCE TAO : Oui, oui.

LEX FRIDMAN : C'est une bonne astuce. Ça marche vraiment. (*rires*)

TERENCE TAO : Oui, oui, c'est vrai. La psychologie est primordiale dans tous les domaines. On parle à des athlètes, comme des marathoniens, et ils nous expliquent que ce qui est le plus important, à côté de leur programme d'entraînement, de leur alimentation, etc., c'est en grande partie la psychologie : on se persuade que l'objectif est réalisable pour se motiver.

LEX FRIDMAN : Y a-t-il quelque chose que notre esprit humain ne sera jamais capable de comprendre ?

TERENCE TAO : Eh bien, en tant que mathématicien, je veux dire, par induction, il doit y avoir un nombre suffisant, un grand nombre de choses que tu ne peux pas comprendre. (*Lex rit*) C'est la première chose qui m'est venue à l'esprit.

LEX FRIDMAN : Effectivement, mais même de manière générale, y a-t-il quelque chose dans notre esprit qui va nous limiter, même avec l'aide des mathématiques ?

TERENCE TAO : Bon, d'accord, je veux dire, jusqu'à quel point êtes-vous prêt à argumenter ; par exemple, si je n'avais même pas de stylo et de papier, si je n'avais aucune technologie... Admettons je n'aie pas droit à un tableau noir, à un stylo et à du papier.

LEX FRIDMAN : Vous seriez déjà beaucoup plus limité que vous ne l'êtes.

TERENCE TAO : Incroyablement limité. Même la langue, l'anglais, est une technologie. Elle a été très intériorisée.

LEX FRIDMAN : Vous avez donc raison, la formulation du problème est incorrecte, car il n'existe plus vraiment d'humain isolé. Nous sommes déjà augmentés de manières extrêmement complexes et sophistiquées.

TERENCE TAO : Oui.

LEX FRIDMAN : Nous sommes donc déjà une sorte d'intelligence collective.

TERENCE TAO : Oui, oui, oui. Donc, l'humanité, au pluriel, a en principe beaucoup plus d'intelligence, dans ses bons jours, que l'ensemble des humains. Elle peut en avoir moins. D'accord, mais oui, donc oui, la communauté mathématique, au pluriel, est une entité incroyablement et superbement intelligente, qu'aucun mathématicien seul ne peut égaler. On le voit un peu sur ces sites d'analyse de questions. Il y a **Math Overflow**, la version mathématique de **Stack Overflow**. On y trouve parfois des réponses très rapides à des questions très complexes de la part de la communauté, et c'est un plaisir de les observer, en tant qu'expert.

LEX FRIDMAN : Je suis un spectateur assidu de ce site. Je constate simplement le talent des différentes personnes, la profondeur des connaissances de certaines, et leur volonté de s'engager avec rigueur et nuance sur chaque question. C'est vraiment passionnant à regarder. C'est presque amusant. Qu'est-ce qui vous donne de l'espoir dans tout ce qui se passe, pour la civilisation humaine ?

TERENCE TAO : Je pense que la jeune génération est toujours très créative, enthousiaste et inventive. C'est un plaisir de travailler avec de jeunes étudiants. Les progrès de la science nous montrent que des problèmes autrefois très difficiles peuvent devenir triviaux à résoudre. C'était comme la navigation. Le simple fait de savoir où l'on se trouvait sur la planète était un problème terrible. Des gens mouraient ou perdaient des fortunes parce qu'ils ne savaient pas s'orienter. Et nous avons des appareils dans nos poches qui le font automatiquement pour nous. C'est un problème complètement résolu. Alors, des choses qui nous paraissent irréalisables aujourd'hui pourraient être simplement des exercices à la maison dans le futur. (*rires*)

LEX FRIDMAN : Oui, une des choses que je trouve vraiment triste à propos de la finitude de la vie, c'est que je ne pourrai pas voir toutes les choses cool que nous allons créer en tant que civilisation, vous savez ? Parce que dans les 100 prochaines années, 200 ans, imaginez simplement réapparaître dans 200 ans.

TERENCE TAO : Oui, eh bien, il s'est déjà passé beaucoup de choses. Vous savez, comme si on pouvait remonter le temps et parler à son moi adolescent, ou quelque chose comme ça. Vous voyez ce que je veux dire ? Internet et maintenant l'IA, enfin, on commence à les intérioriser et à dire "Oui, bien sûr qu'une IA peut comprendre notre voix et donner des réponses raisonnables, même légèrement erronées, à n'importe quelle question. Mais oui, c'était hallucinant, même il y a deux ans".

LEX FRIDMAN : Sur le moment, c'est hilarant de voir ça sur Internet, le drame, les gens prennent tout pour acquis très vite. Et puis, nous, les humains, semblons nous amuser avec le drame. Sur toute création, quelqu'un doit adopter une opinion, quelqu'un doit adopter une opinion opposée, et on en discute. Mais quand on regarde l'évolution des choses, je veux dire, ne serait-ce que les progrès de la robotique, il suffit de prendre du recul et de se dire "Waouh, c'est magnifique la façon dont les humains sont capables de créer ça."

TERENCE TAO : Oui, lorsque l'infrastructure et la culture sont saines, la communauté humaine peut être beaucoup plus intelligente, mature et rationnelle que les individus qui la composent.

LEX FRIDMAN : Eh bien, s'il y a un endroit où je peux toujours compter sur la rationalité, c'est dans la section commentaires de ton blog, dont je suis un grand fan. On y trouve beaucoup de gens vraiment intelligents. Et merci, bien sûr, d'y avoir partagé ces idées. Et je suis vraiment honoré que tu aies accepté de me consacrer du temps aujourd'hui. J'attendais ça avec impatience depuis longtemps. Terry, je suis un grand fan. Tu m'inspires. Tu inspires des millions de personnes. Merci infiniment pour cet échange.

TERENCE TAO : Merci, c'était un plaisir.

LEX FRIDMAN : Merci d'avoir écouté cette conversation avec Terence Tao.