Traduction des pages 306 à 308 extraites du chapitre "Types d'algèbres de von Neumann et traces", du livre (en anglais) Théorie des algèbres d'opérateurs I, de Masamichi Takesaki, 1979, aux éditions Springer Verlag New York-Heidelberg-Berlin, Denise Vella-Chemla, mars 2023.

Nous allons maintenant analyser la position relative de deux projections sur un espace de Hilbert $\mathfrak{H}$. Soient e et f des projections non nulles sur $\mathfrak{H}$. Pour abréger, on écrira $e^\perp = 1-e$ et $f^\perp = 1-f$. On a alors

$$e = e\wedge f + e\wedge f^\perp + (e - e\wedge f - e\wedge f^\perp),$$
$$f = e\wedge f + e^\perp\wedge f + (f - e\wedge f - e^\perp\wedge f).$$

Posons

$$e_0 = e - e\wedge f - e\wedge f^\perp, \qquad e_1 = e\wedge f + e\wedge f^\perp,$$
$$f_0 = f - e\wedge f - e^\perp\wedge f, \qquad f_1 = e\wedge f + e^\perp\wedge f.$$

Il est évident de vérifier que e et f_1 (resp. e_1 et f) commutent et que

$$1 = e\wedge f + e\wedge f^\perp + e^\perp\wedge f + e^\perp\wedge f^\perp + e_0\vee f_0,$$
$$e_0\wedge f_0 = e_0\wedge f_0^\perp = e_0^\perp\wedge f_0 = 0.$$

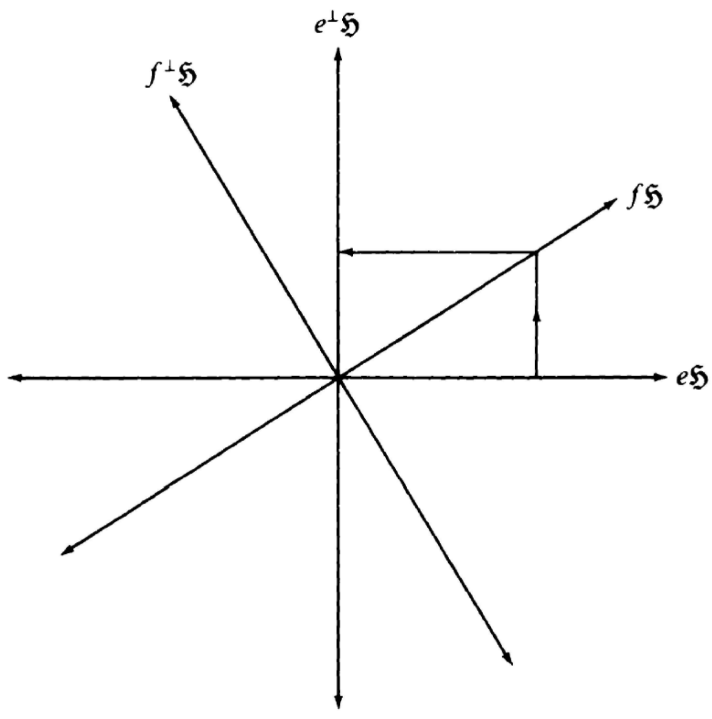
Puisque la position relative de e_1 et f (resp. e et f_1) est si simple que les décompositions $e_1 = e_1 f + (e_1 - e_1 f)$ et $f = e_1 f + (f - e_1 f)$ fournissent une description complète de la paire e_1 et f, l'analyse de e_0 et f_0 suffit pour comprendre la paire e et f. Par conséquent, en remplaçant e et f par e_0 et f_0, et en oubliant $(e\vee f)^\perp$, on arrive à :

$$(*) \qquad \begin{cases} e\wedge f = e^\perp\wedge f = e\wedge f^\perp = 0\ ; \\ e\vee f = 1, \qquad \text{par conséquent} \qquad e^\perp\wedge f^\perp = 0. \end{cases}$$

On a alors

$$1 = e\vee f = e^\perp\vee f = e\vee f^\perp = e^\perp\vee f^\perp.$$

La situation de e et f peut être illustrée par la figure suivante :



On a alors, dans l'algèbre de von Neumann $\mathscr{M}$ engendrée par e et f,

$$\begin{aligned} e \quad &= e - e \wedge f^{\perp} \sim e \vee f^{\perp} - f^{\perp} = f = f - e \wedge f \sim e \vee f - e \\ &= e^{\perp} = e^{\perp} - e^{\perp} \wedge f \sim e^{\perp} \vee f - f = f^{\perp}. \end{aligned}$$

Par conséquent, $e, e^{\perp}, f$, et $f^{\perp}$ sont toutes équivalentes dans $\mathscr{M}$. Donc il existe une isométrie partielle $u \in \mathscr{M}$ avec $u^*u = e$ et $uu^* = e^{\perp}$. Mais, on veut avoir une isométrie partielle spécifique qui soit directement reliée à cette situation. À partir de la relation spéciale (*) entre e et f, il s'ensuit que $e^{\perp}fe$ envoie $e\mathfrak{H}$ injectivement sur un sous-espace dense de $e^{\perp}\mathfrak{H}$. Soit $a = e^{\perp}fe$ et $a = uh$ la décomposition polaire. Il découle alors de ce qui précède que $u^*u = e$ et $uu^* = e^{\perp}$. On utilise alors cet u pour fabriquer une matrice unitaire $\{e_{11}, e_{12}, e_{21}, e_{22}\}$. Posons

$$e_{11} = e, \qquad e_{21} = u, \qquad e_{12} = u^*, \qquad e_{22} = e^{\perp}.$$

Avec cette matrice unitaire, on a une représentation par une matrice 2×2 de $\mathscr{M}$ sur $\mathscr{M}_e$. En d'autres termes, tout élément de $\mathscr{M}$ est représenté par une matrice 2×2 avec ses entrées prises dans $\mathscr{M}_e$, et $\{e_{ij}\}$ est donné par les égalités suivantes :

$$e = e_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \; ; \qquad e_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \; ;$$

$$e_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad e_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = e^{\perp}.$$

Soit

$$f = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix}$$

la matrice de f. Puisque $a = e^{\perp}ae$, on a $ehe = h$; ainsi, on obtient

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ f_{21} & 0 \end{bmatrix} = e^{\perp}fe = uh = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ h & 0 \end{bmatrix},$$

où

$$h \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} h & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

sont identifiés. Ainsi on obtient $f_{21} = h$; du fait du caractère auto-adjoint de f, $h = f_{12}$. Par conséquent, on obtient

$$f = \begin{bmatrix} f_{11} & h \\ h & f_{22} \end{bmatrix}$$

À partir de l'égalité $f = f^2$, on obtient

$$\begin{cases} f_{11}^2 + h^2 = f_{11}, & f_{11}h + hf_{22} = h \\ \\ hf_{11} + f_{22}h = h, & h^2 + f_{22}^2 = f_{22} \end{cases}$$

Par conséquent f_{11} et f_{22} commutent tous les deux avec h, et donc, on obtient $h(f_{11} + f_{22} - 1) = 0$. Puisque h est injective dans $e\mathfrak{H}$, on obtient $f_{11} + f_{22} = 1$. Puisque $f_{11} \geq 0$ et $f_{22} \geq 0$, on pose $c = f_{11}^{1/2}$ et $s = f_{22}^{1/2}$. Alors on obtient

$$h = (f_{11} - f_{11}^2)^{1/2} = cs.$$

Ainsi on obtient l'expression suivante :

$$\begin{cases} e = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \; ; \\ \\ f = \begin{bmatrix} c^2 & cs \\ cs & s^2 \end{bmatrix} \; ; \quad 0 \leq c \leq 1 \; ; \quad 0 \leq s \leq 1 \; ; \quad c^2 + s^2 = 1. \end{cases}$$

Dans le cas où dim $\mathfrak{H} = 2$, les variables c et s ci-dessus sont les cosinus et sinus de l'angle entre $e\mathfrak{H}$ et $f\mathfrak{H}$. Par conséquent c et s sont des généralisations des cosinus et sinus de l'angle entre $e\mathfrak{H}$ et $f\mathfrak{H}$. On observe également que

$$|e - f| = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix}, \qquad |e - f^{\perp}| = \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix}.$$

Maintenant, résumons les arguments ci-dessus :

Théorème 1.41. *Si e et f sont deux projections sur un espace de Hilbert $\mathfrak{H}$, et si $\mathscr{M}$ est l'algèbre de von Neumann engendrée par e et f, alors*

(i) $\mathscr{M}$ est de type I,

(ii) il existe une projection centrale unique $z \in \mathscr{M}$ telle que $\mathscr{M}z$ est de type I_2, et $\mathscr{M}(1-z)$ est abélienne et dim $\mathscr{M}(1-z) \leq 4$.

Définition 1.42. Pour deux projections e et f, on écrit $s(e, f) = |e - f|$ et $c(e, f) = |e - f^{\perp}|$, et on les appelle le *sinus* et le *cosinus* de e et f, respectivement.