Nouveaux résultats expérimentaux sur la conjecture de Goldbach

M. L. Stein et P. R. Stein

1. Introduction. La célèbre conjecture de Goldbach, qui stipule que tout nombre pair peut être représenté d'au moins une façon comme une somme de deux nombres premiers, a maintenant 222 ans et elle reste non démontrée malgré l'évidence accablante de sa vérité. L'avancée la plus important de ce siècle a été amenée par le travail de I. Vinogradov [1], qui a montré que tous les nombres impairs plus grands qu'un (grand) entier non spécifié peuvent être décomposés en une somme de trois nombres premiers. Si la conjecture de Goldbach était démontrée, le résultat de Vinogradov en découlerait trivialement, mais rien ne peut être démontré sur la première en supposant la dernière.

Au vu de l'échec des méthodes analytiques pour résoudre le problème, nous avons pensé qu'il pourrait être utile d'entreprendre une étude expérimentale détaillée de ce que l'on appelle la courbe de Goldbach - qui montre le nombre de solutions distinctes ν_{2n} de l'équation $2n = p_i + p_j$ - dans l'espoir de découvrir de nouveaux faits qui pourrait suggérer une approche nouvelle du problème central. Que nous ayons réussi en cela reste à voir. Dans tous les cas, notre travail nous a amenés à trois nouvelles conjectures et à une compréhension heuristique de la courbe effective de Goldbach, au moins dans l'intervalle fini $2n < 150\,000$. On discute de ces sujets dans les quatre prochaines sections.

L'analogue de la conjecture de Goldbach pour les nombres premiers - désignée ci-après par $G(P)$ - peut également être faite pour d'autres nombres “criblés”. En particulier, elle semble être vérifiée par les “nombres chanceux” définis initialement par S. Ulam [2]. De plus, les trois conjectures décrites ci-dessous peuvent être également mises en avant de façon plausible dans le cas “chanceux”. Une brève description des résultats pour les nombres chanceux est donnée dans la section 6.

2. La première conjecture. Les données brutes pour cette recherche sont une table des nombres de “décompositions de Goldbach” ν_{2n} pour tous les nombres pairs du domaine $2n < 150\,000$. (Depuis que cet article a été écrit, cette table et la table correspondante pour les nombres chanceux ont été publiées dans un rapport de Los Alamos numéro LA 3106, Vol. I et II. Le domaine de ces tables est $2n < 200\,000$.) Cette table a été calculée sur l'ordinateur électronique MANIAC II du Laboratoire. Elle a été méticuleusement vérifiée, à la fois par répétition et par de nombreuses “vérifications ponctuelles” pour des valeurs particulières de $2n$ [4].

La première conjecture basée sur ces données est la suivante.

Conjecture I (P). *Pour tout entier $k > 0$, il existe au moins un nombre pair $2n$ tel que $\nu_{2n} = k$.*

Cette conjecture qui a été énoncée dans les premières étapes des calculs semble maintenant assez solide. Elle est vraie pour tout $k \leq 1911$. Le premier écart est en $k = 1912$; les quelques écarts suivants ont lieu pour $k = 1942, 2078, 2113, 2140$. (Après cela, les écarts deviennent assez fréquents). Sur la base de l'expérience, nous devrions nous attendre à ce qu'au moins une solution

Laboratoire scientifique de Los Alamos,
Référence : Mathematics Magazine, Vol. 38, N° 2 (Mars 1965), pp. 72-80
Transcription, traduction, Denise Vella-Chemla, janvier 2023.

de $\nu_{2n} = 1912$ soit trouvée en étendant notre table jusqu'à $2n < 160\,000$. La plus grande valeur de ν_{2n} trouvée dans notre domaine est 2969, qui advient pour $2n = 143\,220$.

Il n'est pas du tout évident que cette conjecture dépende de la vérité de $G(P)$; son statut précis au regard de cette dernière reste à investiguer. Expérimentalement, le nombre de solutions de l'équation $\nu_{2n} = k$ pour un k donné est assez conséquent. Jusqu'à présent, nous n'avons pas regardé cette nouvelle courbe en détail.

3. La seconde conjecture. La conjecture suivante suggérée par nos données s'énonce comme suit.

Conjecture II (P). *Pour tout entier $k > 8$, la plus petite solution $2n$ de l'équation $\nu_{2n} = k$ est telle que* $2n \equiv 0 \pmod 6$.

En fait, cela est vérifié pour tout $k > 4$ pour lequel on a trouvé une solution jusque là, avec l'exception de $k = 8$. (La première valeur de $2n$ pour laquelle $\nu_{2n} = 8$ est 140). La conjecture est rendu un peu plus plausible qu'elle ne semble l'être au premier coup d'œil en notant que la courbe de Goldbach a "presque toujours" un maximum local aux points $2n \equiv 0 \pmod 6$. Cela est attendu au vu du fait qu'il y a - très grossièrement - deux fois plus de décompositions de la forme $6m = p_i + p_j$ qu'il n'y en a de la forme $6m \pm 2 = p_i + p_j$, puisque dans le premier cas, les nombres premiers $6j \pm 1$ des deux parités sont des décomposants de Goldbach possibles. Effectivement, tous les nombres pairs $36 < 2n < 150\,000$ qui sont divisibles par 6 ont davantage de décompositions de Goldbach que leurs voisins immédiats, avec deux exceptions : il y a un "contact" ($\nu_{1542} = \nu_{1540} = 46$) et un "croisement" ($\nu_{80080} = 1006, \nu_{80082} = 1005$).

4. La structure de la courbe de Goldbach. La structure détaillée de la courbe de Goldbach est très irrégulière ; la grandeur et la position des différents maxima et minima sembleraient être assez imprévisibles. Pourtant, il s'avère qu'un raffinement de l'argument fruste de la section précédente (concernant les maxima locaux aux points $2n \equiv 0 \pmod 6$) amène une prescription qui nous permet de prédire la courbe remarquablement dans le détail. En utilisant cette prescription, on a été capable de prédire la courbe complète dans le domaine $30\,000 \leq 2n < 150\,000$ avec une erreur globale (absolue) de 2.63% et une erreur maximum de 13.74% (qui a lieu pour le point $2n = 33\,038$).

Avant de décrire la formule, on remarque que la raison pour laquelle un nombre dont la factorisation contient un nombre relativement grand de facteurs premiers distincts devrait avoir un nombre grand correspondant de décompositions de Goldbach. Cela est simplement dû au fait qu'il y a moins de composés de la forme $2n - p$, puisque tous les nombres composés partageant un facteur premier de $2n$ sont exclus. Par conséquent, il y a une plus grande chance correspondante que $2n - p$ soit un nombre premier. Il est alors évident que la structure réelle de la factorisation de $2n$ est importante pour déterminer la taille de ν_{2n}. Une autre considération pertinente est la "parité" (ou classe résiduelle) de $2n$ modulo quelque entier convenablement choisi. (Ces considérations sont, bien sûr, non indépendantes, mais il est pratique de les considérer ainsi pour nos objectifs.)

L'existence de certains maxima locaux est "expliquée" en considérant les nombres pairs modulo 6. On peut obtenir des résultats plus détaillés en utilisant, disons, $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ ou même $210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$, etc. Cela nous amène à définir les quantités suivantes.

Soit $\prod_k$ le produit des k premiers nombres premiers où l'on prend 2 comme premier nombre premier. Dénotons par n_s le nombre de solutions de

(1) $$S \equiv r_i + r_j \pmod{\textstyle\prod_k}$$

où r_i, r_j appartient à l'ensemble des $\phi(\prod_k)$ entiers premiers à $\prod_k$, et s est un nombre pair, $0 \leq s < \prod_k$. Pour notre objectif, on prend $r_i + r_j$ et $r_j + r_i$ comme étant des décompositions différentes à moins que $r_i = r_j$.

Maintenant les valeurs possibles de s tombent dans 2^{k-1} "types" de restes selon la façon dont les nombres premiers de l'ensemble $\{2, 3, 5, 7, \ldots, p_k\}$ apparaissent dans la décomposition de s. Ainsi chaque s est de la forme $2^{\alpha_1}3^{\alpha_2}5^{\alpha_3}\ldots p_k^{\alpha_k}.R$, où R ne contient aucun des k premiers nombres premiers comme facteur. Un type de reste est complètement défini en spécifiant lequel des α_i est non nul, mais il est indépendant de leurs valeurs effectives.

Il est facile de voir que n_s est le même pour tout s appartenant à un type de reste donné. On peut étiqueter les types de restes (l'ordre est arbitraire) par les indices i : $1 \leq i \leq 2^{k-1}$. Pour tout s appartenant à un type de reste i, on écrit :

(2) $$n_s = g_i^{(k)}.$$

Par exemple, si $k = 4$, les valeurs de $g_i^{(k)}$ sont comme suit (ici on spécifie le type de reste en donnant les nombres premiers effectifs qui apparaissent) :

TABLE I

Type	$g_i^{(k)}$
(2)	15
(2, 3)	30
(2, 5)	20
(2, 7)	14
(2, 3, 5)	40
(2, 3, 7)	36
(2, 5, 7)	24
(2, 3, 5, 7)	48

Il est facile de montrer que les $g_i^{(k)}$ peuvent être calculés par récurrence sur k :

a. Si i est le type de reste pour $\prod_k$ qui ne contient pas le nombre premier p_k alors

(3) $$g_i^{(k)} = (p_k - 2)g_i^{(k-1)}.$$

b. Si i contient le nombre premier p_k alors

(4) $$g_i^{(k)} = (p_k - 1)g_{i^*}^{(k-1)},$$

où i^* est le type de reste qui a pour résultat d'omettre le nombre premier p_k.

Comme défini ci-dessus, les $g_i^{(k)}$ sont les nombres d'entiers différents premiers à $\prod_k$ (plutôt que le nombre de solutions) qui apparaissent comme solutions de l'équation (1). Ainsi, pour $k = 3$:

$$
\begin{array}{rl}
s = 0: & \\
1 + 29 \equiv 0 \pmod{30} & \\
7 + 23 \equiv 0 \pmod{30} & \\
11 + 19 \equiv 0 \pmod{30} & g = 8 \\
13 + 17 \equiv 0 \pmod{30} & \\
s = 2: & \\
1 + 1 \equiv 2 \pmod{30} & \\
13 + 19 \equiv 2 \pmod{30} & g = 3
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rl}
s = 6: & \\
7 + 29 \equiv 6 \pmod{30} & \\
13 + 23 \equiv 6 \pmod{30} & g = 6 \\
17 + 19 \equiv 6 \pmod{30} & \\
s = 10: & \\
11 + 29 \equiv 10 \pmod{30} & \\
17 + 23 \equiv 10 \pmod{30} & g = 4
\end{array}
$$

À partir de ces valeurs des $g_i^{(3)}$, la table I est facilement calculée par les équations (3) et (4).

Nous sommes maintenant prêts à fournir notre prescription pour prédire ν_{2n}. Soit $2n$ ayant une factorisation connue $2^{\alpha_0} p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots$, et soit son type de reste i (mod $\prod_k$). Soit $P_a^{(k)}$ le nombre de nombres premiers $\leq n$, en excluant $1, 3, 5, \ldots, p_k$, et soit P_b le nombre de nombres premiers entre n et $2n$. Soit $D^{(k)}$ le nombre de nombres entiers $< n$ qui sont premiers à $2, 3, 5, \ldots, p_k$ et à un quelconque nombre premier supplémentaire apparaissant dans la factorisation de $2n$. Le nombre "attendu" $E_{2n}(\nu)$ de décompositions de Goldbach de $2n$ est alors donné par l'expression :

$$E_{2n}(\nu) = \frac{g_i^{(k)}}{\phi(\prod_k)} \frac{P_a^{(k)}}{D^{(k)}} P_b. \tag{5}$$

Ici la collection de facteurs multipliés par P_b est principalement une expression approchée de la probabilité que $2n - p$ soit un nombre premier, p étant un nombre premier de la parité appropriée à partir de la moitié supérieure de l'intervalle. Dans cette formule, $D^{(k)}$ est facilement calculé par l'algorithme bien connu d'"inclusion-exclusion" une fois que la factorisation de $2n$ est connue. Le type de reste (mod $\prod_k$) est également déterminé de façon évidente. Le calcul des $g_i^{(k)}$ a déjà été décrit. $P_a^{(k)}, P_b$ peuvent, bien sûr, être obtenus à partir d'une table des nombres premiers (ou, de façon équivalente, à partir d'une certaine approximation analytique, avec suffisamment de précision pour cet objectif). Ainsi, il n'y a effectivement pas de constante empirique dans cette formule.

On a appliqué cette formule à tous les nombres pairs dans le domaine $30\,000 \leq 2n < 150\,000$ pour $k = 5$, i.e., pour $\prod_k = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 2310$. Pour chaque cas, on a calculé le pourcentage d'erreur :

$$\varepsilon = 100(E_{2n}(\nu) - \nu_{2n})/\nu_{2n}. \tag{6}$$

Notons que, comme défini, $E_{2n}(\nu)$ n'est en général pas un entier ; nous ne nous sommes pas préoccupés de l'arrondir.

ε est positif dans la grande majorité des cas, mais pour quelques nombres pairs, notre formule donne une sous-estimation ; dans ces cas, l'erreur absolue est petite. Dans la table II, on liste le nombre de cas pour lesquels l'erreur absolue reste entre des limites spécifiques.

TABLE II

Absolute % Error	Number of Cases	Absolute % Error	Number of Cases
$\lvert\epsilon\rvert < .05$	531	$5.00 \leqq \lvert\epsilon\rvert < 6.00$	2902
$.05 \leqq \lvert\epsilon\rvert < 1.00$	9875	$6.00 \leqq \lvert\epsilon\rvert < 7.00$	1295
$1.00 \leqq \lvert\epsilon\rvert < 2.00$	13161	$7.00 \leqq \lvert\epsilon\rvert < 8.00$	600
$2.00 \leqq \lvert\epsilon\rvert < 3.00$	14179	$8.00 \leqq \lvert\epsilon\rvert < 9.00$	235
$3.00 \leqq \lvert\epsilon\rvert < 4.00$	10949	$9.00 \leqq \lvert\epsilon\rvert < 10.00$	104
$4.00 \leqq \lvert\epsilon\rvert < 5.00$	6098	$\lvert\epsilon\rvert > 10.00$	71

Comme énoncé dans l'introduction, l'erreur maximum est 13.74%, et elle a lieu pour $2n = 33\,038$; ici $\nu = 224, E = 254.78$.

Finalement, on a calculé ν_{2n} et $E_{2n}(\nu)$ pour trois grandes valeurs en dehors du domaine de notre table ($k = 5$):

TABLE III

$2n$	ν_{2n}	$E_{2n}(\nu)$	ϵ
1000000	5402	5533.46	2.43
1000002	8200	8300.07	1.22
1000004	4161	4277.85	2.81

5. Nombre premiers minimaux : la troisième conjecture. À la lumière de l'évidence expérimentale, $G(P)$ s'avère être une conjecture plutôt modeste. Ceci est illustré par la table IV, qui donne les valeurs de N^* et ν^* telles que, si $2n > N^*$, alors $\nu_{2n} > \nu^*$.

TABLE IV

N^*	ν^*	N^*	ν^*
4688	50	63962	400
11672	100	75188	450
19246	150	85616	500
27908	200	95276	550
36242	250	105368	600
45998	300	116618	650
55446	350	126878	700

En d'autres termes, tous les nombres pairs plus grands que 85616 ont plus de 500 décompositions de Goldbach, etc. La table IV est, bien sûr, basée sur des calculs pour le domaine $2n < 150\,000$, mais la tendance générale de la courbe rend invraisemblable que la table soit incorrecte.

L'un dans l'autre, il semblerait que la séquence des nombres premiers soit beaucoup plus dense que ce qui est nécessaire pour que $G(P)$ soit vérifiée. Par conséquent, on a pensé qu'il serait intéressant de construire une sous-séquence des nombres premiers pour laquelle $G(P)$ serait vérifiée par construction et d'étudier sa densité. Naturellement, toute telle séquence s'arrêtera si $G(P)$ est fausse et peut même s'arrêter si $G(P)$ est vraie.

La séquence sur laquelle nous avons travaillé peut être définie récursivement de la façon suivante. Prenons pour les m premiers termes de notre séquence $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_m \equiv (M)$. Formons tous les nombres pairs de la forme $2n = p_i + p_j$, où $p_i, p_j \in (M)$. Soit $2n^*$ le premier nombre pair non exprimable de cette manière. On choisit alors le plus grand nombre premier $p < 2n^*$ tel que $p + p_j = 2n^*$, $p_j \in (M)$. On pose alors $p_{m+1} = p$ et on continue.

Les quelques premiers termes de la séquence sont : 1, 3, 7, 11, 13, 17, 31, 29, 47, 41, 53, 67, 83, 103, 109, 127, 139, 137, 157, 181,.... Notons que l'algorithme ne produit pas ces nombres premiers - on les appellera "nombres premiers" minimaux - en ordre strictement croissant ; ce "backtracking" s'avère être une caractéristique inévitable de notre prescription qui persiste lorsque la séquence se développe vers des valeurs plus élevées.

La séquence de nombres premiers minimale a été étendue avec succès jusqu'à $2n = 1\,000\,000$. Dans ce domaine, il y a exactement 3 000 termes, le dernier étant 999 043 ; c'est le 78 437$^{\text{ième}}$ nombre premier dans la séquence naturelle. Sur un graphique log-log, il s'avère que

$$m \sim \pi(p_m) \quad \text{avec} \quad r \simeq 0.6 \quad \text{ou} \quad 0.59, \tag{7}$$

où p_m est le $m^{\text{ième}}$ nombre premier minimal (dans l'ordre naturel) et $\pi(x)$ est, comme d'habitude, le nombre de nombres premiers $\leq x$. Sur la base de ces résultats, on est amené à énoncer la

CONJECTURE III (P). *La séquence de nombres premiers minimaux est infinie.*

C'est une conjecture beaucoup plus forte que $G(P)$. Si elle s'avérait fausse, c'est-à-dire, si la séquence devait se terminer, on pourrait toujours insérer un nouveau nombre premier et continuer (cela serait possible si $G(P)$ était vraie). Selon notre opinion, pourtant, la conjecture comme elle est énoncée est plausible.

Il s'avère que, dans un certain sens, l'algorithme est assez efficace. Lorsque chaque nouveau nombre premier minimal est déterminé, une des valeurs qui est apparue plus tôt apparaît comme un "complémentaire" $\overline{p}$, i.e., $\overline{p} = 2n^* - p_{m+1}$. Jusqu'à $2n = 1\ 000\ 000$, seulement 47 nombres premiers minimaux sont utilisés comme complémentaires ; cela montre que le "backtracking," bien que persistant, n'est jamais extrême (223 des 3000 nombres premiers minimaux sont engendrés "en dehors de l'ordre naturel"). Dans la table V, on liste les nombres premiers minimaux qui apparaissent comme complémentaires avec le nombre de fois où chaque nombre premier est ainsi utilisé. Dans cette table, les nombres premiers sont listés dans leur ordre "algorithmique" plutôt que naturel.

TABLE V

m	p_m	frequency	m	p_m	frequency	m	p_m	frequency
1	1	332	17	127	44	33	359	9
2	3	606	19	139	34	34	379	1
3	7	252	18	137	25	35	401	3
4	11	329	20	157	19	36	421	1
5	13	134	21	181	20	37	457	1
6	17	256	22	193	5	38	461	5
8	31	97	24	199	9	40	509	3
7	29	172	23	197	21	41	521	6
10	47	86	25	229	3	43	569	2
9	41	107	26	239	12	45	617	1
11	53	73	27	251	20	47	653	1
12	67	88	28	271	6	50	709	1
13	83	57	29	307	5	53	773	3
14	89	43	30	313	1	51	743	1
15	103	43	31	317	12	71	1319	1
16	109	48	32	349	2			

L'alternance régulière des fréquences dans la première partie de la table est frappante, mais on hésite à suggérer à ce point des recherches qu'elle est significative.

6. Nombres chanceux. Les expériences décrites ci-dessus peuvent aussi être menées dans le cas où, à la place de nombres premiers, on utiliserait une autre séquence de nombres "criblant" appelés des "nombres chanceux" [2]. On rappelle que, selon le crible d'Ératosthène, les nombres premiers sont déterminés successivement en marquant, à la $j^{\text{ième}}$ étape, tout nombre atteignable par sauts de longueur le $j^{\text{ième}}$ nombre premier p_j. Le premier nombre plus grand que p_j, qui reste non marqué est le $j+1^{\text{ième}}$ nombre premier. En comptant à partir du $p_j^{\text{ième}}$ nombre premier, les nombres restent dans la liste indépendamment du fait qu'ils aient été ou non précédemment marqués. Dans le crible des nombres chanceux, d'un autre côté, un nombre est éliminé dès qu'il est marqué. Ainsi, en ayant éliminé tous les nombres pairs de la liste des entiers, on trouve que le premier nombre > 1 qui reste est 3. On élimine alors tous les troisièmes nombres, en comptant à partir du début (c'est la convention habituelle). Ainsi tout nombre de la forme $6k - 1$ est éliminé. Le premier nombre restant > 3 est 7, donc nous éliminons tous les $7^{\text{ièmes}}$ nombres en comptant à partir du début, etc. Les éléments de la séquence résultante sont appelés des nombres chanceux. Il a été démontré [3] que ces nombres ont, à l'ordre le plus bas, la même densité asymptotique que les nombres premiers.

Par contraste avec le cas des nombres premiers, il y a un algorithme pratique pour calculer le $k^{\text{ième}}$ nombre chanceux directement en fonction des nombres chanceux qui sont $\leq k$. Puisque ceci peut ne pas être bien connu, on donne la procédure ici.

Soit l_{m-1} le plus grand nombre chanceux $\leq k$. Set $R_m = k$. Définissons alors :

$$j = \left[\frac{R_m}{l_{m-1} - 1}\right] \qquad \text{si } l_{m-1} - 1 \text{ ne divise pas } R_m \tag{8a}$$

$$j = \left[\frac{R_m}{l_{m-1} - 1}\right] - 1 \qquad \text{si } l_{m-1} - 1 \text{ divise } R_m \tag{8b}$$

$$R_{m-1} = R_m + j. \tag{9}$$

On continue le processus en descendant jusqu'à $m = 2$. Alors, finalement :

$$l_k = 2R_2 - 1. \tag{10}$$

Cet algorithme - qui découle directement de la définition du crible chanceux - est extrêmement utile pour vérifier la table des nombres chanceux ; le dernier, bien sûr, est mieux calculé en utilisant le processus de criblage tel qu'il a été défini originellement. En utilisant un Maniac II, on a calculé (et vérifié) une table des premiers 36 655 nombres chanceux.

Dans l'article original [2], il était plus ou moins impliqué que l'analogue de la conjecture de Goldbach pour les nombres chanceux - appelons-la $G(L)$ - est vérifiée, i.e., que tout nombre pair a au moins une décomposition en somme de deux nombres chanceux. En fait, les auteurs de [2] ont vérifié cette propriété pour le domaine $2n \leq 100\,000$. En parallèle de notre travail sur la courbe de Goldbach pour les nombres premiers, on a aussi calculé une table du nombre λ_{2n} de solutions de l'équation $2n = l_i + l_j$, où l_i, l_j, sont des nombres chanceux. Cela a été fait sur les mêmes domaines, $2n < 150\,000$. La courbe résultante est, dans son allure générale, assez similaire à la courbe habituelle de Goldbach. Les maxima locaux, pourtant, ont maintenant lieu pour les valeurs $2n = 6k-2$. C'est ce qui est à attendre, puisqu'il n'y a pas de nombre chanceux de la forme $6k-1$. (Il n'y a pas de "croisement" (au sens de la section 2) et un seul "contact" : $\lambda_{190} = \lambda_{192} = 7$.)

Les conjectures analogues à celles faites ci-dessus pour les nombres premiers peuvent également être énoncées pour ce cas :

Conjecture I (L). *Pour tout entier $k > 0$ il existe au moins un nombre pair $2n$ tel que $\lambda_{2n} = k$. Ceci a été vérifié pour tout $k \leq 1769$.*

Conjecture II (L). *Pour tout entier $k > 1$, la plus petite solution $2n$ de $\lambda_{2n} = k$ est telle que* $2n \equiv -2 \pmod 6$. *Cela est vérifié sans exception pour tout k pour lequel n'importe quelle solution a été trouvée jusque-là.*

Conjecture III (L). *La séquence chanceuse minimale est infinie. La séquence a été calculée avec succès jusqu'à* $2n = 350\ 000$ *(1673 termes). Pour autant que nous puissions le dire, la même loi asymptotique semble vérifiée, i.e., le nombre de nombres chanceux minimaux semble être grosso-modo la puissance* $0.6^{\text{ième}}$ *du nombre de nombres chanceux.*

Jusque-là nous n'avons pas été capables de trouver une formule qui prédit de façon satisfaisante le nombre de décompositions chanceuses d'un nombre pair donné. Cela est peut-être dû au fait qu'il n'y a pas d'analogue simple de la propriété de factorisation unique (et par conséquent il n'y a rien qui corresponde à la fonction ϕ d'Euler). En travaillant avec des "pseudo-chanceux", i.e., ces nombres restent après un nombre fixe d'étapes du processus de criblage, on peut calculer des ratios analogues aux $g_i^{(k)}/\phi(\prod_k)$ de la section 4 ; cela nous permet, en fait, de prédire les grandeurs *relatives* des λ_{2n} successifs jusqu'à 10-15%.

Il est clair, cependant, qu'une technique plus raffinée est nécessaire dans ce cas.

Références

1. I. M. Vinogradov, *Some theorems concerning the theory of primes*, Rec. Math. (Mat. Sb. N. S.) 2 (1937) 179-195.

2. V. Gardiner, R. Lazarus, N. Metropolis, S. Ulam, *On certain sequences of integers defined by sieves*, this Magazine 29 (1956) 117-122.

3. D. Hawkins, W. E. Briggs, *The lucky number theorem*, this Magazine, 31 (1957) 277-280.

4. M. L. Stein, P. R. Stein, *Tables of the number of binary decompositions of all even numbers* $0 < 2n < 200\ 000$ *into prime numbers and lucky numbers*, Los Alamos Rep. LA-3106, vol. I and II, available from the Office of Tech. Serv., U. S. Dept. of Commerce, Washington. 25, D. C.