

7.4 Topos

Un *topos* est défini comme une catégorie de faisceaux. Ainsi, pour tout espace topologique (X, Op) , la catégorie $\text{Shv}(X, \text{Op})$ définie dans la définition 7.27 est un topos. En particulier, en prenant l'espace à un point $X = 1$ avec sa topologie unique, on trouve que la catégorie Set est un topos, comme nous l'avons dit tout du long et comme nous l'avons vu explicitement dans l'exemple 7.36. Et pour tout schéma de base de données - c'est-à-dire toute catégorie finiment présentée - $\mathcal{C}$, la catégorie $\mathcal{C}\text{-Inst}$ des instances de base de données sur $\mathcal{C}$ est aussi un topos.¹ Les topos englobent ces deux sources d'exemples, et bien d'autres.

Les topos sont des structures incroyablement agréables, pour une variété de raisons apparemment disparates. Dans cette esquisse, la raison mise en avant est que tout topos possède un grand nombre des mêmes propriétés structurelles que la catégorie Set . En effet, nous avons discuté dans la section 7.2.1 que tout topos a des limites et des colimites, est cartésien fermé, a des factorisations épi-mono, et a un classificateur de sous-objets (voir section 7.2.2). En utilisant ces propriétés, on peut faire de la logique avec une sémantique dans le topos $\mathcal{E}$. Nous l'avons expliqué pour les ensembles, mais imaginons-le maintenant pour les faisceaux sur un espace topologique. Là, les mêmes symboles logiques $\wedge, \vee, \neg, \Rightarrow, \exists, \forall$ deviennent des opérations qui signifient quelque chose à propos des sous-faisceaux - par exemple les champs de vecteurs, les sections de fonctions continues, etc. - et non plus seulement des sous-ensembles.

Pour comprendre cela plus profondément, nous devrions dire ce qu'est le classificateur de sous-objets $1 \rightarrow \Omega$ en toute généralité. Nous avons dit que, dans le topos Set , le classificateur de sous-objets est l'ensemble des booléens $\Omega = \mathbb{B}$. Dans un topos de faisceaux $\mathcal{E} = \text{Shv}(X, \text{Op})$, l'objet $\Omega \in \mathcal{E}$ est un faisceau, pas seulement un ensemble. Quel faisceau est-ce ?

7.4.1 Le classificateur de sous-objets Ω dans un topos de faisceaux

Dans cette sous-section, nous cherchons à comprendre le classificateur de sous-objets Ω , c'est-à-dire l'objet des valeurs de vérité, dans le topos de faisceaux $\text{Shv}(X, \text{Op})$. Puisque Ω est un faisceau, comprenons-le en parcourant lentement la définition de faisceau (définition 7.27) dans ce cas. Un faisceau Ω est un préfaisceau qui satisfait la condition de faisceau. En tant que préfaisceau, c'est juste un foncteur $\Omega : \text{Op}^{\text{op}} \rightarrow \text{Set}$; il assigne un ensemble $\Omega(U)$ à chaque ouvert $U \subseteq X$ et est muni d'une application de restriction $\Omega(U) \rightarrow \Omega(V)$ chaque fois que $V \subseteq U$. Donc, dans notre quête pour comprendre Ω , nous posons d'abord la question : quel préfaisceau est-ce ?

Référence : http://brendanfong.com/fong_spivak_an_invitation.pdf.

Traduction : Denise Vella-Chemla et deepseek, octobre 2026.

1. Ceci est parfois appelé un *topos de faisceaux* ou un *topos de Grothendieck*. Il existe un type plus général de topos appelé *topos élémentaire* dû à Lawvere.

La réponse à notre question est que Ω est le préfaisceau qui assigne à $U \in \text{Op}$ l'ensemble des sous-ensembles ouverts de U .

$$\Omega(U) = \{U' \in \text{Op} \mid U' \subseteq U\}. \quad (7.13)$$

C'était facile, non ? Et étant donné $V \subseteq U$, l'application de restriction est donnée par

$$\begin{aligned} \Omega(U) &\rightarrow \Omega(V), \\ U' &\mapsto U' \cap V. \end{aligned} \quad (7.14)$$

2

On peut vérifier que c'est fonctoriel - voir exercice 7.39 - et après l'avoir fait, nous devons encore voir qu'il satisfait la condition de faisceau. Mais au moins nous n'avons pas à lutter pour comprendre Ω : il ressemble beaucoup à Op lui-même.

Exercice [Exercice 7.38] Soit $X = \{1\}$ l'espace à un point. Nous avons dit plus haut que le classificateur de sous-objets de $\text{Shv}(1)$ est l'ensemble $\mathbb{B}$ des booléens, mais comment cela s'accorde-t-il avec la définition de Ω donnée dans l'équation (7.13) ?

Exercice [Exercice 7.39]

1. Montrer que la définition de Ω donnée ci-dessus dans les équations (7.13) et (7.14) est fonctorielle, c'est-à-dire que chaque fois que $W \subseteq V \subseteq U$, l'application de restriction $\Omega(U) \rightarrow \Omega(V)$ suivie de l'application de restriction $\Omega(V) \rightarrow \Omega(W)$ est la même que l'application de restriction $\Omega(U) \rightarrow \Omega(W)$.
2. Est-ce tout ce qui est nécessaire pour conclure que Ω est un préfaisceau ?

Pour voir que Ω tel que défini dans l'équation (7.13) satisfait la condition de faisceau (voir définition 7.27), supposons que nous ayons un recouvrement $U = \bigcup_{i \in I} U_i$, et supposons qu'on nous donne un élément $V_i \in \Omega(U_i)$, c'est-à-dire un ouvert $V_i \subseteq U_i$, pour chaque $i \in I$. Supposons en outre que, pour tous $i, j \in I$, on ait $V_i \cap U_j = V_j \cap U_i$, c'est-à-dire que les éléments forment une famille compatible. Définissons $V = \bigcup_{i \in I} V_i$; c'est un sous-ensemble ouvert de U , donc nous pouvons considérer V comme un élément de $\Omega(U)$. Ce qui suit vérifie que V est bien un recollement pour les $(V_i)_{i \in I}$:

$$V \cap U_j = \left(\bigcup_{i \in I} V_i \right) \cap U_j = \bigcup_{i \in I} (V_i \cap U_j) = \bigcup_{i \in I} (V_j \cap U_i) = \left(\bigcup_{i \in I} U_i \right) \cap V_j = V_j.$$

En d'autres termes, $V \cap U_j = V_j$ pour tout $j \in I$. Donc notre Ω est passé du statut de préfaisceau à celui de faisceau !

Le lecteur aux yeux d'aigle aura remarqué que nous n'avons pas encore donné toutes les données nécessaires pour définir un classificateur de sous-objets. Pour transformer l'objet Ω en un classificateur de sous-objets en règle, nous devons aussi donner un morphisme de faisceaux $\text{true} : \{1\} \rightarrow \Omega$.

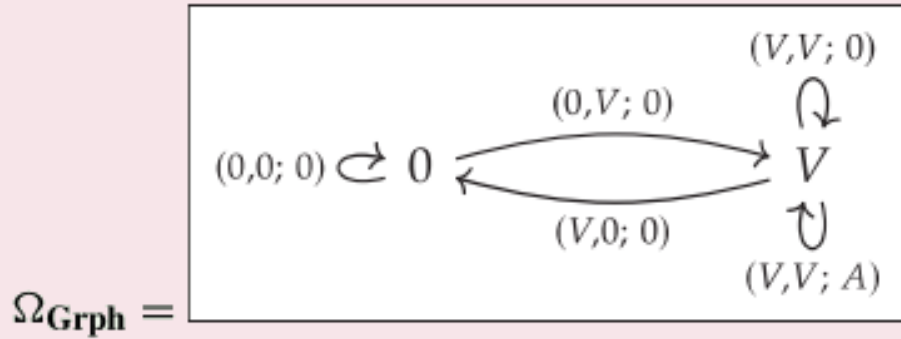
2. Nous avons dit qu'un topos est une catégorie de faisceaux, pourtant les instances de base de données sont des préfaisceaux ; comment se fait-il que $\mathcal{C}\text{-Inst}$ soit un topos ? Eh bien, les préfaisceaux comptent en fait comme des faisceaux. Nous nous excusons que cela ne puisse être plus clair. Tout cela pourrait être rendu formel si nous introduisions la notion de site. Malheureusement, ce concept est tout simplement trop abstrait pour la portée de ce chapitre.

Ici, $\{1\} : \text{Op}^{\text{op}} \rightarrow \text{Set}$ est le faisceau terminal ; il envoie chaque ouvert sur l'ensemble terminal à un élément $\{1\}$. Le morphisme correct $\text{true} : \{1\} \rightarrow \Omega$ pour le classificateur de sous-objets est le morphisme de faisceaux qui assigne, pour chaque $U \in \text{Op}$, la fonction $\{1\} = \{1\}(U) \rightarrow \Omega(U)$ envoyant $1 \mapsto U$, le plus grand ouvert $U \subseteq U$. Désormais, nous notons $\{1\}$ simplement 1.

Point clé : les valeurs de vérité sont des ouverts.

Le point est que les valeurs de vérité dans le topos des faisceaux sur un espace (X, Op) sont les ouverts de cet espace. Quand quelqu'un dit "la propriété P est-elle vraie?", la réponse n'est pas oui ou non, mais "elle est vraie sur le sous-ensemble ouvert U ". Si ce U est tout, $U = X$, alors P est vraiment vraie ; si U est vide, $U = \emptyset$, alors P est vraiment fausse. Mais, en général, elle est juste vraie à certains endroits et pas à d'autres.

Exemple [Exemple 7.40] La catégorie Grph des graphes est un topos de préfaisceaux, et on peut aussi la considérer comme la catégorie des instances pour un schéma de base de données, comme nous l'avons vu dans l'exemple 7.16. Le classificateur de sous-objets Ω dans le topos Gr est donc un graphe, que nous pouvons dessiner. Voici à quoi il ressemble :

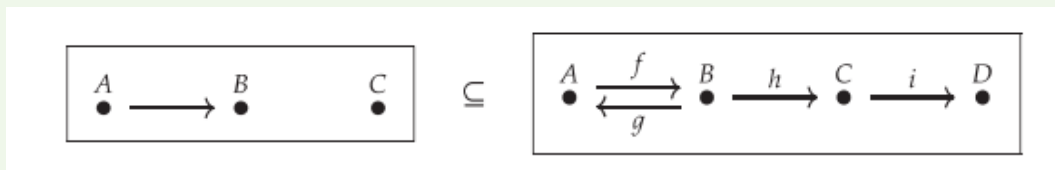


(Le diagramme ci-dessus est une version simplifiée ; le diagramme original contient les étiquettes $(V, V; 0)$, $(V, V; A)$, etc. Voir le PDF pour le dessin exact.)

Trouver Ω soi-même est plus facile en utilisant ce qu'on appelle le lemme de Yoneda, mais nous ne l'avons pas introduit. Pour une introduction agréable et facile au topos des graphes, voir [Vig03]. Le graphe terminal est un seul sommet avec une seule boucle, et l'homomorphisme de graphes $\text{true} : 1 \rightarrow \Omega$ envoie cette boucle sur $(V, V; A)$.

Étant donné un graphe G et un sous-graphe $i : H \subseteq G$, nous devons construire un homomorphisme de graphes $\Gamma H^- : G \rightarrow \Omega$ classifiant H . L'idée est que, pour chaque partie de G , nous décidons quelle portion de celle-ci est dans H . Un sommet v dans G est soit dans H , soit non ; si oui, on l'envoie sur V , sinon sur 0. Mais les flèches a sont plus compliquées. Si a est dans H , on l'envoie sur $(V, V; A)$. Mais si elle n'est pas dans H , les mathématiques exigent que nous posions plus de questions : sa source est-elle dans H ? Sa cible est-elle dans H ? Les deux ? Ni l'une ni l'autre ? Selon les réponses, on envoie a sur $(V, 0; 0)$, $(0, V; 0)$, $(V, V; 0)$, ou $(0, 0; 0)$, respectivement.

Exercice [Exercice 7.41] Considérons le sous-graphe $H \subseteq G$ montré ici :



Trouver l'homomorphisme de graphes $\Gamma H^\neg : G \rightarrow \Omega$ qui le classifie. Voir l'exemple 7.40.

7.4.2 Logique dans un topos de faisceaux

Considérons les connecteurs logiques ET, OU, IMPLIQUE et NON. Supposons que nous ayons un espace topologique $X \in \text{Op}$. Étant donné deux ouverts U, V , considérés comme des valeurs de vérité $U, V \in \Omega(X)$, alors leur conjonction “ U ET V ” est leur intersection, et leur disjonction “ U OU V ” est leur union ;

$$(U \wedge V)U \cap V \quad \text{et} \quad (U \vee V)U \cup V. \quad (7.15)$$

Ces formules sont faciles à retenir, car $\wedge$ ressemble à $\cap$ et $\vee$ ressemble à $\cup$. L'implication $U \Rightarrow V$ est le plus grand ouvert R tel que $R \cap U \subseteq V$, c'est-à-dire

$$(U \Rightarrow V) = \bigcup_{\{R \in \text{Op} \mid R \cap U \subseteq V\}} R. \quad (7.16)$$

En général, il n'est pas facile de réduire davantage l'équation (7.16), donc l'implication est le connecteur logique le plus difficile à penser topologiquement.

Enfin, la négation de U est donnée par $\neg U (U \Rightarrow \text{false})$, et cela s'avère être relativement simple. Par l'équation (7.16), c'est l'union de tous les R tels que $R \cap U = \emptyset$, c'est-à-dire l'union de tous les ouverts dans le complémentaire de U . Si vous connaissez la topologie, vous reconnaîtrez peut-être que $\neg U$ est “l'intérieur du complémentaire de U ”.

Exemple [Exemple 7.42] Considérons la droite réelle $X = \mathbb{R}$ comme espace topologique (voir exercice 7.19). Soient $U, V \in \Omega(X)$ les ouverts $U = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 3\}$ et $V = \{x \in \mathbb{R} \mid -4 < x < 4\}$. En notation d'intervalle, $U = (-\infty, 3)$ et $V = (-4, 4)$. Alors

- $U \wedge V = (-4, 3)$,
- $U \vee V = (-\infty, 4)$,
- $\neg U = (3, \infty)$,
- $\neg V = (-\infty, -4) \cup (4, \infty)$,
- $(U \Rightarrow V) = (-4, \infty)$,
- $(V \Rightarrow U) = U$.

Exercice [Exercice 7.43] Considérons la droite réelle $\mathbb{R}$ comme espace topologique, et considérons le sous-ensemble ouvert $U = \mathbb{R} - \{0\}$.

1. Quel sous-ensemble ouvert est $\neg U$?
2. Quel sous-ensemble ouvert est $\neg\neg U$?
3. Est-il vrai que $U \subseteq \neg\neg U$?
4. Est-il vrai que $\neg\neg U \subseteq U$?

Ci-dessus, nous avons expliqué des opérations sur les ouverts, une pour chaque connecteur logique ; il y a aussi des ouverts correspondant aux symboles true et false. Nous explorons cela dans un exercice.

Exercice [Exercice 7.44] Soit (X, Op) un espace topologique.

1. Supposons que le symbole true corresponde à un ouvert tel que, pour tout ouvert $U \in \text{Op}$, on ait $(\text{true} \wedge U) = U$. Quel ouvert est-ce ?
2. D'autres choses que nous devrions attendre de true incluent $(\text{true} \vee U) = \text{true}$ et $(U \Rightarrow \text{true}) = \text{true}$ et $(\text{true} \Rightarrow U) = U$. Ces propriétés tiennent-elles pour votre réponse à 1 ?
3. Le symbole false correspond à un ouvert $U \in \text{Op}$ tel que, pour tout ouvert $U \in \text{Op}$, on ait $(\text{false} \vee U) = U$. Quel ouvert est-ce ?
4. D'autres choses que nous devrions attendre de false incluent $(\text{false} \wedge U) = \text{false}$ et $(\text{false} \Rightarrow U) = \text{true}$. Ces propriétés tiennent-elles pour votre réponse à 3 ?

7.4.3 Prédicats

Exemple [Exemple 7.45] Pour un fibré vectoriel $\pi : E \rightarrow X$ au-dessus d'un espace X , le faisceau correspondant est Sec_π correspondant à ses sections : à chaque ouvert $i_U : U \subseteq X$, on associe l'ensemble des fonctions $s : U \rightarrow E$ pour lesquelles $s \circ \pi = i_U$. Par exemple, dans le cas du fibré tangent $\pi : TM \rightarrow M$ (voir exemple 7.34), le faisceau correspondant, appelons-le $\mathbf{VF}$, associe à chaque U l'ensemble $\mathbf{VF}(U)$ des champs de vecteurs sur U .

La logique interne du topos peut alors être utilisée pour considérer des propriétés des champs de vecteurs. Par exemple, on pourrait avoir un prédicat $\mathbf{Grad} : \mathbf{VF} \rightarrow \Omega$ qui demande le plus grand sous-espace $\mathbf{Grad}(v)$ sur lequel un champ de vecteurs donné v provient du gradient d'une certaine fonction scalaire. On pourrait aussi avoir un prédicat qui demande le plus grand ouvert sur lequel un champ de vecteurs est non nul. Des opérations logiques comme $\wedge$ et $\vee$ pourraient alors être appliquées pour cibler avec précision les sous-variétés sur lesquelles diverses propriétés souhaitées tiennent, et pour raisonner logiquement sur quelles autres propriétés sont forcées d'y tenir.

7.4.3 Prédicats (suite)

En anglais, un prédicat est la partie de la phrase qui vient après le sujet. Par exemple "... est pair" ou "... aime le temps qu'il fait" sont des prédicats. Tout sujet n'a pas de sens pour un prédicat

donné ; par exemple la phrase “7 est pair” peut être fausse, mais elle a un sens. En revanche, la phrase “2,7 est pair” n’a pas vraiment de sens, et “2,7 aime le temps qu’il fait” certainement pas. En informatique, on dirait que “l’expression “2,7 aime le temps qu’il fait” ne passe pas le contrôle de type”.

Le point est que chaque prédicat est associé à un type, à savoir le type de sujet qui a un sens pour ce prédicat. Lorsque nous appliquons un prédicat à un sujet du type approprié, le résultat a une valeur de vérité : “7 est pair” est soit vrai soit faux. Peut-être que “Bob aime le temps qu’il fait” est vrai certains jours et faux d’autres. En fait, cette valeur de vérité peut changer selon l’année (mauvais temps cette année), la saison, l’heure, etc. En anglais, nous nous attendons à ce que les valeurs de vérité des phrases changent avec le temps, ce qui est exactement la motivation de ce chapitre. Nous travaillons vers une logique où les valeurs de vérité changent avec le temps.

Dans un topos $\mathcal{E} = \text{Shv}(X, \text{Op})$, un prédicat est un morphisme de faisceaux $p : S \rightarrow \Omega$ où $S \in \mathcal{E}$ est un faisceau et $\Omega \in \mathcal{E}$ est le classificateur de sous-objets, le faisceau des valeurs de vérité. Par la définition 7.27, nous obtenons une fonction $p(U) : S(U) \rightarrow \Omega(U)$ pour tout ouvert $U \subseteq X$. Dans l’exemple ci-dessus - que nous discuterons plus en détail dans la section 7.5 - si S est le faisceau des personnes (les gens vont et viennent avec le temps), $\text{Bob} \in S(U)$ est une personne existant sur un temps U , et p est le prédicat “aime le temps qu’il fait”, alors $p(\text{Bob})$ est l’ensemble des temps pendant lesquels Bob aime le temps qu’il fait. Ainsi la réponse à “Bob aime le temps qu’il fait” est quelque chose comme “en été oui, et aussi en avril 2018 et mai 2019 oui, mais à tous les autres moments non”. C’est $p(\text{Bob})$, la valeur de vérité temporelle obtenue en appliquant le prédicat p au sujet Bob.

Exercice [Exercice 7.46] Nous venons de décrire comment un prédicat $p : S \rightarrow \Omega$, tel que “... aime le temps qu’il fait”, agit sur les sections $s \in S(U)$, disons $s = \text{Bob}$. Mais, par la définition 7.9, tout prédicat $p : S \rightarrow \Omega$ définit aussi un sous-objet de $\{S \mid p\} \subseteq S$. Décrire les sections de ce sous-faisceau.

Le poset des sous-objets. Pour un topos $\mathcal{E} = \text{Shv}(X, \text{Op})$ et un objet (faisceau) $S \in \mathcal{E}$, l’ensemble des S -prédicats $|\Omega^S| = \mathcal{E}(S, \Omega)$ est naturellement muni d’une structure de poset, que nous notons

$$(|\Omega^S|, \leq^S). \quad (7.17)$$

Étant donné deux prédicats $p, q : S \rightarrow \Omega$, nous disons que $p \leq^S q$ si le premier implique le second. Plus précisément, pour tout $U \in \text{Op}$ et toute section $s \in S(U)$, nous obtenons deux sous-ensembles ouverts $p(s) \subseteq U$ et $q(s) \subseteq U$. Nous disons que $p \leq^S q$ si $p(s) \subseteq q(s)$ pour tout $U \in \text{Op}$ et tout $s \in S(U)$. Nous omettons souvent l’exposant de $\leq^S$ et écrivons simplement $\leq$. En notation logique formelle, on pourrait écrire $p \leq^S q$ en utilisant le symbole $\vdash$, par exemple de l’une des façons suivantes :

$$s : S \mid p(s) \vdash q(s) \quad \text{ou} \quad p(s) \vdash_{s:S} q(s).$$

En particulier, si $S = 1$ est l’objet terminal, nous notons $|\Omega^S|$ par $|\Omega|$, et nous appelons les éléments $p \in |\Omega|$ des *propositions*. Ce sont juste des morphismes $p : 1 \rightarrow \Omega$.

Ce préordre est partiellement ordonné - un poset - ce qui signifie que si $p \leq q$ et $q \leq p$ alors $p = q$. La raison est que pour tous sous-ensembles $U, V \subseteq X$, si $U \subseteq V$ et $V \subseteq U$ alors $U = V$.

Exercice [Exercice 7.47] Donner un exemple d'espace X , d'un faisceau $S \in \text{Shv}(X)$, et de deux prédicats $p, q : S \rightarrow \Omega$ pour lesquels $p(s) \vdash_{s:S} q(s)$ tient. Vous n'avez pas besoin d'être formel.

Tous les symboles logiques (true , false , $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\neg$) de la section 7.4.2 ont un sens dans un tel poset $|\Omega^S|$. Pour deux prédicats $p, q : S \rightarrow \Omega$, nous définissons $(p \wedge q) : S \rightarrow \Omega$ par $(p \wedge q)(s) = p(s) \wedge q(s)$, et de même pour $\vee$. Ainsi dit-on que ces opérations sont calculées point par point sur S . Avec ces définitions, le symbole $\wedge$ est la borne inférieure et le symbole $\vee$ est la borne supérieure - au sens de la définition 1.76 - pour le poset $|\Omega^S|$.

Avec toute la structure logique que nous avons définie jusqu'ici, le poset $|\Omega^S|$ des prédicats sur S forme ce qu'on appelle une *algèbre de Heyting*. Nous ne la définirons pas ici, mais plus d'informations peuvent être trouvées dans la section 7.6. Nous passons maintenant à la quantification.

7.4.4 Quantification

La quantification se présente sous deux formes : universelle et existentielle, ou “pour tout” et “il existe”. Chacune prend en entrée un prédicat à $n + 1$ variables et renvoie un prédicat à n variables.

Exemple [Exemple 7.48] Supposons que nous ayons deux faisceaux $S, T \in \text{Shv}(X, \text{Op})$ et un prédicat $p : S \times T \rightarrow \Omega$. Disons que T représente ce qui est considéré comme digne d'intérêt et S est encore l'ensemble des personnes. Donc pour un sous-ensemble de temps U , une section $t \in T(U)$ est quelque chose qui est considéré comme digne d'intérêt pendant tout U , et une section $s \in S(U)$ est une personne qui dure pendant tout U . Imaginons le prédicat p comme “ s est inquiet à propos de t ”. Maintenant rappelons-nous de la section 7.4.3 qu'un prédicat p ne renvoie pas simplement vrai ou faux ; étant donné une personne s et un élément d'actualité t , il renvoie une valeur de vérité correspondant au sous-ensemble des temps où $p(s, t)$ est vrai.

“Pour tout t dans T , ... est inquiet à propos de t ” est lui-même un prédicat sur une seule variable, S , que nous notons

$$\forall(t : T). p(s, t).$$

En appliquant ce prédicat à une personne s , on obtient les temps où cette personne est inquiète à propos de tout ce qui fait l'actualité. De même, “il existe t dans T tel que s est inquiet à propos de t ” est aussi un prédicat sur S , que nous notons $\exists(t : T). p(s, t)$. Si nous appliquons ce prédicat à une personne s , nous obtenons les temps où la personne s est inquiète à propos d'au moins une chose dans l'actualité.

Exercice [Exercice 7.49] Dans le topos $\mathbf{Set}$, où $\Omega = \mathbb{B}$, considérons le prédicat $p : \mathbb{N} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{B}$ donné par [la formule manquante dans le texte].

1. Quel est l'ensemble des $n \in \mathbb{N}$ pour lesquels le prédicat $\forall(z : \mathbb{Z}). p(n, z)$ tient ?
2. Quel est l'ensemble des $n \in \mathbb{N}$ pour lesquels le prédicat $\exists(z : \mathbb{Z}). p(n, z)$ tient ?
3. Quel est l'ensemble des $z \in \mathbb{Z}$ pour lesquels le prédicat $\forall(n : \mathbb{N}). p(n, z)$ tient ?
4. Quel est l'ensemble des $z \in \mathbb{Z}$ pour lesquels le prédicat $\exists(n : \mathbb{N}). p(n, z)$ tient ?

Ainsi, étant donné p , nous avons un prédicat universellement et un prédicat existentiellement quantifié $\forall(t : T). p(s, t)$ et $\exists(t : T). p(s, t)$ sur S . Comment les comprenons-nous formellement comme morphismes de faisceaux $S \rightarrow \Omega$ ou, de façon équivalente, comme sous-faisceaux de S ?

Quantification universelle. Étant donné un prédicat $p : S \times T \rightarrow \Omega$, le prédicat universellement quantifié $\forall(t : T). p(s, t)$ prend une section $s \in S(U)$, pour tout ouvert U , et renvoie un certain ouvert $V \in \Omega(U)$. À savoir, il renvoie le plus grand ouvert $V \subseteq U$ pour lequel $p(s|_V, t) = V$ tient pour tout $t \in T(V)$.

Exercice [Exercice 7.50] Supposons que s soit une personne vivante pendant tout l'intervalle U . Appliquer la définition ci-dessus à l'exemple $p(s, t) = \text{“la personne } s \text{ est inquiète à propos de l'actualité } t\text{”}$ de l'exemple 7.48. Ici, $T(V)$ est l'ensemble des éléments qui font l'actualité pendant tout l'intervalle V .

1. Quel sous-ensemble ouvert de U est $\forall(t : T). p(s, t)$ pour une personne s ?
2. A-t-il le sens sémantique que vous attendriez, étant donné la description moins formelle de la section 7.4.4 ?

Abstraitement, le prédicat universellement quantifié correspond au sous-faisceau donné par le pull-back suivant :

$$\begin{array}{ccc} \forall_t p & \longrightarrow & 1 \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \text{true}^T \\ S & \xrightarrow{p'} & \Omega^T \end{array}$$

où $p' : S \rightarrow \Omega^T$ est la curryfication de $S \times T \rightarrow \Omega$ et true^T est la curryfication du composé $1 \times T \xrightarrow{1} 1 \xrightarrow{\text{true}} \Omega$. Voir équation (7.3).

Quantification existentielle. Étant donné un prédicat $p : S \times T \rightarrow \Omega$, le prédicat existentiellement quantifié $\exists(t : T). p(s, t)$ prend une section $s \in S(U)$, pour tout ouvert U , et renvoie un certain ouvert $V \in \Omega(U)$, à savoir l'union $V = \bigcup_i V_i$ de tous les ouverts V_i pour lesquels il existe un $t_i \in T(V_i)$ satisfaisant $p(s|_{V_i}, t_i) = V_i$. Si le résultat est U lui-même, vous pourriez être tenté de penser “ah, donc il existe un $t \in T(U)$ satisfaisant $p(t)$ ”, mais ce n'est pas nécessairement le cas. Il y a juste un recouvrement de $U = \bigcup U_i$ et des sections locales $t_i \in T(U_i)$, chacune satisfaisant

p , comme expliqué ci-dessus. Ainsi le quantificateur existentiel fait beaucoup de travail “sous le capot”, en tenant compte des recouvrements sans afficher ce fait dans la notation.

Exercice [Exercice 7.51] Appliquer la définition ci-dessus au prédicat “la personne s est inquiète à propos de l’actualité t ” de l’exemple 7.48.

1. Quel ouvert est $\exists(t : T). p(s, t)$ pour une personne s ?
2. A-t-il le sens sémantique que vous attendriez ?

Abstraitement, le prédicat existentiellement quantifié est donné comme suit. Commencez par le sous-objet classifié par p , à savoir $\{(s, t) \in S \times T \mid p(s, t)\} \subseteq S \times T$, composez avec la projection $\pi_S : S \times T \rightarrow S$ comme en haut à droite ; puis prenez la factorisation épi-mono du composé comme en bas à gauche :

$$\begin{array}{ccc} \{S \times T \mid p\} & \xrightarrow{\quad} & S \times T \\ \downarrow & & \downarrow \pi_S \\ \exists_t p & \xrightarrow{\quad} & S \end{array}$$

Alors l’application du bas est le sous-faisceau souhaité de S .

7.4.5 Modalités

Revenons à l’exemple 1.115 où nous avons discuté des opérateurs modaux - aussi appelés modalités - en disant qu’ils sont des opérateurs de clôture sur les préordres qui apparaissent en logique. Les préordres auxquels nous faisons référence sont ceux discutés dans l’équation (7.17) : pour tout objet $S \in \mathcal{E}$, il y a le poset $(|\Omega^S|, \leq^S)$ des prédicats sur S , où $|\Omega^S| = \mathcal{E}(S, \Omega)$ est juste l’ensemble des morphismes $S \rightarrow \Omega$ dans la catégorie $\mathcal{E}$.

Définition 1 (Définition 7.52). *Une modalité dans $\text{Shv}(X)$ est un morphisme de faisceaux $j : \Omega \rightarrow \Omega$ satisfaisant trois propriétés pour tout $U \subseteq X$ et $p, q \in \Omega(U)$:*

- (a) $p \leq j(p)$
- (b) $(j \circ j)(p) \leq j(p)$
- (c) $j(p \wedge q) = j(p) \wedge j(q)$

Exercice [Exercice 7.53] Supposons que $j : \Omega \rightarrow \Omega$ soit un morphisme de faisceaux sur X , tel que $p \leq j(p)$ tienne pour tout $U \subseteq X$ et tout $p \in \Omega(U)$. Montrer que pour tout $q \in \Omega(U)$, on a $j(j(q)) \leq j(q)$ si et seulement si $j(j(q)) = j(q)$.

Dans l’exemple 1.115, nous avons dit informellement que pour toute proposition p , par exemple “Bob est à San Diego”, il y a un opérateur modal “en supposant p , ...”. Maintenant nous sommes en position de rendre cela formel.

Proposition 2 (Proposition 7.54). *Fixons une proposition $p \in |\Omega|$. Alors*

- (a) *le morphisme de faisceaux $\Omega \rightarrow \Omega$ donné en envoyant q sur $p \Rightarrow q$ est une modalité,*
- (b) *le morphisme de faisceaux $\Omega \rightarrow \Omega$ donné en envoyant q sur $p \vee q$ est une modalité,*
- (c) *le morphisme de faisceaux $\Omega \rightarrow \Omega$ donné en envoyant q sur $(q \Rightarrow p) \Rightarrow p$ est une modalité.*

Nous ne pouvons pas prouver la proposition 7.54 ici, mais nous donnons des références dans la section 7.6.

Exercice [Exercice 7.55] Soit S le faisceau des personnes comme dans la section 7.4.3, et soit $j : \Omega \rightarrow \Omega$ “en supposant que Bob est à San Diego ...”.

1. Nommer un prédicat $p : S \rightarrow \Omega$, tel que “aime le temps qu’il fait”.
2. Choisir un intervalle de temps U . Pour une personne arbitraire $s \in S(U)$, quel genre de chose est $p(s)$, et que signifie-t-elle ?
3. Quel genre de chose est $j(p(s))$ et que signifie-t-elle ?
4. Est-il vrai que $p(s) \leq j(p(s))$? Expliquer brièvement.
5. Est-il vrai que $j(j(p(s))) = j(p(s))$? Expliquer brièvement.
6. Choisir un autre prédicat $q : S \rightarrow \Omega$. Est-il vrai que $j(p \wedge q) = j(p) \wedge j(q)$? Expliquer brièvement.

7.4.6 Théories des types et sémantique

Nous avons parlé de la logique d’un topos en termes d’ensembles ouverts, mais c’est en fait une confusion entre deux idées qu’il vaut mieux ne pas confondre. La première est la logique, ou langage formel, et la seconde est la sémantique, ou signification. Le langage formel ressemble à ceci :

$$\forall(t : T). \exists(s : S). f(s) = t \quad (7.18)$$

et les énoncés sémantiques sont comme “le morphisme de faisceaux $f : S \rightarrow T$ est un épimorphisme”. Dans le premier, le monde logique, tous les énoncés sont des expressions linguistiques formées selon des règles strictes, et toutes les preuves sont des déductions qui suivent aussi des règles strictes. Dans le second, le monde sémantique, les énoncés et les preuves portent sur les faisceaux eux-mêmes, en tant qu’objets mathématiques. Nous admettons que ce sont des énoncés approximatifs ; là encore, notre but ici est seulement de donner un avant-goût, une invitation à une lecture plus approfondie.

Fournir une sémantique pour un système logique signifie fournir un compilateur qui convertit chaque énoncé logique du langage formel en un énoncé mathématique sur des faisceaux particuliers et leurs relations. Un ordinateur peut effectuer des déductions logiques sans savoir ce que chacune “signifie” à propos des faisceaux. Nous disons que la sémantique est *correcte* si chaque preuve formelle est convertie en un fait vrai sur les faisceaux pertinents.

Chaque topos peut être assigné à un langage formel, souvent appelé son *langage interne*, dans lequel effectuer des constructions et des preuves formelles. Ce langage a une sémantique correcte

- une sorte de compilateur logique-vers-faisceaux - qui porte le nom de *sémantique catégorique* ou *sémantique de Kripke-Joyal*. Dans cette section, nous avons esquissé les idées de base ; nous donnons des références à la littérature dans la section 7.6.

Exemple [Exemple 7.56] Dans tout topos $\mathcal{E}$, et pour tout $f : S \rightarrow T$ dans $\mathcal{E}$, le morphisme f est un épimorphisme si et seulement si l'équation (7.18) tient. Par exemple, considérons le cas des instances de base de données sur un schéma $\mathcal{C}$, disons avec 100 tables (l'une d'elles pouvant être notée $c \in \text{Ob}(\mathcal{C})$) et 500 colonnes de clés étrangères (l'une d'elles pouvant être notée $f : c \rightarrow c'$ dans $\mathcal{C}$) ; voir équation (3.2).

Si S et T sont deux instances et f est une transformation naturelle entre elles, alors nous pouvons poser la question de savoir si l'équation (7.18) tient ou non. Cette simple formule est compilée par la sémantique de Kripke-Joyal en demandant :

Est-il vrai que pour chaque table $c \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ et chaque ligne $t \in T(c)$, il existe une ligne $s \in S(c)$ telle que $f(s) = t$?

C'est exactement ce que signifie que f est surjective. Peut-être que ce n'est pas très impressionnant, mais que l'on parle de bases de données ou d'espaces topologiques, ou d'idées complexes de la géométrie algébrique, l'équation (7.18) se compile toujours en la question de la surjectivité. Pour les espaces topologiques, cela dirait quelque chose comme :

Est-il vrai que pour chaque ouvert $U \subseteq X$ et chaque section $t \in T(U)$ du fibré T , il existe un recouvrement ouvert $(U_i \subseteq U)_{i \in I}$ de U et une section $s_i \in S(U_i)$ du fibré S pour chaque $i \in I$ telle que $f(s_i) = t|_{U_i}$ soit la restriction de t à U_i ?

7.5 Un topos de types de comportement (début)

Maintenant que nous avons discuté de la logique dans un topos de faisceaux, revenons à notre exemple motivant, un topos de types de comportement. Nous commençons par discuter de l'espace topologique sur lequel les types de comportement seront des faisceaux, un espace appelé le *domaine des intervalles*.

7.5.1 Le domaine des intervalles

Le domaine des intervalles $\mathbb{IR}$ est un espace topologique spécifique, que nous utiliserons pour modéliser des intervalles de temps. En d'autres termes, nous nous intéresserons à la catégorie $\text{Shv}(\mathbb{IR})$ des faisceaux sur le domaine des intervalles.

Le domaine des intervalles $\mathbb{IR}$ est un espace topologique spécifique, que nous utiliserons pour modéliser des intervalles de temps. En d'autres termes, nous nous intéresserons à la catégorie $\text{Shv}(\mathbb{IR})$ des faisceaux sur le domaine des intervalles.

Pour donner un espace topologique, il faut donner une paire (X, Op) , où X est un ensemble de “points” et Op est une topologie sur X ; voir définition 7.17. L’ensemble des points de $\mathbb{IR}$ est celui de tous les intervalles fermés finis

$$\mathbb{IR}\{[d, u] \subseteq \mathbb{R} \mid d \leq u\}.$$

Pour $a < b$ dans $\mathbb{R}$, notons $o_{[a,b]}$ l’ensemble $o_{[a,b]}\{[d, u] \in \mathbb{IR} \mid a < d \leq u < b\}$; ceux-ci sont appelés *ouverts de base*. La topologie Op est déterminée par ces ouverts de base en ce qu’un sous-ensemble U est ouvert s’il est l’union d’une collection d’ouverts de base.

Ainsi par exemple, $o_{[0,5]}$ est un ouvert : il contient tout $[d, u]$ contenu dans l’intervalle ouvert $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 5\}$. De même $o_{[4,8]}$ est un ouvert, mais notons que $o_{[0,5]} \cup o_{[4,8]} \neq o_{[0,8]}$. En effet, l’intervalle $[2, 6]$ est dans le membre de droite mais pas dans celui de gauche.

Exercice [Exercice 7.58]

1. Expliquer pourquoi $[2, 6] \in o_{[0,8]}$.
2. Expliquer pourquoi $[2, 6] \notin o_{[0,5]} \cup o_{[4,8]}$.

Soit Op l’ensemble des ouverts de $\mathbb{IR}$, comme décrit ci-dessus, et soit $\text{BTShv}(\mathbb{IR}, \text{Op})$ le topos des faisceaux sur cet espace. Nous l’appelons le *topos des types de comportement*.

Il y a un sous-espace important de $\mathbb{IR}$, à savoir l’espace habituel des nombres réels $\mathbb{R}$. Nous voyons $\mathbb{R}$ comme un sous-espace de $\mathbb{IR}$ via l’isomorphisme

$$\mathbb{R} \cong \{[d, u] \in \mathbb{IR} \mid d = u\}.$$

Nous avons discuté de la topologie habituelle sur $\mathbb{R}$ dans l’exemple 7.18, mais nous obtenons aussi une topologie sur $\mathbb{R}$ parce qu’il est un sous-ensemble de $\mathbb{IR}$; c’est-à-dire que nous avons la topologie induite comme décrit dans l’exercice 7.24. Celles-ci coïncident, comme le lecteur peut le vérifier.

Exercice [Exercice 7.59] Montrer qu’un sous-ensemble $U \subseteq \mathbb{R}$ est ouvert dans la topologie induite de $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{IR}$ si et seulement si $U \cap \mathbb{R}$ est ouvert dans la topologie habituelle sur $\mathbb{R}$ définie dans l’exemple 7.18.

7.5.2 Faisceaux sur $\mathbb{IR}$

Nous ne pouvons pas entrer dans beaucoup de détails sur le topos de faisceaux $\text{BT} = \text{Shv}(\mathbb{IR}, \text{Op})$, pour des raisons de place ; nous renvoyons le lecteur intéressé à la section 7.6. Dans cette section, nous discuterons brièvement de ce que signifie être un faisceau sur $\mathbb{IR}$, en donnant quelques exemples, y compris celui du classificateur de sous-objets.

Qu’est-ce qu’un faisceau sur $\mathbb{IR}$? Un faisceau S sur le domaine des intervalles $(\mathbb{IR}, \text{Op})$ est un foncteur $S : \text{Op}^{\text{op}} \rightarrow \text{Set}$: il assigne à chaque ouvert U un ensemble $S(U)$; comment devons-nous interpréter cela ? Un élément $s \in S(U)$ est quelque chose qui dit être un “événement qui a lieu pendant tout l’intervalle U ”. Étant donné cet U -événement s avec un ouvert $V \subseteq U$, il y a un

V -événement $s|_V$ qui nous dit ce qu'est s si on le regarde comme un événement ayant lieu pendant tout V . Si $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ et qu'on peut trouver des U_i -événements compatibles (s_i) pour chaque $i \in I$, alors la condition de faisceau (définition 7.27) dit qu'ils ont un recollement unique, c'est-à-dire un U -événement $s \in S(U)$ qui les englobe tous : $s|_{U_i} = s_i$ pour chaque $i \in I$.

Nous avons dit dans la section 7.5.1 que tout ouvert $U \subseteq \mathbb{R}$ peut s'écrire comme l'union d'ouverts de base $o_{[a,b]}$. Cela implique que tout faisceau S est déterminé par ses valeurs $S(o_{[a,b]})$ sur ces ouverts de base. La condition de faisceau implique en outre que celles-ci varient continûment dans un certain sens, que nous pouvons exprimer formellement comme

$$S(o_{[a,b]}) \cong \lim_{\epsilon \rightarrow 0} S(o_{[a-\epsilon, b+\epsilon]}).$$

Cependant, plutôt que d'entrer dans les détails, nous décrivons quelques sortes de faisceaux qui peuvent être intéressants.

Exemple [Exemple 7.60] Pour tout ensemble A , il y a un faisceau $A \in \text{Shv}(\mathbb{R})$ qui assigne à chaque ouvert U l'ensemble $A(U)A$. Cela nous permet de nous référer aux entiers, aux nombres réels, ou aux lettres d'un alphabet, comme s'ils étaient des comportements. Quel genre de comportement est $7 \in \mathbb{N}$? C'est le genre de comportement qui ne change jamais : c'est toujours sept. Ainsi A est appelé le *faisceau constant* sur A .

Exemple [Exemple 7.61] Fixons un espace topologique (X, Op_X) . Alors il y a un faisceau F_X des fonctions locales de $\mathbb{R}$ vers X . C'est-à-dire que pour tout ouvert $U \in \text{Op}_{\mathbb{R}}$, nous assignons l'ensemble $F_X(U)\{f : U \rightarrow X \mid f \text{ est continue}\}$. Il y a aussi le faisceau G_X des fonctions locales sur le sous-espace $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}$. C'est-à-dire que pour tout ouvert $U \in \text{Op}_{\mathbb{R}}$, nous assignons l'ensemble $G_X(U)\{f : U \cap \mathbb{R} \rightarrow X \mid f \text{ est continue}\}$.

Exercice [Exercice 7.62] Vérifions que l'exemple 7.61 a un sens. Fixons un espace topologique (X, Op_X) et un sous-ensemble $R \subseteq \mathbb{R}$ du domaine des intervalles. Définissons $H_X(U)\{f : U \cap R \rightarrow X \mid f \text{ est continue}\}$.

1. H_X est-il un préfaisceau ? Si non, pourquoi ; si oui, quelles sont les applications de restriction ?
2. H_X est-il un faisceau ? Pourquoi ou pourquoi pas ?

Exemple [Exemple 7.63] Une autre source d'exemples vient du monde des systèmes dynamiques hybrides ouverts. Ce sont des machines dont le comportement est un mélange de mouvements continus - généralement imaginés comme des trajectoires à travers un champ de vecteurs - et de sauts discrets. Ces sauts sont imaginés comme étant causés par des signaux qui arrivent spontanément. Sur tout intervalle de temps, un système hybride a certaines choses qu'il peut faire et certaines qu'il ne peut pas. Bien que nous ne rendrons pas cela précis ici, il existe une construction pour convertir tout système hybride en un faisceau sur $\mathbb{R}$; nous donnerons des références dans la section 7.6.

Nous appelons les faisceaux sur $\mathbb{R}$ des *types de comportement* parce que presque n'importe quel type de comportement qu'on peut imaginer est un type de comportement. Bien sûr, un type de

comportement complexe - comme la façon dont quelqu'un agit quand il est amoureux - serait extrêmement difficile à écrire. Mais l'idée est simple : pour tout intervalle de temps, disons un intervalle de trois jours $(d, d + 3)$, soit $L(d, d + 3)$ l'ensemble de tous les comportements possibles qu'une personne amoureuse pourrait avoir. De toute évidence, c'est un ensemble vaste et ingérable, et personne ne voudrait le rendre précis. Mais dans la mesure où l'on peut imaginer ce genre de comportement comme se produisant à travers le temps, on pourrait imaginer le faisceau correspondant.

Le classificateur de sous-objets comme faisceau sur $\mathbb{I}\mathbb{R}$. Dans tout topos de faisceaux, le classificateur de sous-objets Ω est lui-même un faisceau. Il est responsable des valeurs de vérité dans le topos. Comme nous l'avons dit dans la section 7.4.1, lorsqu'il s'agit de faisceaux sur un espace topologique (X, Op) , les valeurs de vérité sont les sous-ensembles ouverts $U \in \text{Op}$.

BT est le topos des faisceaux sur l'espace $(\mathbb{I}\mathbb{R}, \text{Op})$, comme défini dans la section 7.5.1. Comme toujours, le classificateur de sous-objets Ω assigne à tout $U \in \text{Op}$ l'ensemble des sous-ensembles ouverts de U , donc ce sont les valeurs de vérité. Mais que signifient-elles ? L'idée est que toute proposition, telle que "Bob aime le temps qu'il fait", renvoie un ouvert U , comme pour répondre que Bob aime le temps qu'il fait "... pendant toute la période de temps U ". Explorons cela un peu plus.

Supposons que Bob aime le temps qu'il fait pendant tout l'intervalle $(0, 5)$ et pendant tout l'intervalle $(4, 8)$. Nous concluons probablement que Bob aime le temps qu'il fait pendant tout l'intervalle $(0, 8)$. Mais qu'en est-il de l'énoncé plus sinistre "une seule paire d'yeux est restée à surveiller la position p ". Alors, simplement parce que c'est vrai sur $(0, 5)$ et sur $(4, 8)$, cela n'implique pas que ce soit vrai sur $(0, 8)$: il peut y avoir eu un changement de garde, où un guetteur a été relevé par un autre. Comme autre exemple, considérons l'énoncé "le marché boursier n'a pas baissé de plus de 10 points". Cela pourrait être vrai sur $(0, 5)$ et vrai sur $(4, 8)$ mais pas sur $(0, 8)$. Afin de capturer la sémantique d'énoncés comme ceux-ci - des énoncés qui prennent du temps à évaluer - nous devons utiliser l'espace $\mathbb{I}\mathbb{R}$ plutôt que l'espace $\mathbb{R}$.

7.5.3 Preuves de sûreté en logique temporelle

Nous avons maintenant au moins une idée de base de ce qui entre dans une preuve de sûreté, disons pour des véhicules autonomes, ou des avions dans le système national de l'espace aérien. En fait, les idées sous-jacentes de ce chapitre sont issues d'un projet entre le MIT, Honeywell Inc. et la NASA [SSV18]. Le contexte du projet était que le système national de l'espace aérien consiste en de nombreux systèmes différents interagissant : des interactions entre avions, chacun étant une interaction entre la physique, les humains, les capteurs et les actionneurs, chacun étant une interaction entre des parties encore plus fondamentales. Le même genre d'histoire vaudrait pour une flotte de véhicules autonomes, comme dans l'introduction de ce chapitre.

Supposons que chacun des systèmes - à n'importe quel niveau - soit garanti de satisfaire une certaine propriété. Par exemple, peut-être pouvons-nous supposer qu'un moteur est soit à court de carburant, soit a une conduite de carburant cassée, soit suit les ordres d'un conducteur ou pilote humain. S'il y a une rupture dans la conduite de carburant, les capteurs alerteront l'humain dans les trois secondes, etc. Chacun des composants interagit avec un certain nombre de variables diffé-

rentes. Dans le cas des avions, un pilote interagit avec la radio, les positions des cadrans, la position de la manette des gaz, et les données visuelles devant elle. Le composant - ici le pilote - est garanti de maintenir ces variables dans une certaine relation : “si je vois quelque chose, je dirai quelque chose” ou “si les cadrans sont en position bad_{pos} , j’actionnerai la manette des gaz dans la seconde”. Nous appelons ces garanties des *contrats de comportement*.

Tout ce qui précède peut être capturé dans le topos BT des types de comportement. Les variables sont des types de comportement : l’altimètre est une variable dont la valeur $\theta \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ change continûment par rapport au temps. La manette des gaz est aussi une variable changeant continûment dont la valeur est dans l’intervalle $[0, 1]$, etc.

Les relations garanties - les contrats de comportement - sont données par des prédicats sur les variables. Par exemple, si le pilote actionnera toujours la manette des gaz dans la seconde suivant le moment où les cadrans sont en position bad_{pos} , *cela peut être capturé par un prédicat* $p : \text{cadrans} \times \text{manettes} \rightarrow \Omega$. Bien que nous n’ayons pas écrit de langage formel pour p , on pourrait imaginer le prédicat $p(D, T)$ pour $D : \text{cadrans}$ et $T : \text{manettes}$ comme

$$\begin{aligned} & \forall(t : \mathbb{R}). \oplus_t (\text{bad_pos}(D)) \Rightarrow \\ & \exists(r : \mathbb{R}). (0 < r < 1) \wedge \forall(r' : \mathbb{R}). 0 \leq r' \leq 5 \Rightarrow \oplus_{t+r+r'}(\text{engaged}(T)). \end{aligned} \tag{7.19}$$

Ici $\oplus_t$ est une modalité, comme nous l’avons discuté dans la définition 7.52 ; en fait, il s’avère que c’est l’une de type 3 de la proposition 7.54, mais nous ne pouvons pas entrer dans cela. Pour une proposition q , l’énoncé $\oplus_t(q)$ dit que q est vraie dans un voisinage suffisamment petit autour de t . Donc (7.19) dit “en commençant dans la seconde suivant chaque fois que les cadrans disent que nous sommes en mauvaise position, j’actionnerai les propulseurs pendant cinq secondes”.

Étant donné un déroulement réel des événements sur une période de temps U , c’est-à-dire une section réelle $D \in \text{cadrans}(U)$ et une section $T \in \text{manettes}(U)$, le prédicat de l’équation (7.19) tiendra sur certaines parties de U et pas sur d’autres, et c’est la valeur de vérité de p . Espérons que le pilote respecte son contrat de comportement à tout moment où elle pilote, auquel cas la valeur de vérité sera vraie pendant tout cet intervalle U . Mais si le pilote rompt son contrat sur certains intervalles, alors ce fait est enregistré dans Ω .

La logique nous permet d’enregistrer des axiomes comme celui montré dans l’équation (7.19) et de raisonner à partir d’eux : par exemple, si le pilote et l’avion, et au moins l’un des trois radars, respectent leurs contrats, alors une séparation sûre sera maintenue. Nous ne pouvons pas donner plus de détails ici, mais ces questions ont été traitées en détail dans [SS18] ; voir la section 7.6.

7.6 Résumé et lectures complémentaires

Ce chapitre portait sur la modélisation de diverses sortes de comportement à l’aide de faisceaux sur un espace d’intervalles de temps. Le comportement peut sembler être quelque chose qui se produit maintenant, dans le présent, mais en fait notre mémoire du comportement passé informe sur ce que le comportement actuel signifie. Pour s’engager dans quoi que ce soit, pour planifier ou achever tout type de processus, on doit être capable de raisonner sur des intervalles de temps. Ce qui est agréable avec les faisceaux temporels - en fait les faisceaux sur n’importe quel site - c’est qu’ils

s'insèrent dans une structure catégorique appelée un topos, qui possède de nombreuses propriétés formelles utiles. En particulier, il est équipé d'une logique d'ordre supérieur avec laquelle nous pouvons raisonner formellement sur la façon dont les faisceaux temporels interagissent lorsqu'ils sont combinés dans des systèmes plus grands. Une version beaucoup plus détaillée de cette histoire a été présentée dans [SS18]. Mais cela aurait été impossible sans l'édifice extensif de la théorie des topos et de la théorie des domaines qui a été développé au cours des six dernières décennies.

Les topos de faisceaux ont été inventés par Grothendieck et son école dans les années 1960 [AGV71] comme une approche pour prouver des conjectures à l'intersection de la géométrie algébrique et de la théorie des nombres, appelées conjectures de Weil. Peu après, Lawvere et Tierney ont reconnu que les topos avaient toute la structure nécessaire pour faire de la logique, et avec tout un ensemble d'autres théoriciens des catégories, le sujet a été développé à un degré impressionnant dans de nombreuses directions. Pour une histoire beaucoup plus complète, voir [McL90].

Il existe de nombreuses sortes de références sur la théorie des topos. Une qui commence par introduire les catégories puis passe aux topos, en se concentrant sur la logique, est [McL92]. Notre traitement préféré est peut-être [MM92], où les aspects géométriques jouent un rôle central. Enfin, Johnstone a rendu un immense service au domaine en rassemblant une grande partie de la théorie dans un ensemble de deux volumes [Joh02]; c'est très dense, mais une référence essentielle pour l'étudiant sérieux ou le chercheur. Pour la sémantique catégorique (Kripke-Joyal) de la logique dans un topos, on consultera [MM92], [Jac99], ou [LS88].

Nous n'avons pas beaucoup mentionné la théorie des domaines dans ce chapitre, à part en faisant référence au domaine des intervalles. Mais les domaines, au sens de Dana Scott, jouent un rôle important dans les aspects plus profonds de la théorie des types temporels. Une bonne référence est [Gie+03], mais pour une introduction nous suggérons [AJ94].

Dans un certain sens, notre domaine d'application a été une sorte très générale de système dynamique. D'autres approches catégoriques de ce sujet incluent [JNW96], [HTP03], [AS05], et [Law86], bien qu'il y en ait beaucoup d'autres.

Nous espérons que vous avez apprécié les sept esquisses de ce livre. Comme prochaine étape, envisagez d'organiser un cours de lecture sur la théorie des catégories appliquées avec des amis ou des collègues. Simultanément, nous espérons que vous commencerez à rechercher des façons catégorielles de penser des sujets familiers. Peut-être trouverez-vous quelque chose que vous voudrez contribuer à ce domaine en croissance de la théorie des catégories appliquées, ou comme nous l'appelons parfois, le domaine de la *compositionnalité*.