Sur une formule empirique reliée au théorème de Goldbach.

N. M. Shah, Trinity College
B. M. Wilson, Trinity College.

(Communiqué par G. H. Hardy.)

§ 1. Les calculs suivants trouvent leur origine dans une requête qui nous a été faite récemment par MM. G. H. Hardy et J. E. Littlewood, qui était que nous devrions vérifier une formule asymptotique suggérée pour le nombre $\nu(n)$ de façons d'exprimer un nombre pair donné n comme somme de deux nombres premiers. La formule en question est

$$\nu(n) \sim \lambda(n) = 2A\frac{n}{(\log\, n)^2}\frac{p-1}{p-2}\,\frac{q-1}{q-2}\dots \tag{1}$$

où $n = 2^\alpha p^a q^b \dots \quad (\alpha \geqslant 1)$
et A dénote la constante

$$\prod_{p=3}^{\infty}\left\{1-\frac{1}{(p-1)^2}\right\},$$

p représentant, dans ce produit, les valeurs des nombres premiers impairs 3, 5, 7, 11, 13,. . . .

La formule (1) était déduite d'une autre formule asymptotique conjecturée, notamment

$$\sum_{m+m'=n}\Lambda(m)\Lambda(m') \sim 2An\frac{p-1}{p-2}\,\frac{q-1}{q-2}\dots \tag{2}$$

où $\Lambda(m)$ est la fonction arithmétique égale à $\log\, p$ quand m est un nombre premier p, ou une puissance de p, et qui vaut zéro sinon, et la somme à gauche est étendue à toutes les paires de nombres entiers positifs m, m' tels que

$$m + m' = n.$$

La formule (1) découle de (2) en remplaçant dans cette dernière $\Lambda(m)$ et $\Lambda(m')$ chacun par $\log\, n$. Il est naturel, pourtant, d'attendre un résultat plus précis si on remplace $\Lambda(m)$ et $\Lambda(m')$ non pas par $\log\, n$ mais par $\log \frac{1}{2}n$, ou, mieux encore, si on remplace le côté gauche de (2) par

$$\frac{\nu(n)}{n}\int_0^n \log\, x \log(n-x)dx \tag{3}$$

La valeur exacte de l'expression (3) se trouve être

$$\nu(n)\{(\log\, n)^2 - 2\log\, n + 2 - \tfrac{1}{6}\pi^2\} \tag{4}$$

Les différentes formules ainsi obtenues à partir de (2) sont, bien sûr, toutes asymptotiquement équivalentes ; mais les formules modifiées semblent donner des résultats plus précis que (1) pour des valeurs comparativement petites de n. On utilise la formule

$$\nu(n) \sim \rho(n) = 2A\frac{n}{(\log\, n)^2 - 2\log\, n}\frac{p-1}{p-2}\,\frac{q-1}{q-2}\dots \tag{5}$$

[*Reçu le* 20 Janvier 1919 : *lu le* 3 Février 1919.]
Transcription en Latex et traduction, Denise Vella-Chemla, décembre 2022, de l'article à la page 238 des Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, vol. XIX, 1919, ici https://www.biodiversitylibrary.org/item/95836page/7/mode/1up.

obtenue en ignorant la constante $2 - \frac{1}{6}\pi^2$ dans (4).

§ 2. Pour les données numériques utilisées nous les devons à deux sources différentes. Les résultats numériques les plus complets sont contenus dans les tables compilées et publiées par R. Haussner[1], qui donnent les valeurs de $\nu(n)$ pour toutes les valeurs de n n'excédant pas 5000. Des tables allant jusqu'à 1000 et 2000 avaient été calculées précédemment par G. Cantor et V. Aubry. Des données supplémentaires, moins systématiques, en effet, que celles de Haussner, mais étant fournies pour des valeurs considérablement plus grandes de n ont été données par L. Ripert[2] dans un certain nombre de courts articles dans *l'Intermédiaire des mathématiciens*.

Les valeurs données pour $\nu(n)$ dans les tables de cette note diffèrent, selon plusieurs aspects, de celles fournies par Haussner ou Ripert. En premier lieu, $m + m'$ et $m' + m$ sont comptés ici comme des décompositions différentes, alors que les deux auteurs ci-dessus les considèrent comme identiques ; deuxièmement, nous ne voyons pas 1 comme un nombre premier ; et troisièmement, nous augmentons les valeurs de $\nu(n)$ obtenues à partir de leurs tables en additionnant le nombre de façons dont n peut être calculé comme somme de deux puissances de nombres premiers , i.e. le nombre de décompositions de la forme

$$n = p^a + q^b,$$

où p et q sont premiers, et où soit a soit b est plus grand que 1. Les deux dernières modifications n'affectent en rien, bien sûr, la formule asymptotique, mais il semble naturel de relever ces modifications quand on considère la genèse des formules (1) ou (5).

Au regard du choix de l'arrangement des nombres n dans la table, les plus petits nombres - i.e. les nombres inférieurs à 5000 - sont destinés à être "typiques" ; c'est-à-dire que ce sont des nombres spécifiquement sélectionnés, pris en groupes de manière à mieux tester ou illustrer la précision de la formule (1). Ainsi, par exemple, si la formule en question est correcte, on peut s'attendre, en général, à ce qu'un multiple de 6 ait un nombre inhabituellement grand de décompositions[3]. D'un autre côté, on peut s'attendre à ce qu'une puissance de deux ait un petit nombre de décompositions. On a sélectionné des nombres inférieurs à 5000 par groupes de quatre ou cinq, tous les nombres de chaque groupe étant aussi proches que possible les uns des autres ; et chaque groupe de nombres contient en général un nombre hautement composé (i.e. 2.3.5.7.11...), une puissance de 2, et un nombre qui est le produit de 2 et d'un nombre premier.

Pour les valeurs de n n'excédant pas 5000, un tel choix de nombres "typiques" était, malheureusement, impossible sans un gros volume de nouveaux calculs. Ripert, en effet, a sélectionné ses nombres selon un certain système, et ils sont regroupés en général par valeurs similaires ; mais il les a sélectionnés avec différents objectifs de telle façon que ces nombres ne sont, de notre point de vue, ni "typiques" ni arbitraires.

La table ci-dessous donne le nombre de décompositions - réel et théorique - de trente-cinq nombres

[1] *Nova Acta der Akad. der Naturforscher* (Halle), vol. 72 (1897), pp. 5-214.

[2] Voir, par exemple, vol. 10 (1903), pp. 76-77, 166-167.

[3] Cela a été remarqué en premier par Cantor, et il a mis en évidence sur ses résultats numériques précédemment mentionnés, qu'il en est effectivement ainsi.

; la valeur trouvée pour la constante A est 0.66016. Dans la seconde colonne, le premier nombre est le nombre de décompositions, en utilisant seulement des nombres premiers, et le second est le nombre de décompositions dans lesquelles interviennent des puissances de nombres premiers plus grandes que le premier.

§ 3. *Table de décompositions.*

n	$\nu(n)$	$\rho(n)$	$\nu(n):\rho(n)$
$30 = 2.3.5$	$6+4=10$	22	.45...
$32 = 2^5$	$4+7=11$	8	1.38...
$34 = 2.17$	$7+6=13$	9	1.44...
$36 = 2^2.3^2$	$8+8=16$	17	.94
$210 = 2.3.5.7$	$42+0=42$	49	.85
$214 = 2.107$	$17+0=17$	16	1.07
$216 = 2^3.3^3$	$28+0=28$	32	.88
$256 = 2^8$	$16+3=19$	17	1.10
$2048 = 2^{11}$	$50+17=67$	63	1.06
$2250 = 2.3^2.5^3$	$174+26=200$	179	1.11
$2304 = 2^8.3^2$	$134+8=142$	136	1.04
$2306 = 2.1153$	$67+20=87$	69	1.26
$2310 = 2.3.5.7.11$	$228+16=244$	244	1.00
$3888 = 2^4.3^5$	$186+24=210$	197	1.06
$3898 = 2.1949$	$99+6=105$	99	1.06
$3990 = 2.3.5.7.19$	$328+20=348$	342	1.02
$4096 = 2^{12}$	$104+5=109$	102	1.06
$4996 = 2^2.1249$	$124+16=140$	119	1.18
$4998 = 2.3.7^2.17$	$288+20=308$	305	1.01
$5000 = 2^3.5^4$	$150+26=176$	157	1.12
$8190 = 2.3^2.5.7.13$	$578+26=604$	597	1.01
$8192 = 2^{13}$	$150+32=182$	171	1.06
$8194 = 2.17.241$	$192+10=202$	219	.92
$10008 = 2^3.3^2.139$	$388+30=418$	396	1.06
$10010 = 2.5.7.11.13$	$384+36=420$	384	1.09
$10014 = 2.3.1669$	$408+8=416$	396	1.05
$30030 = 2.3.5.7.11.13$	$1800+54=1854$	1795	1.03
$36960 = 2^5.3.5.7.11.17$	$1956+38=1994$	1937	1.03
$39270 = 2.3.5.7.11.17$	$2152+36=2188$	2213	.99
$41580 = 2^2.3^3.5.7.11$	$2140+44=2184$	2125	1.03
$50026 = 2.25013$	$702+8=710$	692	1.03
$50144 = 2^5.1567$	$674+32=706$	694	1.02
$170166 = 2.3.79.359$	$3734+46=3780$	3762	1.00
$170170 = 2.5.7.11.13.17$	$3784+8=3792$	3841	.99
$170172 = 2^2.3^2.29.163$	$3732+48=3780$	3866	.98

§ 4. Goldbach a affirmé que tout nombre pair est la somme de deux nombres premiers et cette proposition non prouvée est habituellement appelée “le théorème de Goldbach”. Il est évident que la vérité de la formule de Hardy et Littlewood impliquerait celle du théorème de Goldbach, à n'importe quel niveau pour tous les nombres à partir d'un certain d'entre eux.

De précédents auteurs, à partir de Cantor, avaient noté que l'irrégularité de la variation de $\nu(n)$ dépend de la structure de n comme produit de nombres premiers. Dans un court résumé dans les

Proceedings de la London Mathematical Society, Sylvester[4] a suggéré la formule

$$\nu(n) \sim \frac{2n}{\log n} \prod \frac{p-2}{p-1} \tag{6}$$

où, dans le produit sur la droite, p représente tous les nombres premiers de 3 à $\sqrt{n}$, exceptés ceux qui sont des facteurs de n. Sylvester donne peu d'indications sur la façon dont il est arrivé à la formule, et en effet, beaucoup d'éléments dans son papier ne sont pas très clairs. Il est évident, au premier coup d'œil, que si n, n' sont deux nombres grands, mais à peu près égaux, nombres pairs, les valeurs fournies par le ratio $\nu(n) : \nu(n')$ par les formules (1) et (6) seront les mêmes. Car si

$$n = 2^\alpha p^a q^b \ldots$$

et

$$n' = 2^{\alpha'} p'^{a'} q'^{b'} \ldots$$

les deux formules donneront, comme expression approchée pour ce ratio, le quotient

$$\frac{p-1}{p-2}\,\frac{q-1}{q-2} \cdots \Big/ \frac{p'-1}{p'-2}\,\frac{q'-1}{q'-2} \cdots$$

Les valeurs réelles de $\nu(n)$ seraient pourtant différentes. À partir de la formule (6), on devrait déduire

$$\nu(n) \sim \frac{2n}{\log n} \prod \frac{p-1}{p-2}\,\frac{q-1}{q-2} \cdots \prod_{h \leqslant \sqrt{n}} \frac{h-2}{h-1}.$$

Maintenant

$$\begin{aligned} \prod_{p \leqslant \sqrt{n}} \frac{p-2}{p-1} &= \prod_{p \leqslant \sqrt{n}} \frac{p\,(p-2)}{p\,(p-1)} \\ &= \prod_{p \leqslant \sqrt{n}} \frac{(p-1)^2 - 1}{(p-1)^2} \prod_{p \leqslant \sqrt{n}} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \\ &\sim A \prod_{p \leqslant \sqrt{n}} \left(1 - \frac{1}{p}\right), \end{aligned}$$

où A est la même constante que dans la formule (1). Il est également connu[5] que

$$\prod_{p \leqslant \sqrt{n}} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \sim \frac{2e^{-\gamma}}{\log n},$$

de telle façon que (6) est équivalent à

$$\nu(n) \sim 4Ae^{-\gamma} \frac{n}{(\log n)^2} \frac{p-1}{p-2}\,\frac{q-1}{q-2} \cdots \tag{7}$$

Par conséquent les valeurs asymtotiques fournies pour $\nu(n)$ par (6) et par (1) sont dans le ratio $2e^{-\gamma} : 1$, i.e. dans le ratio $1.123 : 1$.

[4] *Proc. London Math. Soc.*, vol. 4 (1871), pp. 4-6 (*Math. Papers*, vol. 2. pp. 709- 711). Voir aussi *Math. Papers*, vol. 4, pp. 734-737.

[5] Landau, *Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen*, p. 140.

Une formule assez différente a été suggérée par Stäckel[6], viz

(8) $$\nu(n) \sim \frac{n^2}{(\log\ n)^2 \phi(n)}$$

où $\phi(n)$ dénote, comme d'habitude, le nombre de nombres inférieurs à n et premiers à n. Cela est équivalent à

(9) $$\nu(n) \sim \frac{n^2}{(\log\ n)^2} \frac{p}{p-1} \frac{q}{q-1} \cdots$$

Puisque $p/(p-1)$ est plus proche de l'unité que $(p-1)/(p-2)$, les oscillations de $\nu(n)$ devraient, si la formule de Stäckel était correcte, être décidément moins prononcées qu'elles devraient l'être si (1) était correcte. Comme entre les deux formules, l'évidence numérique semble être décisive. Ainsi, le ratio $\nu(8190)\ :\ \nu(8192)$ est 3.32, alors que selon (1) il devrait être égal à 3.48, et selon la formule de Stäckel il devrait être égal à 2.37. Le résultat de Stäckel est obtenu à partir de considérations de probabilités qui ignorent entièrement l'irrégularité de la distribution des nombres premiers dans un intervalle donné $n \leqslant N$, et il n'est pas surprenant, par conséquent, que cela soit sérieusement erroné.

D'un autre côté, on devrait observer que la formule de Sylvester donne, dans le domaine de la table de la p. 240, de très bons résultats, pas bien pire que ceux donnés par (5), et décidément meilleurs que ceux donnés par (1). On montre cela dans la table suivante, dans laquelle on a négligé les décompositions en puissances de nombres premiers.

n	Formule (7) $\nu(n) : 2e^{-\gamma}\lambda(n)$	Formule (1) $\nu(n) : \lambda(n)$
$2048 = 2^{11}$	.95	1.06
$2250 = 2.3^2.5^3$	1.17	1.31
$2304 = 2^8.3^2$	1.18	1.33
$2306 = 2.1153$	1.17	1.31
$2310 = 2.3.5.7.11$	1.12	1.26
$10008 = 2^3.3^2.139$	1.11	1.25
$10010 = 2.5.7.11.13$	1.12	1.27
$10014 = 2.3.1669$	1.17	1.32
$170166 = 2.3.79.359$	1.06	1.19
$170170 = 2.5.7.11.13.17$	1.05	1.18
$170172 = 2^2.3^2.29.163$	1.04	1.16

§ 5. Il a été montré par Landau[7] que

(10) $$\sum_1^n \nu(h) \sim \frac{n^2}{2(\log\ n)^2}$$

et que la formule de Stäckel est inconsistante avec (10), et par conséquent incorrecte.

Le même test peut être appliqué à la formule (1) et la formule (7) de Sylvester. En fait MM. Hardy et Littlewood ont montré[8] que (10) est une conséquence de (1): de quoi il découle, bien sûr, que la

[6] *Göttinger Nachrichten* (1896), pp. 292-299.
[7] *Göttinger Nachrichten* (1900), pp. 177-186.
[8] Voir leur note qui suit cet article.

formule asymptotique du type de (10), fournie par la formule de Sylvester, devrait être erronée à hauteur d'un facteur $2e^{-\gamma} = 1.123$; la formule de Sylvester est par conséquent également erronée ; et donc si *une quelconque* formule devait être correcte, cela devrait être (1).

Il peut paraître à première vue surprenant que, dans ces circonstances, la formule de Sylvester doive donner, pour d'assez grandes valeurs de n des résultats vraiment meilleurs (comme cela est illustré par les résultats de la table p. 242) que ceux donnés par (1). L'explication est à trouver dans la nature du terme d'erreur dans (1). La formule modifiée (5), dont on a déjà montré qu'il était probable qu'elle donnerait de meilleurs résultats que (1), pour des valeurs modérément grandes de n, diffère de (1) par un facteur du type

$$1 + \frac{2}{\log\, n} + \dots$$

Ce facteur n'affecte pas la valeur *asymptotique* de $\nu(n)$, mais il fait beaucoup de différence dans les limites dans lesquelles la vérification est possible : ainsi quand $n = 170\ 170$, il est égal à 1.166. Quand $n = 10^{10}$, il est égal à 1087, et la différence entre ce nombre et l'unité est négligeable seulement quand n est assez éloigné du domaine de calcul. Ce sont seulement de telles valeurs de n qui révèleraient la supériorité de la formule non modifiée (1) sur la formule de Sylvester.

§ 6. Peu de temps après que l'écriture des sections précédentes ait été achevée, M. Hardy nous a informés de l'existence d'une troisième formule asymptotique proposée pour $\nu(n)$, donnée plus récemment par V. Brun[9]. La formule à ls aquelle l'argument de Brun amène est

$$\nu(n) \sim 2Bn \frac{p-1}{p-2}\,\frac{q-1}{q-2}\dots \tag{11}$$

où

$$\begin{aligned} B &= \left(1-\frac{2}{3}\right)\left(1-\frac{2}{5}\right)\left(1-\frac{2}{7}\right)\dots\left(1-\frac{2}{h}\right) \\ &= \prod_{h=3}^{h<\sqrt{n}} \left(1-\frac{2}{h}\right). \end{aligned}$$

Par un argument similaire à celui utilisé dans le § 4, dans la réduction de la formule de Sylvester, on peut montrer que ceci est équivalent à la formule

$$\nu(n) \sim 8Ae^{-2\gamma} \frac{n}{(\log\, n)^2}\,\frac{p-1}{p-2}\,\frac{q-1}{q-2}\dots = 4e^{-2\gamma}\lambda(n). \tag{12}$$

Par conséquent, cette valeur asymptotique pour $\nu(n)$, et la valeur de Hardy-Littlewood sont dans le ratio $4e^{-2\gamma} : 1 = 1.263\dots : 1$. Leur sens géométrique est celui de Sylvester.

Les formules (11) et (12) devraient fournir une approximation assez fine de $\nu(n)$ pour ces valeurs de n sur lesquelles elles pourraient, en pratique, être testées. Ainsi, pour $n = 170\ 170$, on trouve que

$$\nu(n)/4e^{-2\gamma}\lambda(n) = .93....$$

[9] *Archiv for Mathematik* (Christiania), vol. 34, 1917, no. 8. Voir aussi le § 4 de la note de Hardy et Littlewood.

Mais l'incorrection finale de la formule peut être prouvée de la même manière qu'on le fait pour la formule de Sylvester, notamment en utilisant la formule asymptotique de Landau (10).

Brun connaissait les mémoires de Stäckel et Landau, mais semble avoir été ignorant du travail de Sylvester.

Note sur l'article de MM. Shah et Wilson intitulé : Sur une formule empirique reliée au théorème de Goldbach

G. H. Hardy, M.A., Trinity College,
J. E. Littlewood, M.A., Trinity College.

(Communiqué par G. H. Hardy.)

1. Les formules dont discutent MM. Shah et Wilson ont été obtenues au cours d'une série de recherches qui nous ont occupés à différents moments pendant les deux années qui viennent de s'écouler. Un compte-rendu complet de notre méthode apparaîtra en bonne et due forme ailleurs[10] ; mais il semble pertinent de donner ici quelque indication de la genèse de ces formules particulières, et d'autres du même genre. On a ajouté quelques mots à propos des différentes questions qui ont été suggérées par la discussion de Shah and Wilson.

Genèse des formules.

2. Soit

$$f(x) = \sum \Lambda(n)x^n = \sum \Lambda(n)e^{-ny} = F(y)$$

et
$$f_\kappa(x) = F_\kappa(y) = \sum \chi_\kappa(n)\Lambda(n)e^{-ny},$$
où $\Lambda(n)$ est égal à $\log p$ quand n est un nombre premier p, ou une puissance de p, et à zéro sinon, et $\chi_\kappa(n)$ est l'un des caractères de Dirichlet au module q'[11]. Soit aussi

$$x = \mathbf{x}e^{2p\pi i/q},$$

où p est positif, inférieur à q, et premier à q ; et supposons que $\mathbf{x}$ tend vers 1 par valeurs positives.

On sait que

$$\sum_1^n \chi_\kappa(\nu)\Lambda(\nu) = o(n),$$

à moins que χ_κ soit le caractère "principal" χ_1, auquel cas

$$\sum_1^n \chi_\kappa(\nu)\Lambda(\nu) \sim \sum_1^n \Lambda(\nu) \sim n.$$

Il s'ensuit que

(2.1) $$f_1(\mathbf{x}) \sim \frac{1}{1-\mathbf{x}}$$

et

(2.2) $$f_\kappa(\mathbf{x}) = o\left(\frac{1}{1-\mathbf{x}}\right) \quad (\kappa > 1).$$

[*Reçu le* 22 Janvier 1919 : *lu le* 3 Février 1919.]

Transcription en Latex et traduction, Denise Vella-Chemla, décembre 2022.

[10] Un survol d'une de ses plus importantes applications se trouve dans un article intitulé "Une nouvelle solution au problème de Waring", qui sera publié succinctement dans le *Quarterly Journal of Mathematics.*

[11] Voir Landau, *Handbuch*, pp. 391 *et seq.*

Maintenant

$$f(x) = \sum \Lambda(n)\mathbf{x}^n e^{2np\pi i/q} = \sum_{j=1}^{q} e^{2jp\pi i/q} \sum_{n\equiv j} \Lambda(n)\mathbf{x}^n. \tag{2.3}$$

Si j est premier à q, on a[12]

$$\sum_{n\equiv j} \Lambda(n)\mathbf{x}^n = \frac{1}{\phi(q)} \sum_{\kappa=1}^{\phi(q)} \overline{\chi}_\kappa(j) f_\kappa(\mathbf{x}), \tag{2.4}$$

où $\overline{\chi}_\kappa$ est le caractère conjugué à χ_κ, et $\phi(q)$ est le nombre de nombres inférieurs à q et qui sont premiers à q. Il découle de (2.1) et (2.2) que

$$\sum_{n\equiv j} \Lambda(n)\mathbf{x}^n \sim \frac{\overline{\chi}_1(j)}{\phi(q)} \frac{1}{1-\mathbf{x}} = \frac{1}{\phi(q)} \frac{1}{1-\mathbf{x}}. \tag{2.5}$$

Si d'un autre côté j n'est pas premier à q, la formule (2.4) n'est pas vraie, car son côté droit est nul. Mais dans ce cas $\Lambda(n) = 0$ à moins que n ne soit une puissance de q, de telle façon que

$$\sum_{n\equiv j} \Lambda(n)\mathbf{x}^n = o\left(\frac{1}{1-\mathbf{x}}\right). \tag{2.6}$$

De (2.3), (2.5), et (2.6) il découle que

$$f(x) \sim \frac{A_q}{1-\mathbf{x}}, \tag{2.7}$$

où

$$A_q = \frac{1}{\phi(q)} \sum_j e^{2jp\pi i/q} = \frac{1}{\phi(q)} \sum_j e^{2j\pi i/q}, \tag{2.71}$$

la somme s'étendant à toutes les valeurs de j inférieures à q et premières à q. La somme qui apparaît dans (2.71) a été évaluée par Jensen et Ramanujan[13], et sa valeur est $\mu(q)$, la fonction arithmétique bien connue de q qui est égale à 0 à moins que q ne soit un produit $p_1 p_2 ... p_\rho$, de différents nombres premiers, et alors égal à $(-1)^\rho$. Ainsi

$$f(x) \sim \frac{\mu(q)}{\phi(q)} \frac{1}{1-\mathbf{x}} \tag{2.8}$$ [14]

3. La somme

$$\omega(n) = \sum_{m+m'=n} \Lambda(m)\Lambda(m'), \tag{3.1}$$

qui apparaît du côté gauche de l'équation (2) de Shah et Wilson, est le coefficient de x^n dans l'expansion de $\{f(x)\}^2$. Et

$$\{f(x)\}^2 \sim \left\{\frac{\mu(q)}{\phi(q)}\right\}^2 \frac{1}{(1-\mathbf{x})^2} = \left\{\frac{\mu(q)}{\phi(q)}\right\}^2 \sum n x^n e^{-2np\pi i/q},$$

[12] Landau, *l.c.*, p. 421.

[13] J.L.W.V. Jensen, "Et nyt Udtryk for den talteoretiske Funktion $\sum_1^m \mu(n) = M(m)$", *Saertryk af Beretning om den 3 Skandinaviske Matematiker-Kongres*, Kristiania, 1915 ; S. Ramanujan, "On certain trigonometrical sums and their applications in the theory of numbers", *Trans. Camb. Phil. Soc.*, vol. 22, 1918, pp. 259-276.

[14] Si $\mu(q)$ est nul, cette formule doit être interprétée comme signifiant

$$f(x) = o\left(\frac{1}{1-x}\right)$$

quand $x \to e^{2p\pi i/q}$ le long d'un vecteur rayon. Notre méthode générale nous suggère par conséquent de prendre

$$\Omega(n) = n \sum \left\{ \frac{\mu(q)}{\phi(q)} \right\}^2 e^{-2np\pi i/q}$$

où la somme s'étend sur $q = 1, 2, 3, ...$ et toutes les valeurs de p inférieures à q et premières à q, comme une approximation de $\omega(n)$. En utilisant la notation de Ramanujan, cette somme peut s'écrire

$$\Omega(n) = n \sum \left\{ \frac{\mu(q)}{\phi(q)} \right\}^2 c_q(n). \tag{3.2}$$

La série (3.2) peut être sommée en nombre fini de termes. On a

$$c_q(n) = \sum \delta \mu \left(\frac{q}{\delta} \right), \tag{3.3}$$

la somme s'étendant à tous les diviseurs communs δ de q et n[15] ; et on vérifie facilement, soit au moyen de cette formule, soit au moyen de la définition de $c_q(n)$ en somme trigonométrique que

$$c_{qq'}(n) = c_q(n) c_{q'}(n)$$

à chaque fois que q et q' sont premiers entre eux. On peut alors écrire

$$\Omega(n) = n \sum A_q = n \prod \chi_\varpi,$$

où le produit s'étend à tous les nombres premiers ϖ, et

$$\chi_\varpi = 1 + A_\varpi + A_{\varpi^2} + A_{\varpi^3} + \ldots = 1 + A_\varpi,$$

puisque A_q contient le facteur $\mu(q)$ et $A_{\varpi^2}, A_{\varpi^3}, ...$ sont par conséquent nuls.

Si n n'est pas divisible par ϖ, on a $c_\varpi(n) = \mu(\varpi) = -1$ et

$$A_\varpi = -\frac{1}{\{\phi(\varpi)\}^2} = -\frac{1}{(\varpi - 1)^2} ;$$

alors que si n est divisible par ϖ on a

$$c_\varpi(n) = \mu(\varpi) + \varpi \mu(1) = \varpi - 1$$

$$A_\varpi = \frac{1}{\varpi - 1}.$$

Par conséquent

$$\Omega(n) = n \Pi' \left(1 + \frac{1}{\varpi - 1} \right) \Pi'' \left\{ 1 - \frac{1}{(\varpi - 1)^2} \right\},$$

où Π' s'applique aux nombres premiers qui divisent n et Π'' aux nombres premiers qui ne le divisent pas.

[15] Ramanujan, *l.c.*, p. 260.

Il est évident que $\Omega(n)$ est nul si n est impair. D'un autre côté, si n est pair, on a

$$\begin{aligned}\Omega(n) &= 2n\Pi\left\{1-\frac{1}{(\varpi-1)^2}\right\}\Pi\left[\left(1+\frac{1}{\mathbf{p}-1}\right)\Big/\left\{1-\frac{1}{(\mathbf{p}-1)^2}\right\}\right] \\ &= 2n\Pi\left\{1-\frac{1}{(\varpi-1)^2}\right\}\Pi\left(\frac{\mathbf{p}-1}{\mathbf{p}-2}\right),\end{aligned}$$

où ϖ couvre maintenant tous les nombres premiers impairs et $\mathbf{p}$ couvre tous les nombres premiers impairs diviseurs de n.

La formule $\omega(n) \sim \Omega(n)$
est la formule (2) de l'article de Shah et Wilson[16].

Incorrection de la formule de Sylvester.

4. Il est facile de prouver que *si n'importe quelle formule du type*

$$\omega(n) \sim C\Omega(n) \tag{4.1}$$

était vraie, alors C devrait valoir 1. En d'autres termes, notre formule est la seule formule de ce type qui peut être potentiellement correcte. Ceci peut être montré comme suit.

Soit

$$f(s) = \sum \frac{\Omega(n)}{n^s}, \tag{4.2}$$

où n couvre toutes les valeurs paires ; et soit $s-1=t$. La série est absolument convergente si $s>2, t>1$. En remplaçant $\Omega(n)$ par son expression en fonction des diviseurs premiers de n, et en séparant $f(s)$ en facteurs de la façon ordinaire, on obtient

$$f(s) = \frac{2^{1-t}A}{1-2^{-t}}\Pi\left(1+\frac{\varpi-1}{\varpi-2}\,\frac{\varpi^{-t}}{1-\varpi^{-t}}\right) = \frac{2^{1-t}A\chi(t)}{1-2^{-t}},$$

disons, où A est la même constante que dans l'article de Shah et Wilson, et ϖ parcourt tous les nombres premiers impairs.

Soit

$$\psi(t) = \Pi\left(1+\frac{\varpi^{-t}}{1-\varpi^{-t}}\right) = \Pi\left(\frac{1}{1-\varpi^{-t}}\right) = (1-2^{-t})\zeta(t),$$

et supposons que $t \to 1$. Alors

$$\begin{aligned}\frac{\chi(t)}{\psi(t)} &= \Pi\left\{\left(1+\frac{\varpi-1}{\varpi-2}\,\frac{\varpi^{-t}}{1-\varpi^{-t}}\right)\Big/\left(1+\frac{\varpi^{-t}}{1-\varpi^{-t}}\right)\right\} \\ &\to \Pi\left\{\left(1+\frac{1}{\varpi-2}\right)\Big/\left(1+\frac{1}{\varpi-1}\right)\right\} \\ &= \Pi\left\{\frac{(\varpi-1)^2}{\varpi(\varpi-2)}\right\} = \Pi\left\{\frac{(\varpi-1)^2}{(\varpi-1)^2-1}\right\} = \frac{1}{A}\ ;\end{aligned}$$

[16] Quand $\Omega(n)=0$, la formule doit être interprétée comme signifiant que $\omega(n)=o(n)$.

et ainsi

$$f(s) \sim 1A_\chi(t) \sim 2(1-2^{-t}\zeta(t) \sim \frac{1}{t-1} = \frac{1}{s-2}. \tag{4.3}$$

Ceci est une conséquence de notre hypothèse : la conséquence correspondante de l'hypothèse (4.1) serait

$$f(s) \sim \frac{C}{s-2}. \tag{4.31}$$

D'un autre côté, il est facile de prouver[17] que

$$\omega(1) + \omega(2) + \ldots + \omega(n) \sim \tfrac{1}{2}n^2 \; ; \tag{4.4}$$

et de ceci, de déduire que

$$\phi(s) = \sum \frac{\omega(n)}{n^s} \sim \frac{1}{s-2}$$

quand $s \to 2$. Cette équation est inconsistante avec (4.1) et (4.31), à moins que $C = 1$.

Il en découle que la formule suggérée par Sylvester est définitivement erronée.

Il est plus difficile de faire une déclaration à propos de la formule donnée par Brun. La formule à laquelle son argument amène naturellement est la formule (12) de Shah et Wilson ; et cette formule, comme celle de Sylvester, est erronée. Mais en fait, Brun n'énonce jamais cette formule explicitement. Ce qu'il fait consiste plutôt à avancer des raisons pour supposer qu'une *certaine* formule du type (4.1) est vraie, et de déterminer C sur la base d'une évidence empirique[18]. Le résultat auquel il est amené est équivalent à celui obtenu en prenant $C = 1.5985/1.3203 = 1.2107$[19]. La raison pour un tel écart est en effet celle qui est expliquée dans la dernière section de l'article de Shah et Wilson.

Résultats plus avancés.

5. La méthode du § 2 amène à une série complète de résultats concernant le nombre de décompositions de n en 3, 4, ou n'importe quel nombre de nombres premiers. Les résultats suggérés par cette méthode sont les suivants. Supposons que $\nu(n)$ est le nombre d'expressions de n comme somme de r nombres premiers. Alors si r est impair, on a

---

[17]Puisque

$$\sum \Lambda(n)x^n \sim \frac{1}{1-x}$$

lorsque $x \to 1$, on a

$$\sum \omega(n)x^n = \{\sum \Lambda(n)x^n\}^2 \sim \frac{1}{(1-x)^2} \; ;$$

et le résultat désiré découle du théorème 8 d'un article publié par nous en 1912 ("Tauberian theorems concerning power series and Dirichlet's series whose coefficients are positive", *Proc. London Math. Soc.*, ser. 2, vol. 13, pp. 174-192). Ceci, bien que court, n'est en aucun cas la preuve la plus simple.

La formule (4.4) est en substance équivalente à la formule (10) de Landau dans l'article de Shah et Wilson.

[18]L'évidence liée non pas au théorème de Goldbach lui-même mais à un problème qui en est proche concernant les paires de nombres premiers différant de 2. Voir § 7.

[19]1.5985 est la constante de Brun alors que 1.3203 est la valeur de $2A$.

$$(5.11) \qquad \nu_r(n) = o(n^{r-1})$$

si n est pair, et

$$(5.12) \qquad \nu_r(n) \sim \frac{2B}{(r-1)!} n^{r-1} \Pi \left\{ \frac{(\mathbf{p}-1)^r - (\mathbf{p}-1)}{(\mathbf{p}-1)^r + 1} \right\}$$

si n est impair, $\mathbf{p}$ étant un nombre premier impair divisant n, et

$$(5.13) \qquad B = \Pi \left\{ 1 + \frac{1}{(\varpi - 1)^r} \right\},$$

où ϖ couvre tous les nombres premiers impairs. D'un autre côté, si r est pair, on a

$$(5.21) \qquad \nu_r(n) = o(n^{r-1})$$

si n est impair, et

$$(5.22) \qquad \nu_r(n) \sim \frac{2C}{(r-1)!} n^{r-1} \Pi \left\{ \frac{(\mathbf{p}-1)^r + (\mathbf{p}-1)}{(\mathbf{p}-1)^r - 1} \right\},$$

où

$$(5.23) \qquad C = \Pi \left\{ 1 - \frac{1}{(\varpi - 1)^r} \right\},$$

si n est pair. La dernière formule se réduit à la formule (1) de l'article de Shah et Wilson quand $r = 2$.

Nous n'avons pas été capables de trouver une preuve rigoureuse, indépendante de toutes les hypothèses non démontrées, d'une seule de ces formules. Mais nous pouvons les relier d'une façon plus intéressante avec la célèbre "hypothèse de Riemann" concernant les zéros de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann. L'hypothèse de Riemann peut être énoncée comme suit : *$\zeta(s)$ n'a aucun zéro dont la partie réelle soit plus grande que $\frac{1}{2}$*. Si c'était le cas, il en découlerait facilement que tous les zéros de $\zeta(s)$, autres que les zéros triviaux $s = -2, s = -4, \ldots$, seraient sur la droite $\sigma = \mathbf{R}(s) = \frac{1}{2}$. Il est naturel d'étendre cette hypothèse comme suit : *aucune des fonctions définies, quand $\sigma > 1$, par la série*

$$L(s) = \sum \frac{\chi_\kappa(n)}{n^s},$$

ne possède de zéro dont la partie réelle est plus grande que $\frac{1}{2}$. On peut appeler cela l'*hypothèse de Riemann étendue*. Ceci étant, ce que l'on peut prouver, c'est que *si l'hypothèse de Riemann étendue est vraie, alors les formules (5.11)–(5.23) sont vraies pour toutes les valeurs de r plus grandes que 4.*

Les raisons pour supposer que l'hypothèse étendue est vraie sont de la même nature que celles pour supposer que l'hypothèse elle-même est vraie. On devrait observer, pourtant, qu'il est nécessaire, avant de généraliser l'hypothèse, de modifier la forme selon laquelle elle est habituellement énoncée ; car il n'est pas prouvé (comme cela l'est pour $\zeta(s)$ elle-même) que $L(s)$ ne peut avoir aucun zéro entre $\frac{1}{2}$ et 1.

6. Une modification de notre méthode nous permet d'attaquer un problème prochement relié, celui de l'existence de paires de nombres premiers dont la différence est un nombre pair constant k.

On a

$$\sum \Lambda(n)\Lambda(n+k)r^{2n+k} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 e^{-ki\theta}d\theta,$$

où $f(x)$ est la même fonction que dans le § 1, et r est positif et inférieur à 1. On divise le domaine d'intégration en un certain nombre de petits arcs, corrélés d'une manière appropriée avec un certain nombre de points $e^{2p\pi i/q}$, et on approxime $|f(re^{i\theta})|^2$ sur chaque arc au moyen de la formule (2.8). Le résultat ainsi suggéré est que

$$\sum \Lambda(n)\Lambda(n+k)r^{2n} \sim \frac{2A}{1-r^2}\Pi\left(\frac{\mathbf{p}-1}{\mathbf{p}-2}\right),$$

où A a le même sens que dans le § 2 et $\mathbf{p}$ est un nombre premier impair diviseur de k. De cela, il découle que

(6.1) $$\sum_{\nu<n} \Lambda(\nu)\Lambda(\nu+k) \sim 2A_n\Pi\left(\frac{\mathbf{p}-1}{\mathbf{p}-2}\right) \;;$$

et que, si $N_k(n)$ est le nombre de paires de nombres premiers inférieurs à n, dont la différence est k, alors

(6.2) $$N_k(n) \sim \frac{2An}{(\log\, n)^2}\Pi\left(\frac{\mathbf{p}-1}{\mathbf{p}-2}\right).$$

Cette formule est exactement de la même forme que (1), excepté que $\mathbf{p}$ est maintenant un facteur de k et non de n. En particulier, nous devrions avoir

(6.3) $$N_2(n) \sim \frac{2An}{(\log\, n)^2},$$

et

(6.4) $$N_6(n) \sim \frac{4An}{(\log\, n)^2}.$$

Nous devrions par conséquent conclure qu'il y a environ deux paires de nombres premiers différant de 6 pour chaque paire de premier différant de 2. Cette conclusion est aisément vérifiée. En fait, les nombres de paires différant de 2, sous les limites[20]

$$100, 500, 1000, 2000, 3000, 4000, 5000,$$

sont

$$9, 24, 35, 61, 81, 103, 125\;;$$

alors que les nombres de paires différant de 6 sont

$$16, 47, 73, 125, 168, 201, 241.$$

Les nombres de paires différant par 4, qui devraient être grossièrement les mêmes que ceux des paires différant par 2 sont

$$9, 26, 41, 63, 86, 107, 121.$$

7. Brun, dans sa note à laquelle il a déjà été fait référence, reconnaît la correspondance entre le problème des §§ 2-4 et celui des paires de nombres premiers différant de 2, et réalise l'identité des

[20]Pour être précis, le nombre de paires (p, p') telles que $p' = p + 2$ et p' n'excède pas la limite en question.

constantes impliquées dans les formules ; mais il ne fait pas allusion au problème plus général des paires de nombres premiers différant de k. Il ne détermine pas la constante fondamentale A, tentant seulement de l'approximer empiriquement au moyen d'un comptage des paires de nombres premiers différant de 2 et inférieurs à 100000, effectué par Glaisher en 1878[21]. La valeur de la constante ainsi obtenue est, comme remarqué dans le § 4, sérieusement erronée. La vérité est que lorsqu'on passe de (6.1), qui, quand $k = 2$, prend la forme

$$\sum_{\nu<n} \Lambda(\nu)\Lambda(\nu+2) \sim 2An,$$

à (6.3), la formule qui se présente le plus naturellement n'est pas (6.3) mais

$$N_2(n) \sim 2A \int^n \frac{dx}{(\log\, x)^2}. \tag{7.1}$$

Cette formule est, bien sûr, au long cours, équivalente à (6.3). Mais

$$\int^n \frac{dx}{(\log\, x)^2} = \frac{n}{(\log\, n)^2}\left(1 + \frac{2!}{\log\, n} + \frac{3!}{(\log\, n)^2} + \dots\right) ;^{22}$$

et le second facteur du côté droit est, pour $n = 100000$, loin d'être négligeable. Par conséquent, on peut s'attendre à ce que (6.3), pour de telles valeurs de n, donne des résultats considérablement plus petits.

Si on prend la borne inférieure de l'intégration dans (7.1) égale à 2, on trouve que la valeur du côté droit pour $n = 100000$ est, arrondie à l'entier le plus proche, 1249, alors que la valeur effective de $N_2(n)$ est, selon Glaisher, 1224[23]. Le ratio est 1.02, et l'accord semble être aussi bon que ce que l'on peut raisonnablement en attendre.

Le calcul des paires de nombres premiers a été amené plus loin par Mme Streatfeild, dont les résultats apparaissent dans la table suivante :

n	$N_2(n)$	$2A\int_2^n \frac{dx}{(\log\, x)^2}$	Ratio
100000	1224	1249	1.020
200000	2159	2180	1.010
300000	2992	3035	1.014
400000	3801	3846	1.012
500000	4562	4625	1.014
600000	5328	5381	1.010

8. Dans un article ultérieur[24] Brun donne une formule plus générale reliée aux paires de nombres premiers (p, p') telles que $p = ap' + 2$. Cette formule fait intervenir également une constante indéterminée k. Il est bon de remarquer que notre méthode est également applicable à cela et à des

[21] J. W. L. Glaisher, "An enumeration of prime-pairs", *Messenger of Mathematics*, vol. 8, 1878, pp. 28-33. Le nombre de paires inférieures à 100000 est 1225.

[22] La série est naturellement divergente, et doit être fermée, après un nombre fini de termes, avec un terme d'erreur d'un ordre inférieur au dernier terme retenu.

[23] Glaisher considère 1 comme un nombre premier et $(1, 3)$ comme une paire de nombres premiers, ce qui donne 1225 en tout.

[24] "Sur les nombres premiers de la forme $ap + b''$, *Archiv for Mathematik*, $vol.24, 1917, no.14$.

problèmes plus généraux encore. Supposons, en premier lieu, que $\nu(n)$ est le nombre d'expressions de n sous la forme

$$n = ap + bp',$$

où p et p' sont des nombres premiers[25]. On peut supposer sans perte de généralité que a et b n'ont pas de facteur commun.

Les résultats suggérés par notre méthode sont les suivants. Si n a un facteur en commun avec a et b, alors

$$\nu(n) = o\left\{\frac{n}{(\log n)^2}\right\} \ ;$$

et cela est vrai même quand n est à la fois premier à a et à b, à moins que *l'un* de n, a, b ne soit pair[26]. Mais si n, a et b sont premiers entre eux, et si l'un d'entre eux est pair, alors

$$\nu(n) \sim \frac{2A}{ab}\ \frac{n}{(\log n)^2}\Pi\left(\frac{\mathbf{p}-1}{\mathbf{p}-2}\right),$$

où A est la constante du § 2, et le produit est maintenant étendu à tous les nombres premiers impairs qui divisent n ou a ou b.

Similairement, supposons que $N(n)$ soit le nombre de paires de solutions de l'équation

$$ap' - bp = k$$

de telle façon que $p' < n$. On suppose que a et b n'ont pas de facteur commun. Alors

$$N(n) = o\left\{\frac{n}{(\log n)^2}\right\}$$

à moins que k ne soit à la fois premier à a et à b, et que l'un des trois ne soit pair.

Si ces conditions sont satisfaites

$$N(n) \sim \frac{2A}{a}\ \frac{n}{(\log n)^2}\Pi\left(\frac{\mathbf{p}-1}{\mathbf{p}-2}\right),$$

où $\mathbf{p}$ est maintenant un facteur premier impair de k, a, ou b.

---

[25] On peut naturellement inclure les puissances de nombres premiers.

[26] Ces résultats sont triviaux. Si n et a ont un facteur commun, il divise bp', et c'est par conséquent nécessairement p', qui peut ainsi prendre un nombre fini de valeurs. Si n, a, b sont tous impairs, soit p soit p' doit nécessairement être égal à 2.