

# PROBLÈMES DE RECHERCHE UNIVERSAUX

BORIS A. LEVIN

Plusieurs problèmes bien connus de type “recherche universelle” sont étudiés, et on prouve que ces problèmes peuvent être résolus seulement dans le temps nécessaire pour résoudre n’importe quel problème du type indiqué, en général.

Après que le concept d’algorithme ait été complètement explicité, l’insolubilité algorithmique d’un certain nombre de problèmes classiques a été démontrée (incluant les problèmes d’identité d’éléments de groupes, d’homéomorphisme entre variétés, de solubilité d’équations diophantiennes, etc.). Ces découvertes ont été obtenues car on se posait la question de trouver une technique pratique pour résoudre les problèmes en question. Pourtant, l’existence d’algorithmes pour résoudre d’autres problèmes n’élimine pas la question analogue, parce que le volume de travail nécessité par l’écriture de ces algorithmes est fantastiquement grand. C’est la situation avec ce qu’on appelle les problèmes de recherche exhaustive qui incluent : la minimisation de fonctions booléennes, la recherche de preuves de longueur finie, la détermination d’isomorphisme entre graphes, etc. Tous ces problèmes sont tous résolus par des algorithmes évidents entraînant la vérification séquentielle de toutes les possibilités. La durée d’exécution des algorithmes est exponentielle, et les mathématiciens nourrissent la conviction qu’il est impossible de trouver des algorithmes plus simples. Cette conviction a été renforcée par un certain nombre d’arguments profonds (voir [1, 2]), mais personne n’a encore réussi à le prouver (par exemple, il reste à prouver qu’il faut plus de temps pour trouver des preuves mathématiques qu’il n’en faut pour les vérifier).

Si l’on suppose, pourtant, qu’il n’existe aucun (même artificiellement formulé) problème de type universel qui soit insoluble par des algorithmes simples (en terme de volume des calculs), alors on peut montrer que de nombreux problèmes de recherche universels “classiques” ont la même propriété (incluant le problème de minimisation, le problème de recherche de preuve, etc.). Cet objectif est atteint par les résultats principaux de la présente note.

Nous disons que les fonctions  $f(n)$  et  $g(n)$  sont comparables si pour un certain  $k$

$$f(n) \leq (g(n) + 2)^k \quad \text{et} \quad g(n) \leq (f(n) + 2)^k$$

Nous donnons une interprétation analogue aux termes “inférieur à” et “comparable à.”

*Définition.* Un problème de recherche universel est un problème du type suivant : “Pour un  $x$  donné, trouver un certain  $y$  de longueur comparable à la longueur de  $x$  tel que  $A(x, y)$  est vérifié,” où  $A(x, y)$  est une certaine propriété à faire tester par un algorithme dont le temps d’exécution est comparable avec la longueur de  $x$ . (Ici nous entendons par algorithme un algorithme de Kolmogorov-Uspenskii, un algorithme de machine de Turing, ou un algorithme normal ;  $x$  et  $y$  sont des mots binaires.) Le problème de recherche correspondant universel est le problème de déterminer si un tel  $y$  existe.

Nous considérons six problèmes de ces types. Les entités qui interviennent sont codées de façon naturelle par des mots binaires. Le choix particulier d’un codage naturel n’est pas significatif ici,

---

La traduction suivante Plenum Publishing Corporation, est une réimpression de “Problemy Peredachi Informat-sii,” Vol. 9, No. 3, Juillet-Septembre 1973, pp. 115-116 (article original soumis le 7 juin 1972).

Traduction d’une traduction anglaise trouvée sur la toile, Denise Vella-Chemla, novembre 2021.

puisqu'ils produisent tous des longueurs de code comparables.

*Problème 1.* Une liste détermine un ensemble fini et un recouvrement de cet ensemble par des sous-ensembles à 500 éléments. Trouver un recouvrement ayant une cardinalité imposée (déterminer si un tel recouvrement existe).

*Problème 2.* Une table définit une fonction booléenne partielle. Trouver une forme normale disjunctive de dimensions spécifiques réalisant cette fonction dans son domaine (déterminer si une telle FND existe).

*Problème 3.* Déterminer si une formule donnée du **calcul propositionnel** est démontrable ou réfutable (ou, de façon équivalente, si une formule booléenne donnée est égale à une constante).

*Problème 4.* Deux graphes sont donnés. Trouver un homomorphisme de l'un dans l'autre (déterminer si un tel homomorphisme existe).

*Problème 5.* Deux graphes sont donnés. Trouver un isomorphisme de l'un dans l'autre (sur une partie de celui-ci).

*Problème 6.* Considérons des matrices contenant des entiers de 1 à 100 et une certaine condition selon laquelle les entiers peuvent être verticalement adjacents, et peuvent être horizontalement adjacents. Quand les entiers les plus à l'extérieur sont donnés, les prolonger sur la matrice complète, en observant la précédente stipulation.

Soit  $f(n)$  une fonction monotone.

**THÉORÈME 1.** S'il existe un problème quasi-universel de recherche en tout, insoluble en un certain temps moindre que  $f(n)$  pour un argument de longueur comparable à  $n$ , alors les problèmes 1-6 ont également cette propriété.

L'idée de la preuve est que les problèmes 1-6 sont ainsi appelés "problèmes de recherche universels."

*Définition.* Soient  $A(x, y)$  et  $B(x, y)$  les fonctions déterminant, respectivement les problèmes de recherche universels A et B. Nous disons que le problème A se réduit à B si trois algorithmes  $r(x)$ ,  $p(y)$ , et  $s(y)$  s'exécutant en un temps comparable à la longueur de l'argument existent tels que  $A(x, p(y)) \equiv B(r(x), y)$  et  $A(x, y) = B(r(x), s(y))$  (i.e., étant donné le problème A dans  $x$ , un problème équivalent B dans  $r(x)$  est facilement construit à partir de lui). Un problème auquel tout problème de recherche se réduit est dit "universel."

Donc, la substance de la preuve du Théorème 1 s'incarne dans le lemme suivant.

**LEMMA 1.** Les problèmes 1-6 sont des problèmes de recherche universels.

La méthode décrite ici fournit un moyen pour obtenir simplement des résultats du type du théorème 1 et du lemme 1 pour de nombreux problèmes de recherche universels importants. Il reste

cependant, pourtant, à prouver la condition stipulée dans le théorème 1. Un grand nombre de tentatives ont été faites dans cette direction depuis un certain temps maintenant, et un certain nombre de résultats intéressants ont été obtenus (voir, e.g., [3, 4]). Bien sûr, l'universalité de problèmes de recherche variés peut être établie sans résoudre le problème indiqué. Le théorème suivant est démontrable dans le système des algorithmes de Kolmogorov-Uspenskii.

THÉORÈME 2. Pour tout problème de recherche universels  $A(x, y)$  il existe un algorithme qui le résoud en un temps qui est optimal selon la multiplication par une constante et l'addition d'un nombre comparable à la longueur de  $x$ .

L'auteur éprouve une profonde reconnaissance pour A. N. Kolmogorov, B. A. Trakhtenbrot, Ya. M. Barzdin Alberton, and M. I. Degtyar' pour les fructueuses discussions.

## Références

1. S. V. Yablonskii, "Algorithmic difficulties in the synthesis of minimal contact networks," in : Problems of Cybernetics [in Russian], Vol. 2, Fizmatgiz, Moscow (1959), pp. 75-121.
2. Y. I. Zhuravlev, "Set-theoretic methods in logic algebra," in : Problems of Cybernetics [in Russian], Vol. 8, Fizmatgiz, Moscow (1962), pp. 5-44.
3. B. A. Trakhtenbrot, "Optimal computations and the partial Yablonskii effect," Seminar [in Russian], Vol. 4, No. 5, Nauka, SO, Novosibirsk (1965), pp. 79-93.
4. M. L. Degtyar', "On the impossibility of eliminating exhaustive search in the computation of functions with respect to their graphs," Dokl. Akad. Nauk SSSR, 189, No. 4, 748-751 (1969).