

Quantificateurs et faisceaux

F. W. Lawvere

L'unité des contraires dans le titre est essentiellement celle entre la logique et la géométrie, et il existe des raisons convaincantes de soutenir que la géométrie est l'aspect prédominant. Dans le même temps, dans le présent travail commun avec Myles Tierney, on observe d'importantes influences dans l'autre sens : une "topologie" de Grothendieck apparaît le plus naturellement comme un opérateur modal, de la nature "il est localement vrai que", les opérateurs logiques usuels tels que $\forall, \exists, \implies$, ont des analogues naturels qui s'appliquent aux familles d'objets géométriques plutôt qu'aux fonctions propositionnelles, et une technique importante consiste à étendre des constructions initialement comprises pour "la" catégorie $\underline{S}$ des ensembles abstraits à un topos arbitraire. Nous résumons d'abord les principales contradictions de la théorie du topos de Grothendieck-Giraud-Verdier en termes de quatre ou cinq foncteurs adjoints, généralisant significativement la théorie pour la libérer de toute dépendance à une notion externe de limite infinie (en particulier permettant d'affirmer que, dans un sens, la logique est un cas particulier de la géométrie). La méthode ainsi développée est ensuite appliquée pour définir intrinsèquement le concept de modèle à valeurs booléennes pour $S(\underline{BVM}/\underline{S})$ et pour prouver l'indépendance de l'hypothèse du continu. de toute utilisation de l'induction transfinie. La seconde application de la méthode décrite ici est une construction géométrique intrinsèque du spectre global de Chevalley-Hakim d'un topos annelé, libre de tout choix de "site de définition".

Lorsque les principales contradictions d'une chose ont été découvertes, la procédure scientifique consiste à les résumer en slogans que l'on utilise ensuite constamment comme une arme idéologique pour le développement et la transformation ultérieurs de la chose. Faire cela pour la "théorie des ensembles" exige de tenir compte de l'expérience selon laquelle les principales paires de tendances opposées en mathématiques prennent la forme de foncteurs adjoints, et nous libère des traces mathématiquement non pertinentes ($\in$) laissées par le processus d'accumulation ($\cup$) de l'ensemble des parties (P) à chaque étape d'une "construction" métaphysique. De plus, l'expérience avec les faisceaux, les représentations par permutation, les espaces algébriques, etc., montre qu'une "théorie des ensembles" pour la géométrie devrait s'appliquer non seulement aux ensembles abstraits détachés du temps, de l'espace, de l'anneau de définition, etc., mais aussi à des ensembles plus généraux qui se développent effectivement selon de tels paramètres. Pour de tels ensembles, la logique est généralement "intuitionniste" (dans ses propriétés formelles), l'axiome du choix est généralement faux, et un ensemble n'est généralement pas déterminé par ses points définis uniquement sur 1.

1. Par *topos*, nous entendons une catégorie $\underline{E}$ qui possède des limites finies et des colimites finies, qui est (a) cartésienne fermée et (b) possède un classificateur de sous-objets T . C'est-à-dire (a) d'une part, il existe pour chaque objet A un foncteur hom interne (f^A adjoint à droite du produit cartésien $(\) \times A$, et (b) d'autre part, il existe une unique flèche true : $1 \rightarrow T$ telle que tout monomorphisme $X' \rightarrow X$ dans $\underline{E}$ soit le pullback de true le long d'une unique flèche caractéristique $X \rightarrow T$. C'est la principale difficulté dans la théorie interne d'un topos arbitraire, et elle conduit à un développement très rapide. L'"ensemble" T des valeurs de vérité pour $\underline{E}$ se révèle être un objet algèbre de Heyting

Département de Mathématiques,
Université de Dalhousie,
Halifax, Nova Scotia, Canada

qui est complet en ce sens que pour toute flèche $f : X \rightarrow Y$ dans $\underline{E}$, il existe un adjoint à gauche $\exists$ de la flèche induite T^f et aussi un adjoint à droite

$$\forall : T^X \rightarrow T^Y$$

de T^f . Habituellement, T n'est pas une algèbre de Boole ; par exemple si $\underline{E}$ = tous les faisceaux à valeurs dans $\underline{S}$ sur un espace topologique, T est ce faisceau dont les sections au-dessus de tout U sont l'ensemble des ouverts de U , tandis que si $\underline{E} = \underline{C} = \underline{C}^{\text{op}}\underline{S}$ est la catégorie des foncteurs à valeurs ensemblistes sur une petite catégorie $\underline{C}$, alors $T(\underline{C}) =$ tous les cribles de $\underline{C}$. Pour tout $\phi : X \rightarrow T$, nous notons $\{X/\phi\}$ le sous-objet correspondant, suggérant correctement qu'à des formules appropriées de la logique d'ordre supérieur correspond un sous-objet effectif.

Toutes les propriétés d'exactitude usuelles d'un topos s'ensuivent rapidement, la plupart du fait qu'il existe pour tout $f : X \rightarrow Y$ un foncteur

$$\prod_f : E/X \rightarrow E/Y$$

adjoint à droite au tiré en arrière des familles $E \rightarrow Y$ au-dessus de Y le long de f vers les familles $E \times X$ indexées par X . Ceci s'étend au cas où les fibres sont soumises à une action comme suit : si $\underline{C}$ dans $\text{Cat}(\underline{E})$ est un objet catégorie interne dans $\underline{E}$ d'objet des objets X , on peut considérer toutes les actions de $\underline{C}$ sur des familles arbitraires $E \rightarrow X$ d'objets paramétrés interne par X , obtenant un nouveau topos $\underline{C} = \underline{C}^{\text{op}}\underline{E}$ de préfaisceaux internes à valeurs dans $\underline{E}$ sur $\underline{C}$. Si $f : \underline{C} \rightarrow \underline{C}'$ est un foncteur interne quelconque, il existe un adjoint à droite $f_* : \underline{C} \rightarrow \underline{C}'$ au foncteur induit (ainsi qu'un adjoint à gauche f_0), ce qui signifie qu'en un sens très utile, tout topos (même dénombrable) est interne complet.

Notons σ_X le foncteur “support” qui à toute famille $E \rightarrow X$ assigne la flèche caractéristique de l'image de la flèche de structure. Ceci permet alors de considérer des contradictions directes particulières entre logique et géométrie d'un type surgissant en théorie de la démonstration et rappelant les fibrés vectoriels virtuels :

$$\begin{array}{ccc} & \underline{E}/X & \\ \sigma_X \swarrow & & \searrow \exists_X \\ \underline{E} & \xrightarrow{\sigma_1} & \underline{E} \end{array}$$

Le diagramme ci-dessus commute pour les représentations par permutations d'un groupe, mais pas pour la catégorie $\underline{2S}$ des applications dans les ensembles. D'autre part, tant en logique intuitionniste qu'en géométrie algébrique, nous devons considérer la mesure dans laquelle l'opérateur interne algébriquement défini $\exists$ signifie réellement l'existence, ce qui signifie essentiellement si pour tout objet E , la partie épimorphique se scinde dans le diagramme suivant

$$\underline{E} \rightarrow \{1 \mid \sigma_1(E)\} \rightarrow 1$$

Or cette dernière condition échoue pour $\underline{G}, \underline{S}, \underline{G}$ un groupe non trivial, mais tient pour $\underline{PS}$ où $\underline{P}$ est un ensemble bien ordonné quelconque (tel que $\underline{2}$). En fait, la conjonction des deux conditions (II) et (3) est équivalente à la condition que tout épimorphisme se scinde, ce que géométriquement

nous appellerions la 0-dimensionalité et logiquement nous appellerions l'axiome du choix. Si $\underline{E}$ est la catégorie des classes d'équivalence de formules dans une théorie d'ordre supérieur, la condition (3) est la condition de Skolem, mais le problème se pose aussi lorsqu'il est de nature géométrique, puisque $\exists\phi = \text{true}$ signifie usuellement que l'existence actuelle n'est que locale.

Souvent, dans un topos, nous devons faire usage d'un adjoint supplémentaire reflétant la contradiction entre la récursion primitive des données et la famille des suites qui la définit (T -valuées, séquences connues comme induction mathématique), par exemple pour analyser un coégaliseur ou former le groupe libre ou l'objet libre engendré par un objet donné :

$$(\omega) \quad E^2 \rightarrow E \text{ n'est pas un égaliseur et possède un adjoint à gauche } () \times \omega.$$

Ici E^2 est l'objet usuel des catégories-objets-avec-un-endomorphisme. Cependant, nous n'avons pas inclus cet axiome dans la définition des topos, partiellement à cause de son utilité générale et partiellement parce qu'il est automatiquement relevé vers tout topos $\underline{E}$ "défini sur" un autre $\underline{E}_0$ en lequel il est vrai.

"Défini sur" renvoie à un *morphisme géométrique* de topos, par quoi nous entendons un foncteur ayant un adjoint à gauche exact. Il y a aussi les *morphismes logiques* de topos, ce qui signifie un foncteur préservant à isomorphisme près toute la structure impliquée dans le concept de topos. Les deux s'unissent en *homéomorphisme local*, qui est un morphisme géométrique u dont l'adjoint à gauche u^* est actuellement un morphisme logique.

Théorème 1. *Tout morphisme géométrique $u : E' \rightarrow E''$ de topos peut être factorisé en*

$$\begin{array}{ccc} E' & \xrightarrow{u} & E'' \\ & \searrow u_* & \nearrow u''_* \\ & E & \end{array}$$

où $\underline{E}$ est aussi un topos, où u', u'' sont des morphismes géométriques de topos avec les propriétés additionnelles que $(u'')^*$ est pleinement fidèle et $E' \rightarrow \underline{E}$ tandis que l'adjoint à gauche $(u')^* : E \rightarrow E'$ reflète les isomorphismes. De plus, u'' (donc à la fois pleinement fidèle et géométrique) est entièrement déterminé par une simple application $j : T'' \rightarrow T''$ dans E'' de la sorte que l'on appellerait une "topologie" de Grothendieck, en tant que j -faisceaux.

Passer à un topos défini par E (plutôt que E'') les conditions qu'un opérateur modal $j : T \rightarrow T$ doit satisfaire sont qu'il est (a) idempotent et que (b) il commute avec la conjonction $\wedge : T \times T \rightarrow T$. Un tel j induit fonctoriellement un opérateur de clôture sur l'ensemble des sous-objets d'un objet quelconque (non pas un Kuratowski clos ; par exemple dans un espace topologique, la j appropriée assigne à tout ordre idéal d'ouverts l'idéal principal déterminé par son union). Afin de montrer qu'un tel j donne un faisceau pleinement fidèle et géométrique maximal $E_j \rightarrow E$ de topos, nous montrons que la condition usuelle d'être un j -faisceau est équivalente à avoir un diagramme j -clos dans le carré ("séparé") et être j -clos dans un objet séparé dans lequel il est plongé. Alors le foncteur faisceau associé est construit sans aucun appel à des limites directes infinies, selon les quatre observations suivantes à propos d'un Grothendieck "topologie" (= opérateur modal j satisfaisant (a) et (b)) :

1. L'image T_j de j est un j -faisceau.
2. Y est un j -faisceau si Y est j -séparé et X est j -clos dans $X \times X$ si la diagonale est un égaliseur.
3. Pour tout X , le j -clos dans $X \times X$ de la diagonale est un égaliseur.
4. Si $X \rightarrow Y$ est un mono de X dans un séparé Y , alors le j -clos dans Y de X est le faisceau associé de X . (La première étape (préalable) pour appliquer les quatre observations est de considérer le singleton $\{\} : X \rightarrow T^X$.) On prouve alors que le foncteur faisceau associé est en fait étudié par les morphismes qu'il inverse.

Un exemple important dans lequel nous utilisons le théorème de factorisation ci-dessus est (soulevé à un topos de base arbitraire $\underline{E}$ au lieu de $\underline{S}$, la construction de Godement des faisceaux sur une base de topologie par la méthode de résolution de la contradiction entre préfaisceaux et espace étalé (“discret”). Par base de topologie, on entend un triplet constitué d’un objet X (des “points”), d’un objet A (des “indices pour les éléments de la base”), et d’un appariement $X \times A \rightarrow T$ qui satisfait une condition de directité telle que la paire induite d’adjoints

$$\underline{E}/X \xrightarrow{\lim} \underline{A}^{\text{op}} \underline{E}$$

soit un morphisme géométrique de topos (ici par $\underline{A}$ nous entendons le poset dont la relation d’ordre “hom” $F \Rightarrow A$ sur les “objets” de A est simplement le tiré en arrière le long de $A \rightarrow T^X$ de la relation d’ordre standard sur les sous-objets de X). Alors le topos “image” est la catégorie usuelle des faisceaux, descriptible soit à l’aide d’une “topologie” de Grothendieck dans $\underline{A}^{\text{op}} \underline{E}$, soit d’une cotriple exacte à gauche (construction standard) dans $\underline{E}/X$.

Il existe une topologie de Grothendieck standard dans tout topos, à savoir la double négation, qui s’exprime plus adéquatement par les mots “il est cofinalement le cas que”. La catégorie $\underline{E}_{-1}$ des faisceaux de double négation satisfait toujours la condition supplémentaire que la logique est classique :

$$(\neg) \quad 1 + 1 \Rightarrow T$$

ce qui est équivalent à la condition que T (par ex. T_{-1} dans $\underline{E}_{-1}$) est un objet algèbre de Boole, ce qui géométriquement est encore équivalent à la condition que tout mono $X' \mapsto X$ fait partie d’un diagramme de somme directe (unique) $X' + (\neg X') \Rightarrow X$.

Pour construire des morphismes logiques de topos, nous devons utiliser des morphismes géométriques, mais aussi une autre construction, un ultraproduit généralisé, qui ne donne pas en général un morphisme géométrique et nous fait donc sortir du domaine des topos externe complet (c.-à-d. définis sur un $\underline{E}_0$ donné) considérés jusqu’ici en géométrie. Les données nécessaires pour l’ultraproduit généralisé sont une paire constituée d’un foncteur $u_* : \underline{E} \rightarrow \underline{E}_0$ entre deux topos, qui peut être un morphisme géométrique mais qui en général est seulement requis de préserver les limites inverses finies, et d’un homomorphisme $h : u_*(T) \rightarrow T_0$ d’objets algèbres de Heyting de $\underline{E}_0$. Une nouvelle catégorie $\underline{E}_h$ est alors obtenue à partir de $\underline{E}$ en inversant formellement tous les monomorphismes $X' \mapsto X$ dans $\underline{E}$ dont la “quantification universelle appartient à l’ultrafiltre” en ce sens que

$$h(u_*(\sigma_1(\prod_{X'} X'))) = \text{true}_0$$

Théorème 2. $\underline{E}_h$ est un topos et $\underline{E} \rightarrow \underline{E}_h$ un morphisme logique. $\underline{E}_h$ est défini sur $\underline{E}_0$ au sens des catégories fermées mais généralement pas au sens géométrique des topos.

Ce qui précède est nécessaire, par exemple, pour montrer qu'un BVM/S peut toujours être effondré en un modèle à deux valeurs, permettant à la plupart du travail sur les résultats d'indépendance d'avoir lieu dans un topos supérieur sans réellement choisir h et effectuer l'effondrement.

2. Nous pouvons maintenant préciser ce qu'il est habituellement nécessaire de supposer sur "la" catégorie $\underline{S}$ des ensembles abstraits : elle peut être n'importe quel topos satisfaisant les conditions (II), (3), (ω) , $(\neg)$ ci-dessus ainsi que la condition suivante d'"irréductibilité de 1" : $(\forall)$ Si $\phi_i : 1 \rightarrow T$ et $\phi_1 \vee \phi_2 = \text{true}$, alors

$$\phi_1 = \text{true} \text{ ou } \phi_2 = \text{true}.$$

Les conditions $(\neg)$ et (V) impliquent ensemble qu'il n'y a que deux sous-objets de 1, mais pas réciproquement comme le montre $\mathcal{M}^{\text{op}}\mathcal{S}$ pour $\mathcal{M}$ un monoïde mais pas un groupe. D'autre part (3) et $(\neg)$ impliquent ensemble que les sous-objets de 1 (qui forment alors une algèbre de Boole "complète") forment aussi une famille génératrice pour la catégorie; un topos satisfaisant (3) et $(\neg)$ est appelé "booléen", et dans un tel topos on écrit habituellement $2 = T$. Par modèle à valeurs booléennes $\underline{E}$ de $\underline{S}$ (en symboles $E \in BVM/S$), nous entendons alors simplement que $\underline{E}$ est un topos booléen défini sur $\underline{S}$. Nous pouvons alors montrer que tout BVM sur $\underline{S}$ satisfait en fait aussi (II), c'est-à-dire l'axiome du choix, et même que la bicatégorie BVM/S est équivalente à la catégorie $CBA(S)$ des objets algèbres de Boole $\underline{S}$ -complètes dans $\underline{S}$.

En fait, les BVM peuvent être construits d'une autre manière, à savoir comme faisceaux de double négation $\underline{P} = (P\underline{S})_{\neg\neg}$ dans la catégorie des foncteurs à valeurs dans $\underline{S}$ sur un poset $\underline{P}$ dans $\underline{S}$. Dans ce cas (comme dans d'autres), la terminologie de Cohen est suggestive : si $X \in \underline{P}$, $q \geq p$ dans $\underline{P}$, $\phi : X \rightarrow 2$ et x est un élément de X défini en p , disons que " q force $\phi(x)$ " ssi $\phi(x/q) = \text{true}$. Alors dans $\underline{P}$, q force $\phi(x)$ ssi r force $\phi(x)$ pour un ensemble de r cofinaux au-delà de q .

Pour réfuter l'hypothèse du continu dans un certain $BVM\underline{P}$, nous suivons aussi Cohen en choisissant un ensemble I dans $\underline{S}$ avec $2^m < I$ au sens qu'il existe un mono mais pas d'épi. Alors $\underline{P}$ est le poset (ordonné par extension) de toutes les applications partielles $\omega \times I \rightarrow 2$ à domaine fini (définissable comme objet dans tout topos). Alors dans $\underline{P}$

$$\omega < u^*(2^m) < 2^m$$

où u^* est le foncteur "faisceau constant" adjoint à gauche du foncteur "sections globales" $u_* : \underline{P} \rightarrow \underline{S}$. Pour la preuve, on note que $\underline{P}$ lui-même est essentiellement la définition d'une application $u^*(I) \rightarrow 2^m$ sur un recouvrement, donc pour les faisceaux il existe une telle application. Le point principal est alors le

Théorème 3 (Lemme). *Si $\underline{P}$ est un poset quelconque dans $\underline{S}$ satisfaisant une "condition de chaîne dénombrable" convenable, X dans $\underline{S}$ et Y dans $\underline{S}$ avec $Y \times \omega \cong Y$, alors*

$$\text{Epi}(X, Y) = 0 \text{ dans } \underline{S} \text{ implique } \text{Epi}(u^*(X), u^*(Y)) = 0 \text{ dans } \underline{P}.$$

Ici $\text{Epi}(X, Y)$ est un objet défini dans tout topos en tirant en arrière “image” le long de “true”.

3. Un type particulier de base de topologie surgit si un objet A a la structure d’un monoïde commutatif (multiplicatif) et qu’on se donne un homomorphisme $u : A \rightarrow T^X$ dans le monoïde des sous-objets d’un objet X , où la multiplication est définie comme conjonction (intersection). Dans ce cas, nous avons de plus que l’objet relation d’ordre $F \Rightarrow A$ détermine un sous-monoïde du foncteur constant $\bar{A}$ dans $A^{\text{op}}E$ et que la relation d’“appartenance” $P \Rightarrow X \times A$ induite par l’appariement détermine un sous-monoïde de la famille constante A dans E/X . Nous pouvons alors former des fractions pour obtenir de nouveaux objets monoïdes commutatifs $(A)_P$ dans E/X et $(\bar{A})_P$ dans $A^{\text{op}}E$ et en particulier $\bar{A}$ (dans la catégorie intermédiaire des faisceaux) qui est la réflexion de $(\bar{A})_P$ et qui est réfléchi vers $(\bar{A})_P$.

Supposons maintenant que A est effectivement un anneau commutatif dans $\underline{E}$. En raison de la nature intuitionniste de la logique (déjà pour $\underline{E} = 2S$), nous sommes forcés de définir un premier x de A comme étant, non pas un idéal, mais un sous-objet de $\mathcal{A}$ satisfaisant plutôt quatre conditions de la forme

- 1) $[1 \in x] = \text{true}$
- 2) $[f, g \in x] = [f \in x] \wedge [g \in x]$
- 3) $[0 \in x] = \text{false}$
- 4) $[f + g \in x] \leq [f \in x] \vee [g \in x]$

Notons que 2) est une condition si et seulement si et que la disjonction dans la conclusion de l’implication en 4) signifie essentiellement le sup de deux sous-objets, ce qui dans un topos général peut signifier une disjonction effective seulement localement. Nous disons en outre qu’un anneau est local ssi le sous-objet des unités est premier. Par une limite inverse finie, nous obtenons $X \rightarrow T^A$, “le sous-objet de T^A constitué de tous les sous-objets de $\mathcal{A}$ qui sont premiers”. Ceci donne une base de topologie dans $\mathcal{E}$ dont les faisceaux forment le topos $\text{Spec}(A)$ connu comme le spectre global de $\mathcal{E}, A$; dans $\text{Spec}(A)$, $\bar{A}$ est un objet anneau local, et en fait l’ $\mathcal{A}$ -algèbre locale universelle dans le topos défini sur $\mathcal{E}$. Notons que dans le processus, la relation d’appartenance est exactement transformée en son opposée.

4. Bien que l’application de notre méthode à la géométrie algébrique n’ait fait que commencer, d’autres questions surgissent aussi immédiatement. Un travail non publié de George Rousseau montre que la sémantique souvent donnée pour la logique intuitionniste est simplement la sémantique ordinaire (c.-à-d. pour les ensembles abstraits) faite dans un topos convenable ΔS ; un énoncé similaire est vrai pour l’interprétation prouvabiliste de Läuchli, comme l’a récemment montré Anders Kock. Mais il semblerait aussi possible de considérer des paramètres conçus pour être appliqués au temps matérialiste réel plutôt qu’à de simples étapes dans une “construction” imaginée. Dans tout topos satisfaisant (ω) , chaque définition des nombres réels fournit un objet défini, mais on ne sait pas encore quels théorèmes d’analyse peuvent être prouvés à son sujet.

Références

- [1] Mao Tsetung. - *De la contradiction. D’où viennent les idées justes ?* Pékin (1966).
- [2] Grothendieck-Giraud-Verdier. - *Topologie et faisceaux*.

- [3] Mme Hakim. - *Schémas relatifs* (Thèse), Orsay (1967), S. G. A.
- [4] Solovay-Scott. - *Boolean valued models of set theory*. À paraître.
- [5] Lawvere. - Adjointness in Foundations (Dialectica), vol. 23 (1969), pp. 281-296.
- [6] Lawvere. - *Equality in Hyperdoctrines and the Comprehension Scheme as an Adjoint Functor*, Proc. of A. M. S. Symposium on Pure Math. XVII - Applications of Category Theory, Providence (1970).