Problèmes résolus et non résolus au sujet de la distribution des nombres premiers et de la fonction zêta de Riemann

Edmund Landau

Il y a quelques mois, le comité d'organisation de ce congrès a eu la gentillesse de m'inviter à donner une conférence lors d'une séance générale sur le développement d'un chapitre de mathématiques dont la sélection m'était réservée. J'ai cru agir dans l'esprit de cette honorable invitation en choisissant le domaine auquel appartiennent la majorité, environ les deux tiers, de mes publications à ce jour, et dans lequel, outre la présentation des travaux d'autrui, je peux également développer certaines de mes propres idées : la théorie de la distribution des nombres premiers et la théorie, étroitement liée, de la fonction zêta de Riemann. Cependant, cette conférence ne se limitera pas à ces seuls problèmes, mais fera également référence à des questions connexes en théorie analytique des nombres et en théorie des fonctions spéciales.

Je sais que la connaissance de la théorie des nombres est peu répandue parmi les mathématiciens et que la difficulté des méthodes de la théorie analytique des nombres, en particulier, n'a pas incité beaucoup de collègues à se familiariser avec les résultats remarquables de cette discipline. C'est pourquoi, dans cette conférence, je ne présupposerai aucune connaissance de ce domaine et m'exprimerai comme si je me trouvais devant une assemblée qui ignore encore tout de ces choses. Naturellement, je m'attendais dès le départ à trouver parmi vous de nombreux maîtres dans ce domaine précis, auprès desquels je n'avais auparavant qu'à apprendre.

Tout le monde sait ce qu'est un nombre premier ; ce sont les nombres 2, 3, 5, 7, etc., qui ont exactement deux diviseurs, à savoir le nombre 1 et eux-mêmes. Tous les nombres > 1 peuvent être composés par multiplication, même de manière unique. C'est le théorème fondamental de la théorie des nombres, connu de tous depuis l'école primaire. Ce théorème ne signifie pas à lui seul qu'il existe une infinité de nombres premiers ; car même un seul nombre premier 2 engendre une infinité de nombres en se multipliant par lui-même, et il ne serait donc pas impossible qu'un nombre fini de nombres premiers suffise à engendrer tous les nombres. Mais Euclide a déjà prouvé il y a plus de deux millénaires qu'il existe une infinité de nombres premiers. Par conséquent, si p_n désigne le $n^{\text{ième}}$ nombre premier, cela a une signification pour tout entier positif, et p_n croît naturellement vers l'infini avec n. Du point de vue de la théorie moderne des nombres, représenter p_n par n à l'aide d'une expression fermée, composée peut-être uniquement des fonctions habituellement utilisées en mathématiques et qui, de plus, aurait une structure simple, serait une impudence. Il s'agirait plutôt de représenter p_n pour n grand, approximativement par l'une des fonctions simples de n. Approximativement au sens précis où le quotient pour $n = \infty$ a une limite de 1.

Cette question est équivalente à la suivante. Soit x une quantité positive, entière ou non ; $\pi(x)$ désigne le nombre de nombres premiers $\leq x$. D'après Euclide, $\pi(x)$ croît vers l'infini. Le problème consiste à relier $\pi(x)$ à une fonction simple de telle sorte que le quotient entre $\pi(x)$ et la fonction

Référence : Landau, E. (1912), *Gelöste und ungelöste Probleme aus der Theorie der Primzahlverteilung und der Riemannschen Zetafunktion*, Jahresber. Deutsche Math. Ver. 21, 208–228. [Proc. 5th Internat. Congress of Math., I, 93–108, Cambridge 1913].

Transcription en LaTeX et traduction : Denise Vella-Chemla, à l'aide de Google Traduction, octobre 2025.

en question ait une limite de 1, c'est-à-dire qu'il ait réellement une limite et que cette limite soit égale à 1. Gauss, Legendre et Dirichlet ont conjecturé que

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log\ x}$$

Le signe $\sim$ (il faut le lire "*est asymptotiquement égal à*") signifie que le quotient à droite du symbole $\sim$ tend vers 1. Cette conjecture remarquable est identique à l'autre, qui repose sur ma question initiale :

$$p_n \sim n \log\ n.$$

On obtiendrait donc

$$\lim_{n=\infty} \frac{p_n}{n \log\ n} = 1,$$

et par conséquent

$$\lim_{n=\infty} \frac{p_{n+1}}{p_n} = 1.$$

Cette dernière hypothèse n'est, bien sûr, qu'un corollaire et elle est moins explicite ; par exemple, elle est également vraie pour l'ensemble des nombres n^2 au lieu de p_n. Je précise cependant d'emblée que je ne connais aucune preuve de ce corollaire qui ne conduise également au théorème le plus précis. Gauss, Legendre et Dirichlet n'ont pas réussi à démontrer le théorème sur $\pi(x)$, que j'appellerai le théorème des nombres premiers. Pourtant, Gauss le soupçonnait dès l'âge de quinze ans, comme il le rapporte dans une lettre qu'il a écrite à Encke à ce sujet à l'âge de 72 ans.

Quant à Dirichlet, l'une de ses réalisations les plus célèbres réside dans le domaine des nombres premiers. En 1837, il a démontré pour les nombres premiers de toute progression arithmétique, surmontant de grandes difficultés, ce qu'Euclide avait déjà démontré pour les nombres premiers en général. Soient k et l des entiers strictement positifs sans diviseur commun ; considérons tous les nombres $ky + l$ où y passe par les valeurs $0, 1, 2, 3, \ldots$; par exemple, $(k = 100, l = 19)$ les nombres $19, 119, 219, 319, \ldots$. Dirichlet a prouvé que dans chaque série arithmétique de ce type, il existe une infinité de nombres premiers. La principale difficulté de sa démonstration était de montrer que certaines séries infinies dont la convergence est triviale ont une somme différente de 0. Il a surmonté cet obstacle de manière ingénieuse en invoquant la théorie du nombre de classes des formes quadratiques. Aujourd'hui, cependant, selon M. Mertens, cette non-annulation peut être prouvée directement en quelques lignes seulement ; mais sinon, la preuve de Dirichlet n'a été simplifiée sur aucun point essentiel.

Legendre avait déjà conjecturé le théorème de Dirichlet et, simultanément, un théorème plus avancé, que Dirichlet appelle aussi "théorème", sans pouvoir le démontrer. Soit deux séries arithmétiques de ce type, présentant la même différence mais des termes initiaux différents, par exemple celle mentionnée ci-dessus, et $77, 177, 277, 377, \ldots$, $\pi_1(x)$ étant le nombre de nombres premiers de la première progression arithmétique, $\pi_1(x)$ devenant ainsi infini lorsque x le devient, selon le théorème de Dirichlet ; $\pi_2(x)$ étant le nombre correspondant dans la seconde progression arithmétique. Legendre et Dirichlet ont alors conjecturé que

$$\pi_1(x) \sim \pi_2(x)$$

Je reviens maintenant au problème général des nombres premiers. Un érudit anglais, Hargreave, fut le premier à publier une heuristique de plausibilité du théorème des nombres premiers, qu'il

refusait lui-même de considérer comme une preuve. Le célèbre mathématicien russe Tchebychev démontra bientôt que le quotient

$$\pi(x) : \frac{x}{\log\ x}$$

est supérieur à une constante positive et inférieur à une certaine constante finie à partir d'un certain x. On a donc conjecturé que le quotient associé à $\pi(x)$ avait une limite de 1, et Tchebychev a prouvé que sa fonction $\limsup_{x=\infty}$ était finie, et de plus qu'elle était ≥ 1. Il a également prouvé que $\liminf_{x=\infty} > 0$, et de plus qu'elle était ≤ 1. Dans les recherches de Tchebychev, outre $\pi(x)$, deux autres fonctions $\vartheta(x)$ et $\psi(x)$ jouent un rôle, qui s'expliquent comme suit : $\vartheta(x)$ est la somme

$$\vartheta(x) = \sum_{p \leq x} \log\ p$$

des logarithmes naturels de tous les nombres premiers jusqu'à x ; $\psi(x)$ est la somme

$$\psi(x) = \sum_{p^m \leq x} \log\ p,$$

étendue à toutes les puissances premières jusqu'à x, où, pour chaque puissance première, seconde, etc., le logarithme de la base de la puissance est inclus dans la somme. Pour les nouveaux quotients $\frac{\vartheta(x)}{x}$ et $\frac{\psi(x)}{x}$, Tchebychev a démontré exactement ce que j'ai dit plus haut à propos du quotient $\pi(x) : \frac{x}{\log\ x}$; il l'a même démontré d'abord pour ces expressions plus faciles à comprendre ; mais le dernier quotient $\pi(x) : \frac{x}{\log\ x}$ en découle sans difficulté. En général, le théorème des nombres premiers conjecturé à cette époque est un corollaire direct de chacune des deux conjectures

$$\vartheta(x) \sim x$$

et

$$\psi(x) \sim x,$$

comme on peut facilement le constater, et comme l'a particulièrement souligné votre célèbre compatriote Sylvester dans un traité de 1891. Vous pouvez déduire de cette allusion que même en 1891, le problème n'était pas encore résolu ; et pourtant, j'ai arrêté mon analyse historique aux résultats de Tchebychev, c'est-à-dire au milieu du XIXe siècle.

Je me tourne maintenant vers mon grand compatriote et prédécesseur de Göttingen, Riemann, à qui nous devons un ouvrage bref et révolutionnaire dans le domaine des nombres premiers, datant de 1859, qui n'a résolu aucun des principaux problèmes qu'il contenait. Nous n'aurions rien accompli dans le domaine des nombres premiers si Riemann ne nous avait pas montré la voie. Soit dit en passant, Riemann s'est fixé un objectif autre que la démonstration de cette relation asymptotique que j'ai appelée le théorème des nombres premiers. Il s'agit d'une expression explicite d'une fonction étroitement liée à $\pi(x)$; à savoir une série infinie d'intégrales dans laquelle, dans chaque terme, apparaît un zéro non réel d'une fonction nouvellement introduite dans l'analyse par Riemann, la fonction dite zêta. Riemann n'a prouvé ni l'existence de ces zéros ; ni leur existence en supposant que sa série infinie converge ; ni l'exactitude de sa formule en supposant que le théorème des

nombres premiers en découle ; et un autre problème posé dans son ouvrage reste non résolu à ce jour. Pourtant, par l'introduction de la fonction zêta et par ce qu'il a démontré ou non dans son traité, Riemann a fourni aux chercheurs ultérieurs les outils qui ont permis d'ajouter le théorème des nombres premiers et bien d'autres notions à la connaissance mathématique. Il est donc essentiel de s'attarder sur le traité de Riemann. Riemann étudie les séries infinies.

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s},$$

où s est une variable complexe, dont j'appellerai toujours l'abscisse σ et l'ordonnée t : $s = \sigma + ti$. Ici, x^s désigne $e^{s \log s}$, où l'on entend la valeur réelle du logarithme. Il est facile de montrer que la série infinie converge dans le demi-plan $\sigma > 1$, voire converge absolument, et qu'il y a là une fonction analytique régulière de s. Ceci est trivial pour nous aujourd'hui d'après le théorème de la double série de Weierstrass ; Riemann l'a démontré directement. La question se pose maintenant de savoir si $\zeta(s)$ peut se prolonger sur la droite $\sigma = 1$. Riemann a démontré que la fonction $\zeta(s)$ est régulière dans le plan entier jusqu'au point $s = 1$, et que $s = 1$ est un pôle du premier ordre de résidu 1. $\zeta(s) - \dfrac{1}{s-1}$ est donc une fonction transcendante entière. Riemann a également démontré l'équation fonctionnelle

$$\zeta(1-s) = \frac{2}{(2\pi)^s} \cos\frac{s\pi}{2} \Gamma(s)\zeta(s),$$

ce qui nous apprend que nous pouvons maîtriser la fonction dans le plan entier si nous l'avons suffisamment étudiée dans le demi-plan $\sigma \geq \frac{1}{2}$. Pour $\sigma > 1$, on a l'identité facilement démontrable

$$\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1 - \dfrac{1}{p^s}}$$

où p parcourt tous les nombres premiers, quel que soit leur ordre. Cela ne dit rien d'autre que la factorisation unique des nombres composés en facteurs premiers ; autrement dit, si le facteur lié à p est développé en une série géométrique (qui converge même pour $\sigma > 0$)

$$\frac{1}{1 - \dfrac{1}{p^s}} = 1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \frac{1}{p^{3s}} + \ldots$$

et si toutes ces séries sont multipliées, alors pour $\sigma > 1$ (ce qui est formellement clair et facilement justifiable), on obtient exactement la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s},$$

puisque chaque n est unique $2^a 3^b 5^c \ldots$, où tous les exposants sont des entiers ≥ 0. Cette représentation du produit, qui a bien sûr incité Riemann à introduire $\zeta(s)$ comme aide à la théorie des nombres premiers, enseigne que $\zeta(s)$ n'a pas de zéro à droite de $\sigma = 1$. L'équation fonctionnelle transforme ce demi-plan en $\sigma < 0$, et Riemann pouvait facilement en déduire que, bien que $\zeta(s)$ ait un zéro du premier ordre en chacun des points $-2, -4, -6, \ldots, -2q, \ldots$ (que je nommerai les zéros triviaux), il n'y a aucun zéro ailleurs dans le demi-plan $\sigma < 0$. Tout zéro non trivial appartient donc à la

bande $0 \leq \sigma \leq 1$. Il est facile de constater qu'il n'existe pas de racine sur le segment réel de 0 à 1. Du fait que la fonction est réelle pour s réel, en conjonction avec l'équation fonctionnelle de Riemann, il est clair que tous les zéros présents dans la bande sont symétriques par rapport à l'axe des réels et par rapport à la droite $\sigma = \frac{1}{2}$. Riemann, sans pouvoir en prouver aucune, a avancé les six conjectures suivantes ; elles ne sont pas indépendantes, et j'ai choisi cette formulation car elle facilite la compréhension des discussions historiques ultérieures.

(I) Il y a une infinité de zéros de $\zeta(s)$ dans la bande $0 \leq \sigma \leq 1$.

(II) Si pour $T > 0$, on note $N(T)$ le nombre de zéros du rectangle

$$0 \leq \sigma \leq 1, \quad 0 \leq t \leq T,$$

qui est bien sûr fini et, selon (I), devient infini avec T, alors

$$N(T) = \frac{1}{2\pi} T \log\ T - \frac{1 + \log(2\pi)}{2\pi} T + \mathrm{O}(\log\ T)$$

(par $\mathrm{O}(g(T))$, je représente toujours une fonction dont le quotient par $g(T)$ est, en termes absolus, inférieur à une borne finie pour tout T suffisamment grand).

(III) [qui, soit dit en passant, découle amplement de II] Si ρ couvre toutes les racines non triviales de $\zeta(s)$, alors

$$\sum_{\rho} \frac{1}{|\rho|^2}$$

converge.

De là, en notation courante, il résulte que la représentation produit de Weierstrass de la fonction entière $(s-1)\zeta(s)$ a la forme

$$(s-1)\zeta(s) = e^{K(s)} \prod_{w} \left(1 - \frac{s}{w}\right) e^{\frac{s}{w}},$$

où w passe par toutes les racines de $\zeta(s)$ et $K(s)$ est une fonction transcendante entière.

Riemann a également conjecturé que :

(IV) $K(s)$ est une fonction linéaire de s ; en notation courante : la fonction entière est de genre fini, soit de genre 1.

(V) Les racines de $\zeta(s)$ dans la bande $0 \leq \sigma \leq 1$ ont toutes pour partie réelle $\frac{1}{2}$.

(VI) Il existe une certaine identité pour $\pi(x)$, que j'ai mentionnée plus haut, mais que je ne souhaite pas décrire ici, d'autant plus qu'elle ne représente que l'aboutissement d'un chemin secondaire et n'est pas pertinente pour d'autres avancées en théorie des nombres premiers.

Les suggestions de Riemann sont restées en suspens pendant 34 ans. Ce n'est qu'en 1893 que M. Hadamard, après nous avoir présenté la théorie des fonctions complètes de genre fini, aboutissement des approches antérieures de Poincaré et de Laguerre, a réussi à démontrer les hypothèses (I), (III) et (IV) de Riemann, à savoir l'existence de ces mystérieux zéros, la convergence de la somme des inverses des carrés de leur valeur absolue et le genre 1 de la fonction $(s-1)\zeta(s)$. M. Hadamard souligne en particulier qu'il n'a pas pu démontrer l'hypothèse (II) de Riemann, pas même l'existence de la limite

$$\lim_{T=\infty} \frac{N(T)}{T \log\ T}.$$

De plus, M. von Mangoldt a apporté deux contributions majeures à la théorie des nombres premiers. Tout d'abord, en 1895, partant des résultats de Hadamard et y ajoutant une longue série de conclusions, il a démontré la formule des nombres premiers de Riemann (VI). Ensuite, en 1905, M. von Mangoldt a démontré l'hypothèse de Riemann (II) sur $N(T)$. J'ai d'ailleurs fourni ultérieurement des preuves beaucoup plus concises pour les deux résultats de von Mangoldt.

Des six conjectures de Riemann, seule (V) restait ouverte ; et la question de savoir si les zéros non triviaux $\beta + \gamma i$ de $\zeta(s)$ ont tous la partie réelle $\frac{1}{2}$ reste non résolue à ce jour. Ce n'est qu'en 1896 que MM. Hadamard et de la Vallée Poussin prouvèrent que $\beta < 1$, c'est-à-dire en raison de l'équation fonctionnelle $0 < \beta < 1$, et en 1899, M. de la Vallée Poussin prouva que, avec un choix approprié d'une constante absolue positive c, on a toujours

$$\beta < 1 - \frac{1}{c \log |\gamma|}.$$

et, donc

$$\frac{1}{c \log |\gamma|} < \beta < 1 - \frac{1}{c \log |\gamma|}.$$

De la bande $0 \leq \sigma \leq 1$, une zone spécifique est découpée de chaque côté, de plus en plus fine en haut et en bas, mais son aire reste infinie, de sorte qu'elle contient des points s pour lesquels $\zeta(s) \neq 0$. Cependant, M. de la Vallée Poussin a prouvé en 1899 que les premiers zéros se situent sur la droite $\sigma = \frac{1}{2}$. Récemment, en 1912, M. Backlund a réalisé cette démonstration de manière particulièrement astucieuse pour les 58 premiers zéros, à savoir tous ceux situés entre les ordonnées -100 et 100 ; ces racines se révèlent également être des racines simples. On ne sait rien de plus sur les zéros de la fonction zêta.

Revenons maintenant à la théorie des nombres premiers ! En s'appuyant sur les résultats de Hada-mard, M. Hadamard et M. de la Vallée Poussin ont démontré indépendamment et simultanément le théorème des nombres premiers en 1896, en utilisant des méthodes très différentes, malgré leur fondement commun. Une troisième démonstration, également fondée sur les résultats de Hadamard, a été donnée par M. von Koch en 1901. Plus tard, en 1903, j'ai donné une quatrième démonstration, non seulement beaucoup plus courte, mais qui n'utilise pas la théorie des fonctions complètes d'Hadamard, devenue aujourd'hui un classique. Cette dernière circonstance était d'une importance capitale pour la théorie des idéaux premiers d'un corps de nombres algébriques, qui inclut la théorie des nombres premiers comme cas particulier. À ce jour, on ne sait pas si la fonction zêta généralisée correspondante existe dans le plan entier, et ma méthode a donc été la première et,

à ce jour, la seule qui conduise à la preuve du théorème dit des idéaux premiers, que j'ai découvert en 1903, avec la formulation suivante : "*Dans tout corps algébrique, il y a asymptotiquement* $\sim \dfrac{x}{\log\ x}$ *idéaux premiers, et ce nombre est exactement le même pour tout corps*".

Cependant, dans cette conférence, je ne traiterai que des nombres premiers et ne m'étendrai pas sur les corps et les idéaux. J'ai mentionné plus haut M. de la Vallée Poussin comme l'un des deux chercheurs ayant réussi indépendamment à résoudre le problème classique de Gauss-Legendre-Dirichlet ; le théorème des nombres premiers peut également être

$$\pi(x) \sim \mathrm{Li}(x)$$

(Li représente le logarithme intégral de x) où, comme nous le savons,

$$\frac{x}{\log\ x} \sim \int_2^x \frac{du}{\log\ u}$$

et $\mathrm{Li}(x)$ est la somme de cette intégrale et d'une constante additive. Le résultat suivant, qui contient le théorème des nombres premiers, a été découvert par M. de la Vallée Poussin seul : le théorème

$$\pi(x) = \mathrm{Li}(x) + \mathrm{O}\left(\frac{x}{\log^q\ x}\right)$$

où q est une constante arbitrairement grande. Il a même démontré

$$\pi(x) = \mathrm{Li}(x) + \mathrm{O}(xe^{-\alpha\sqrt{\log\ x}}),$$

où α est une constante positive.

Revenons maintenant à la série arithmétique. En 1896, Hadamard et de la Vallée Poussin ont démontré indépendamment le nombre $\pi_1(x)$ de nombres premiers dans la progression $ky + l$

$$\pi_1(x) \sim \frac{1}{\phi(k)}\frac{x}{\log\ x}$$

qui, par division, prouve la validité de la conjecture de Legendre-Dirichlet selon laquelle les nombres de nombres premiers correspondant à deux progressions ayant une différence de k sont asymptotiquement égaux. M. de la Vallée Poussin a même pu, sans le mentionner spécifiquement, démontrer

$$\pi_1(x) = \frac{1}{\phi(k)}\mathrm{Li}(x) + \mathrm{O}(xe^{-\alpha\log\ x}),$$

où α désigne une constante ne dépendant que de k et l, ou, ce qui revient au même, ne dépendant que de k ; je l'ai démontré plus tard plus brièvement et même avec une constante absolue α.

Abordons maintenant un autre problème analogue que je n'ai pas encore abordé. Soit $au^2+buv+cv^2$, avec a, b, c premiers entre eux, et $a > 0$ dans le cas de $b^2 - 4ac < 0$. Ici, u, v sont des variables entières. Dirichlet a esquissé une démonstration que la forme quadratique représente une infinité de nombres premiers, sans développer le point principal, la non-annulation de certaines séries. Weber fut le premier à le faire en 1882 ; d'après un manuscrit d'E. Schering publié en 1909, il est clair

que Schering possédait également une démonstration complète. En 1897, M. de la Vallée Poussin, par un raisonnement long et ingénieux, a même démontré l'analogue du théorème des nombres premiers. Mes recherches générales sur les idéaux premiers dans les classes dites idéales ont abouti, en 1907, au théorème de de la Vallée Poussin, par spécialisation appropriée, et à un théorème encore plus précis, à savoir le nombre de nombres premiers représentables par la forme $\leq x$

$$\frac{1}{h}\mathrm{Li}(x) + \mathrm{O}(xe^{-\sqrt[\gamma]{\log\ x}})$$

où γ est une constante positive et h désigne le numéro de la classe ou (pour les classes dites bilatérales) son double.

Jusqu'à présent, dans ce cours, j'ai abordé alternativement deux objets de recherche totalement distincts : les nombres premiers, d'une part, et la fonction zêta de Riemann, d'autre part ; plus généralement, si l'on considère d'une part certaines fonctions de la théorie des nombres, et d'autre part, certaines fonctions analytiques. Quelle est la fonction qui "fait le pont" ? Pourquoi l'étude de la fonction zêta, en particulier, a-t-elle conduit à la démonstration du théorème des nombres premiers ?

Soit a_n une fonction arbitraire de la théorie des nombres ; alors, formellement, sans tenir compte de la convergence, je peux écrire la série infinie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}.$$

Il existe maintenant un lien certain entre les propriétés de cette série en tant que fonction analytique de s et le comportement de la somme

$$\sum_{n=1}^{[x]} a_n$$

pour un grand x ; $[x]$ désigne le plus grand entier $\leq x$. Avant d'expliquer ce lien, je voudrais utiliser un exemple pour démontrer quel ensemble de nombres a_n est crucial pour le problème des nombres premiers. J'ai déjà dit que tout dépend de l'étude de la fonction $\psi(x)$, c'est-à-dire la fonction

$$\psi(x) - [x] = \sum_{p^m \leq x} \log\ p - \sum_{n=1}^{[x]} 1.$$

Je dois donc définir :

$$a_n = \begin{cases} \log\ p - 1 & \text{pour} \quad \mathrm{n} = \mathrm{p}^{\mathrm{m}} \quad (\mathrm{m} \geq 1), \\ -1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La fonction correspondante, cependant, est, comme il ressort facilement de la représentation produit de $\zeta(s)$, pour $\sigma > 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} = \sum_{p,m} \frac{\log\ p}{p^{ms}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \zeta(s).$$

Considérons maintenant à nouveau la fonction en termes généraux

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}.$$

Concernant la région de convergence d'une série dite de Dirichlet, en 1884, M. Jensen a découvert le théorème fondamental selon lequel cette région est un demi-plan

$$\sigma > \gamma,$$

assez analogue à la façon dont la région de convergence d'une série entière

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$$

est un cercle ; à savoir qu'il y a convergence du côté droit de $\sigma = \gamma$, divergence du côté gauche de $\sigma = \gamma$, où deux cas extrêmes sont possibles : convergence partout, c'est-à-dire $\gamma = -\infty$, et convergence nulle part, c'est-à-dire $\gamma = +\infty$. Les séries entières et les séries de Dirichlet sont toutes deux des cas particuliers d'une catégorie de séries plus générale.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$$

où

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots, \quad \lim_{n=\infty} \lambda_n = \infty,$$

et pour lesquelles M. Jensen a également démontré l'existence d'un demi-plan de convergence ; à savoir, la série de Dirichlet est le cas particulier $\lambda_n = \log\ n$, la série entière est le cas particulier $\lambda_n = n, e^{-s} = x$ considéré comme une variable ; cependant, je ne souhaite pas parler ici de ce type général λ_n. Dans le demi-plan de convergence, comme M. Cahen a pu le montrer en 1894 comme une application facile des théorèmes sur la convergence uniforme, la série de Dirichlet représente une fonction analytique régulière ; M. Cahen a également déclaré, de manière analogue à la représentation de Cauchy bien connue du rayon de convergence d'une série entière, qu'ici, dans le cas $\gamma \geq 0$, l'abscisse dite de convergence γ est la limite inférieure de tout c pour lequel la relation

$$\sum_{n=1}^{[x]} a_n = \mathrm{O}(x^c)$$

est vérifiée. L'abscisse de convergence de la série de Dirichlet renseigne donc sur la croissance de la fonction sommatoire

$$\sum_{n=1}^{[x]} a_n$$

par rapport aux puissances de x à titre de comparaison. Cependant, pour démontrer le théorème des nombres premiers, des échelles de comparaison plus fines ont dû être ajoutées. Le simple fait que la série de Dirichlet ait une abscisse de convergence de 1 pour

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \zeta(s)$$

signifie simplement que $\psi(x) - x = \mathrm{O}(x^c)$ pour tout $c > 1$, ce qui est trivial ; mais on veut prouver que

$$\lim_{x=\infty} \frac{\psi(x) - x}{x} = 0.$$

Puisque j'ai déjà évoqué l'analogie entre les séries de Dirichlet et les séries entières, j'aimerais souligner deux différences.

Premièrement, la convergence d'une série entière en un point implique sa convergence absolue en tout point plus proche du centre. Ainsi, la série entière converge absolument à l'intérieur de son cercle de convergence. Ce n'est pas le cas des séries de Dirichlet ; en général, trois régions se succèdent de gauche à droite : un demi-plan de divergence, une bande de convergence conditionnelle, dont l'épaisseur est d'ailleurs au plus égale à 1, et un demi-plan de convergence absolue. Exemple :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^s} = \frac{1}{1^s} - \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} - \frac{1}{4^s} + \dots$$

diverge pour $\sigma < 0$, converge conditionnellement pour $0 < \sigma < 1$ et absolument pour $\sigma > 1$. Par ailleurs, cette fonction est $= (1 - 2^{1-s})\zeta(s)$.

Deuxième différence : le cercle de convergence d'une série entière doit contenir au moins un point singulier de la fonction. Pour les séries de Dirichlet, ce n'est même pas nécessairement le cas à proximité de la droite de convergence. L'exemple qui vient d'être mentionné représente même une fonction entière.

Pour donner un bref aperçu de ma démonstration du théorème des nombres premiers, je dirai simplement ce qui suit : si une série de Dirichlet

$$\sum_{n=1}^{[x]} \frac{a_n}{n^s} = f(s)$$

converge absolument pour $\sigma > 1$, alors il est assez facile, pour $x \geq 1$ et pour tout $b > 1$ et avec intégration sur la droite infinie, de déterminer si l'identité

$$\sum_{n=1}^{[x]} a_n \log \frac{x}{n} = \frac{1}{2\pi\, i} \int_{b-\infty\, i}^{b+\infty\, i} \frac{x^s}{s^2} f(s) ds$$

qui fournit une expression exacte pour une fonction

$$\sum_{n=1}^{[x]} a_n = A(x)$$

fournit une fonction sommatoire étroitement liée. Le membre de gauche de cette identité est $\int_1^x \frac{A(u)}{u} du$. Sous l'intégrale de droite, x apparaît comme paramètre ; si l'on remplace le chemin d'intégration par un chemin d'intégration passant à gauche de la droite $\sigma = 1$ basé sur le théorème de Cauchy, alors l'intégrande en tout point fixe du nouveau chemin est $\mathrm{o}(x)$, c'est-à-dire tel que le

quotient par x tende vers zéro pour $x = \infty$; dans des circonstances qui se présentent heureusement dans le problème des nombres premiers et le problème des idéaux premiers, on peut cependant montrer que l'intégrale entière est $o(x)$; par exemple, si j'applique l'ansatz à la fonction mentionnée ci-dessus :

$$f(s) = -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \zeta(s)$$

J'applique en me basant sur certains de mes théorèmes concernant la fonction zêta

$$\int_1^x \frac{A(u)}{u} du = o(x)$$

dont on peut facilement déduire par déduction élémentaire

$$A(x) = o(x)$$

soit ici

$$\psi(x) - [x] = o(x),$$

$$\psi(x) \sim x$$

et on préserve ainsi le théorème des nombres premiers. Par ailleurs, on peut généralement relier $A(x)$ à $f(s)$ par l'identité valable pour les nombres non entiers $x > 1$, et $A(x)$, au lieu de $\int_1^x \frac{A(u)}{u} du$, à $f(s)$ par l'identité valable pour les nombres non entiers $x > 1$

$$A(x) = \frac{1}{2\pi\, i} \int_{b-\infty\, i}^{b+\infty\, i} \frac{x^s}{s} f(s) ds.$$

Du fait de la convergence conditionnelle de l'intégrale, il est plus difficile de fonder cette identité sur des conclusions asymptotiques. Mais en 1912, j'ai réussi à atteindre mon but également par cette méthode.

Je reviens à la relation suggérée précédemment entre la norme de la somme et la convergence de la série de Dirichlet correspondante. Je rappelle que la région de convergence de la série, cruciale pour l'étude de la somme, n'est pas déterminée par la borne supérieure des abscisses des points singuliers, bien qu'elle ne puisse évidemment pas s'étendre au-delà. La question se pose donc de savoir quelles conditions ajouter à la régularité pour conclure avec certitude qu'une série de Dirichlet dont la convergence est connue, par exemple pour $\sigma > 1$, converge même, par exemple, pour $\sigma > \tau$, où τ est un certain nombre < 1.

J'ai fait la première découverte dans ce sens. On savait déjà que si σ_0 est plus grand que l'abscisse de convergence d'une série de Dirichlet $f(s)$, dans le demi-plan $\sigma > \sigma_0$, avec t variant uniformément à l'infini positif ou négatif, on a

$$f(\sigma + ti) = O(|t|)$$

J'ai maintenant démontré le théorème : *"Soit $a_n = O(n^\epsilon)$. Pour tout $\epsilon > 0$, la série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} = f(s)$$

est absolument convergente pour $\sigma > 1$. La fonction analytique définie par $f(s)$ est régulière pour $\sigma \geq \eta$, où η est un certain nombre dans l'intervalle $0 < \eta < 1$, et soit $\sigma \geq \eta$ uniforme dans le demi-plan.

$$f(s) = \mathrm{O}(|t|^a),$$

où a est une constante. Alors la série de Dirichlet converge au-delà de $\sigma = 1$".

M. Schnee est allé plus loin et a démontré : si $0 \leq a < 1$, alors la série converge certainement pour $\sigma > \dfrac{\eta + a}{1 + a}$; d'ailleurs, j'ai ultérieurement supprimé la restriction $a < 1$ sans modifier l'énoncé. Le théorème de Schnee stipule spécifiquement : si pour $\sigma \geq \eta$:

$$f(s) = \mathrm{O}(|t|^a)$$

est vrai pour tout a positif, aussi petit soit-il, alors la série converge pour $\sigma > \eta$. Si l'on applique la méthode de preuve de Schnee à la fonction

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$$

(dont le pôle est en $s = 1$), on obtient, grâce à certaines propriétés de la fonction zêta, une preuve du théorème démontré pour la première fois par M. von Koch en 1901 par une méthode différente: en supposant l'exactitude de l'hypothèse de Riemann (V),

$$\psi(x) = x + \mathrm{O}(x^{1/2+\epsilon})$$

pour tout $\epsilon > 0$ et

$$\pi(x) = \mathrm{Li}(x) + \mathrm{O}(x^{\frac{1}{2}+\epsilon})$$

pour tout $\epsilon > 0$. Mutatis mutandis, la limite supérieure des parties réelles des zéros de $\zeta(s)$ est comprise entre $\frac{1}{2}$ excl. et 1 excl. Par ailleurs, comme M. von Koch l'a démontré à l'époque, et comme je l'ai démontré plus brièvement par la suite avec mes méthodes, x^ϵ dans les deux dernières formules pourrait également être remplacé par $\log^2 x$, et $\log^2 x$ peut être remplacé par $\log\ x$.

J'aimerais profiter de cette occasion pour dire quelques mots sur une autre série de Dirichlet particulière : pour $\sigma > 1$,

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s},$$

où $\mu(n)$ désigne la fonction de Möbius :

$\mu(1) = 1$

$\mu(n) = 0$ pour les nombres contenant au moins un nombre premier plus d'une fois ;

$\mu(n) = (-1)^\rho$ pour les nombres > 1 sans carré constitués d'exactement ρ facteurs premiers distincts.

Stieltjes a formulé l'affirmation

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(n) = \mathrm{O}(\sqrt{x})$$

en 1885, sans fournir sa prétendue preuve. Je ne sais pas si l'affirmation de Stieltjes est correcte. Elle prouverait également l'hypothèse de Riemann, car son affirmation impliquerait a fortiori la convergence de

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}$$

pour $\sigma > \frac{1}{2}$, d'où la conjecture de Riemann, et même plus encore – par exemple, que tous les zéros de $\zeta(s)$ sont simples. De mon théorème sur les séries de Dirichlet mentionné ci-dessus, dont les hypothèses sont vérifiables à $\dfrac{1}{\zeta(s)}$ près, j'ai pu déduire que, réciproquement, la correction de la conjecture de Riemann impliquerait la convergence de la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}$$

au-delà de $s = 1$. Mais c'est à un jeune chercheur anglais de Cambridge, M. Littlewood, qu'il incomba de prouver en 1912 que cette série convergerait alors, même pour $\sigma > \frac{1}{2}$. Il a réussi, grâce à un raisonnement ingénieux, à prouver pour chaque $\delta > 0$ et chaque $\epsilon > 0$ que, en supposant l'exactitude de l'hypothèse de Riemann pour $\sigma \geq \frac{1}{2} + \delta$:

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \mathrm{O}(|t|^{\epsilon});$$

de là, selon le théorème de Schnee, l'énoncé découle directement.

Laissons maintenant de côté l'hypothèse de Riemann et revenons au fondement solide des vérités mathématiques. Que savons-nous de la série μ ? Euler a conjecturé en 1748, sans pouvoir le prouver, et M. von Mangoldt a prouvé en 1897 que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n}$$

converge ; Möbius a conjecturé en 1832, sans pouvoir le prouver, et j'ai prouvé en 1899 que même

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n) \log\ n}{n}$$

converge. J'ai prouvé en 1903 que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}$$

converge sur la droite entière $\sigma = 1$ et, bien sûr, représente $\dfrac{1}{\zeta(s)}$, et même que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n) \log^q n}{n^s}$$

converge pour tout q fixé, quelle que soit sa grandeur, sur la droite $\sigma = 1$; on n'en sait pas beaucoup plus sur cette question. Cependant, en 1905, j'ai démontré la convergence de la série mentionnée précédemment, avec la modification que n ne couvre pas tous les entiers, mais seulement ceux d'une progression arithmétique. Il en va de même si, au lieu de $\mu(n)$, on utilise la fonction de Liouville $\lambda(n)$, qui vaut toujours $+1$ ou -1, selon que le nombre de facteurs premiers de n, en comptant les multiples, est pair ou impair. Il en résulte le corollaire : dans toute progression arithmétique, il y a asymptotiquement autant de nombres composés d'un nombre pair de facteurs premiers que de nombres composés d'un nombre impair de facteurs premiers.

Il n'est d'ailleurs pas sans intérêt de rechercher si les théorèmes susmentionnés concernant $\pi(x)$ et $\mu(n)$, qui dérivent des mêmes sources transcendantes, peuvent être directement déduits l'un de l'autre par inférence élémentaire. Ce n'est qu'en 1911 que j'ai réussi à démontrer que le théorème des nombres premiers et le théorème de von Mangoldt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} = 0$$

sont équivalents en ce sens ; j'en avais déjà démontré la moitié dans ma thèse de 1899.

J'aimerais en dire un peu plus sur les nombres premiers avant d'aborder la théorie de la fonction zêta, dont l'étude, même sans tenir compte de son applicabilité préliminaire, est devenue une fin en soi dans plusieurs travaux récents remarquables, notamment ceux de mon ami Bohr à Copenhague.

Je quitterai les nombres premiers après avoir cité quelques questions que je considère comme inattaquables en l'état actuel de la science. Je choisis des questions formulées avec précision, et non des questions vagues comme : "Trouver la loi des nombres premiers" ou "Estimer $\pi(x)$ aussi précisément que possible pour un grand x". Je liste quatre questions et j'y choisis des constantes spécifiques pour en clarifier l'essentiel.

(1) La fonction $u^2 + 1$ pour l'entier u représente-t-elle une infinité de nombres premiers ?

(2) L'équation $m = p + p'$ a-t-elle une solution en nombres premiers pour tout $m > 2$ pair ?

(3) L'équation $2 = p - p'$ a-t-elle une infinité de solutions en nombres premiers ?

(4) Existe-t-il au moins un nombre premier compris entre n^2 et $(n+1)^2$ pour tout entier positif n ?

Revenons maintenant à la fonction zêta : pour tout σ fixé, je note $\nu(\sigma)$ est la borne inférieure de la constante c, pour laquelle, lorsque t croît infiniment,

$$\zeta(\sigma + ti) = \mathrm{O}(t^c).$$

Il est facile de démontrer que ν est fini, et que

$$\nu(\sigma) = 0 \quad \text{pour} \quad \sigma \geq 1 \, ;$$

de plus, à partir de l'équation fonctionnelle de Riemann et d'une estimation de Stieltjes de la fonction gamma, il découle facilement que

$$\nu(1-\sigma) = \nu(\sigma) + \sigma - \frac{1}{2}$$

pour tout réel σ ; pour $\sigma \leq 0$, on a

$$\nu(\sigma) = \frac{1}{2} - \sigma$$

Maintenant, comment la courbe $\nu = \nu(\sigma)$ suit-elle le segment $0 \leq \sigma \leq 1$? M. Lindelöf a prouvé, en se basant sur un théorème général de la théorie des fonctions, qu'il a lui-même établi avec M. Phragmén, que la courbe est continue et convexe ; il en résulte notamment que pour $0 \leq \sigma \leq 1$

$$\nu(\sigma) \leq \frac{1-\sigma}{2}.$$

Le résultat final de Lindelöf est que le segment de courbe pour l'intervalle $0 \leq \sigma \leq 1$ appartient au triangle de sommets $(0, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, 0), (1, 0)$. Je n'en sais pas plus à ce sujet. Mais M. Littlewood a prouvé que, en supposant que l'hypothèse de Riemann soit correcte, pour $\frac{1}{2} \leq \sigma \leq 1$

$$\nu(\sigma) = 0,$$

donc pour $0 \leq \sigma \leq \frac{1}{2}$ $\qquad$ $\nu(\sigma) = \frac{1}{2} - \sigma.$

Puisque j'ai une fois de plus quitté le terrain solide, j'ajoute qu'en 1911, j'ai pu tirer la conclusion de l'exactitude de l'hypothèse de Riemann que la différence

$$N(T) - \frac{1}{2\pi} T \log\, T - \frac{1 + \log\, 2\pi}{2\pi} T,$$

qui, selon M. von Mangoldt, est $O(\log\, T)$, ne pourrait pas être $O(1)$.

Et pour revenir à la réalité, je mentionne que, bien que je n'aie pas réussi à élucider les mystérieux zéros non triviaux de zêta, j'ai néanmoins posé une nouvelle énigme en découvrant le fait suivant (1912), qui indique un lien mystérieux et inconnu entre les zéros et les nombres premiers. Soit $x > 0$ et ρ parcourant tous les zéros appartenant au demi-plan supérieur, ordonnés en ordonnées croissantes. Alors la série

$$\sum_{\rho} \frac{x^{\rho}}{\rho}$$

est divergente pour $x = 1$,$x = p^m$, $x = \frac{1}{p^m}$; convergente pour tout autre $x > 0$, uniformément convergente dans tout intervalle $x_0 < x < x_1$ qui est exempt de points de divergence à l'intérieur et aux extrémités ; inégalement convergente dans tout intervalle $x_0 < x < x_1$ qui ne contient pas de point de divergence à l'intérieur mais en borde au moins un.

J'en viens maintenant à d'autres recherches sur $\zeta(s)$. Les points où une fonction analytique est nulle sont certes très importants ; mais les points où elle prend une valeur particulière a sont tout aussi intéressants. Prouver que $\zeta(s)$ prend toute valeur a est facile. Mais où sont les racines de $\zeta(s) = a$? La première question est de savoir quelles valeurs $\zeta(s)$ prend dans le demi-plan $\sigma > 1$, duquel un voisinage du pôle $s = 1$ est découpé, par exemple par un demi-cercle de rayon 1. En 1910, M. Bohr a démontré le fait, pour le moins inattendu pour moi, que $\zeta(s)$ n'est pas borné dans cette région. Autrement dit, l'inégalité

$$\zeta(s) > g$$

a une solution pour $g > 0$ et $t_0 > 0$ dans le quart de plan $\sigma > 1, t > t_0$. De là, Bohr et moi-même avons conclu en 1910 dans un article conjoint, en utilisant une approche de Lindelöf et les travaux de M. Schottky et moi-même sur certaines généralisations du théorème de Picard : si $\delta > 0$ est donné arbitrairement, alors $\zeta(s)$ prend toutes les valeurs de la bande $1 - \delta < \sigma < 1 + \delta$, à une exception près au plus.

Cela a fait naître l'espoir de réfuter l'hypothèse de Riemann, par exemple en prouvant que $\zeta(s)$ ne prend pas la valeur 1 dans le demi-plan $\sigma > \frac{3}{4}$; alors $\zeta(s)$ devrait y prendre toutes les autres valeurs, en particulier la valeur 0, tandis que l'hypothèse de Riemann est évidemment identique à l'affirmation $\zeta(s) \neq 0$ pour $\sigma > \frac{1}{2}$. La possibilité de résoudre le problème de Riemann de cette manière a cependant disparu lorsque M. Bohr a démontré en 1911 le fait étonnant que $\zeta(s)$ prend déjà toute valeur différente de 0 dans la bande $1 - \delta < \sigma < 1 + \delta$, même infiniment souvent.

Or, dans le travail de cette année, déjà mentionné à plusieurs reprises, M. Littlewood a démontré le théorème suivant : *pour tout $\delta > 0$, au moins une des deux fonctions $\zeta(s)$ et $\zeta'(s)$ possède un zéro dans le demi-plan.* D'après cela, l'hypothèse de Riemann serait réfutée si l'on pouvait démontrer la non-annulation de $\zeta'(s)$, par exemple, dans le demi-plan $\sigma > 9/10$. L'étude des zéros de $\zeta'(s)$ est un problème difficile, car $\zeta'(s)$ ne possède pas la représentation esthétique par un produit qui facilite l'étude de $\zeta(s)$. Mais là encore, M. Bohr savait comment s'y prendre et il a réussi à démontrer dans un article publié le 4 juin dernier que $\zeta'(s)$ possède un zéro même dans le demi-plan $\sigma > 1$, et qu'il en existe une infinité, de sorte que le théorème de Littlewood ne peut conduire à une solution du problème de Riemann. Bohr a trouvé cela en faisant le détour par

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -\sum_p \frac{\log\ p}{p^s - 1}\ ;$$

Il a découvert que cette fonction prend la valeur 0 et même toute valeur dans le demi-plan $\sigma > 1$; soit dit en passant, même dans la bande critique $1 < \sigma < 1 + \delta$, et même une infinité de fois.

À la fin de mon exposé, j'aimerais souligner que les outils que j'ai créés pour la théorie des nombres premiers se sont récemment révélés utiles pour résoudre d'autres problèmes de théorie analytique des nombres et concernant le comptage des points du réseau dans certains domaines multidimensionnels, jusqu'alors non résolus. J'en ai parlé dans un article récemment publié et je n'en mentionnerai ici qu'un seul théorème très précis : *les deux séries de Dirichlet*

$$f(s) = 1 - \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} - \frac{1}{7^s} + \frac{1}{9^s} - \frac{1}{11^s} + \dots$$

et

$$g(s) = 1 - \frac{1}{5^s} + \frac{1}{7^s} - \frac{1}{11^s} + \frac{1}{13^s} - \frac{1}{17^s} + \dots$$

convergent évidemment pour $\sigma > 0$. Leur produit formel est à nouveau une série de Dirichlet.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n^s}$$

qui converge naturellement pour $\sigma > 1$, où les séries données convergent absolument ; d'après un théorème facilement prouvable de Stieltjes (1885) sur les séries de Dirichlet, le produit formel converge même pour $\sigma > \frac{1}{2}$. D'autre part, M. Bohr (1910) a un exemple de deux séries de Dirichlet

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s},$$

et

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^s},$$

convergeant pour $\sigma > 0$, tandis que leur produit formel

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n^s}$$

ne converge pas au-delà de la droite $\sigma = \frac{1}{2}$ fournie par le théorème de Stieltjes. Cependant, pour l'exemple $f(s)g(s)$ ci-dessus, je peux démontrer la convergence pour $\sigma > \frac{1}{3}$. Cet exemple particulier représente bien sûr deux séries de type

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}$$

où $\chi(n)$ est un caractère par rapport à un modulo k. Ces séries ont été introduites par Dirichlet dans sa démonstration du théorème de progression arithmétique, et pour toute paire de telles séries, tant qu'aucun des deux caractères n'est un caractère principal (sinon, comme on le sait, le produit ne converge pas du tout, même pour $s = 1$), je peux démontrer la convergence pour $\sigma > \frac{1}{3}$.

Je m'excuse pour la longueur de mon exposé ; de toute façon, je n'ai pas abordé de nombreux points qui relèvent de mon sujet. La bibliographie de mon *Manuel de théorie de la distribution des nombres premiers* de 1909 contient à elle seule plus de 600 articles. Grâce à ce manuel, j'ai réussi à intéresser de nombreux chercheurs à ce domaine intéressant, de sorte que de nombreux autres travaux ont été publiés depuis. Je serais ravi si cette présentation m'avait permis de recruter des collaborateurs supplémentaires.