Analyse spectrale et hypothèse de Riemann

Gilles Lachaud

Résumé : Les formules explicites de Riemann et Guinand-Weil mettent en relation l'ensemble des nombres premiers avec l'ensemble des zéros non triviaux de la fonction zêta de Riemann. Nous rappelons l'interprétation spectrale d'Alain Connes des zéros critiques de la fonction zêta de Riemann comme valeurs propres du spectre d'absorption d'un opérateur illimité dans un espace de Hilbert approprié. Nous donnons ensuite une interprétation spectrale des zéros de la fonction zêta de Dedekind d'un corps de nombres algébriques K de degré n dans un cadre automorphe.

Si K est un corps quadratique complexe, les *formes toriques* sont les fonctions définies sur la surface modulaire X, telles que la somme de cette fonction sur "l'ensemble de Gauss" de K est nulle, et les séries d'Eisenstein fournissent de telles formes toriques. Dans le cas d'un corps numérique général, on peut associer à K un tore maximal T du groupe linéaire général G. Les *formes toriques* sont les fonctions définies sur la variété modulaire X associée à G, telles que l'intégrale sur la sous-variété induit par T est nul. Alternativement, les *formes toriques* sont les fonctions orthogonales aux *séries orbitales* sur X.

Nous montrons ici que l'hypothèse de Riemann est équivalente à certaines conditions portant sur des espaces de formes toriques, construits à partir des séries d'Eisenstein, les *paquets d'ondes toriques*. De plus, nous définissons un espace de Hilbert et un opérateur auto-adjoint sur cet espace, dont le spectre est égal à l'ensemble des zéros critiques de la fonction zêta de Dedekind de K.

1. Introduction

1.1. Formules explicites

Dans les mémoires fondamentaux de Bernhard Riemann sur les nombres premiers [5-8], on trouve de nombreuses fonctions spéciales introduites ici pour la première fois. Nous nous référons à [2-4,9] pour une analyse détaillée des sujets qui ont émergé de ce travail, le seul écrit par Riemann sur la théorie des nombres. Plutôt qu'une annonce de résultats, cet article de dix pages est un programme complet sur l'investigation du comportement de la distribution des nombres premiers ; rappelons que le théorème des nombres premiers, à savoir

$$\pi(x) \sim \frac{x}{log\ x}$$

n'était pas prouvé à l'époque. Ici $\pi(x) = \#\{p \in P \,|\, p \leq x\}$, où P est l'ensemble des nombres premiers. Tout d'abord, Riemann remplace P par l'ensemble plus grand

$$Q = \{2, 3, 4, 5, 7, 9, 11, 13, 16, 17, ...\}$$

des puissances premières, et définit

$$\Pi(x) = \#\{q \in Q \,|\, q \leq x\},$$

Journal of Computational and Applied mathematics, 160 (2003) 175-190.
Reçu le 21 septembre 2002, reçu sous forme révisée le 21 mars 2003.
Gilles Lachaud travaille à l'Institut de Mathématiques de Luminy, Luminy Case 907, Marseille 13288 Cedex 9, France.
Traduction en français : Denise Vella-Chemla, avec Google traduction, avril 2024.

convenablement normalisé à des valeurs entières, de telle manière que

$$\Pi(x) = \pi(x) + \frac{1}{2}\pi(x^{\frac{1}{2}}) + \frac{1}{3}\pi(x^{\frac{1}{3}}) + \cdots.$$

La *fonction zêta*, définie par les expressions

$$\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1 - 1/p^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

qui sont à la fois convergentes pour $\mathfrak{Re}(s) > 1$ et divergentes pour $s = 1$, admet un prolongement analytique sur tout le plan complexe ; elle n'a qu'un seul pôle, situé au point $s = 1$ et l'*équation fonctionnelle* suivante est vérifiée :

$$\xi(s) = \xi(1-s), \quad \xi(s) = \pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s),$$

où $\Gamma(s)$ est la fonction Gamma d'Euler. En écrivant

$$\log \zeta(s) = s\int_1^{\infty} x^{-s-1}\Pi(x)dx \quad (\mathfrak{Re}\, s > 1)$$

et par inversion de Mellin (on doit à Riemann la découverte de la transformation de Mellin), il en déduit la *formule explicite*

$$\Pi(x) = \mathrm{Li}(x) - \sum_{\rho}{}' \mathrm{Li}(x^{\rho}) + \int_x^{\infty} \frac{1}{x^2-1}\frac{\mathrm{d}x}{x \log x} + \log\frac{1}{2} \tag{1}$$

avec les notations suivantes : ρ parcourt l'ensemble

$$\mathscr{R} = \{\rho \in \mathbb{C} \,|\, \zeta(\rho) = 0 \quad \text{et} \quad 0 \leq \mathfrak{Re}(s) \leq 1\}$$

La fonction $\mathrm{Li}(x)$ est le *logarithme intégral* : si $\mathfrak{Re}\, s > 0$ et $x > 1$ alors

$$\mathrm{Li}(x^s) = \int_0^x \frac{z^{s-1}}{\log z}\mathrm{d}z.$$

La convergence du côté droit est conditionnelle et la sommation doit être effectuée comme suit :

$$\sum_{\rho \in \mathscr{R}}{}' \Phi(x^{\rho}) = \lim_{T\to\infty} \sum_{|\mathfrak{Im}\rho| \leq T} \Phi(x^{\rho}).$$

Dans le même mémoire, on trouve l'*hypothèse de Riemann* (HR) : les zéros de $\zeta(s)$ dans $\mathscr{R}$ sont sur la *droite critique*

$$L = \left\{ s \in \mathbb{C} \,|\, \mathfrak{Re}(s) = \frac{1}{2} \right\}.$$

Riemann déduit alors de (1) par des considérations heuristiques que si HR est vraie, alors

$$\Pi(x) = \mathrm{Li}\ x + \mathrm{O}(x^{1/2}\log\ x),$$

une forme forte du théorème des nombres premiers. La formule (1), qui montre la relation intrinsèque entre les deux ensembles $\mathcal{Q}$ et $\mathscr{R}$, est un cas particulier de la *formule générale explicite de Guinand-Weil* ; voici la version de Bombieri [1]. Soit $\Lambda(n)$ la fonction de von Mangoldt :

$$\Lambda(n) = \log p \quad \text{if } n \text{ est une puissance de } p \text{ et } \Lambda(n) = 0 \text{ partout ailleurs.}$$

Si $\mathfrak{Re}(s) > 1$ alors

$$-\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}.$$

Alors pour une classe suffisamment régulière de fonctions de test,

$$\widetilde{u}(0) + \widetilde{u}(1) - {\sum_{\rho\in\mathscr{R}}}' \widetilde{u}(\rho) = \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n)[u(n) + u^*(n)] + W_\infty(u), \tag{2}$$

où

$$\widetilde{u}(s) = \int_0^\infty u(t) t^{s-1} dt$$

est la *transformée de Mellin* de u, où

$$u^*(t) = \frac{1}{t} u\left(\frac{1}{t}\right)$$

et où $W_\infty(u)$ est la partie finie d'une intégrale divergente :

$$W_\infty(u) = (\log 4\pi + \gamma)u(1) + \int_1^\infty \{u(t) + u^*(t) - \frac{2}{t}u(1)\}\frac{t\ \mathrm{d}t}{t^2-1},$$

où $\gamma = 0.577...$ est la constante d'Euler. Les côtés droit et gauche de (2) sont respectivement appelés *côté spectral* et *côté arithmétique* de la formule explicite. La formule (1) peut être formellement déduite de (2) ; le point de départ est d'utiliser la fonction u telle que $u(t) = 1/\log t$ si $1 < t < x$, et $u(t) = 0$ partout ailleurs.

La formule explicite (2) peut être vue sous un autre point de vue. Pour cela, introduisons la fonction de Chebyshev

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{x} \Lambda(n).$$

La formule explicite

$$\psi(x) = x - {\sum_{\rho\in\mathscr{Z}}}' \frac{x^\rho}{\rho} - \log 2\pi - \frac{1}{2}\log\left(1 - \frac{1}{x^2}\right), \tag{3}$$

est obtenue à partir de (2) en prenant $u(t) = 1$, si $1 < t < x$, et $u(t) = 0$ partout ailleurs. Nous calculerons la dérivée de $\psi(x)$ dans l'espace $\mathscr{D}'(\mathbb{R}_+^\times)$ des distributions sur $\mathbb{R}_+^\times$. Rappelons que toute fonction f sur $\mathbb{R}_+^\times$ donne lieu à une distribution $\langle f\rangle \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}_+^\times)$ définie par

$$\langle f\rangle(\varphi) = \langle f, \varphi\rangle = \int_0^\infty f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x$$

pour toute fonction C^∞ à support compact contenu dans $\mathbb{R}_+^\times$. La dérivée $\langle f\rangle'$ de $\langle f\rangle$ et la multiplication de $\langle f\rangle$ par une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}_+^\times$ sont définies comme d'habitude. Avec ces notations, on peut écrire

$$\langle\psi\rangle' = (\log x)\langle\Pi\rangle'$$

et d'après (3) cette dérivée peut s'exprimer comme une série convergente dans $\mathscr{D}'(\mathbb{R}_+^\times)$:

$$\langle\psi\rangle' = \langle 1\rangle - \frac{1}{\sqrt{x}}\sum_{\gamma\in\mathcal{Z}}\langle\cos(\gamma\,\log x)\rangle - \left\langle\frac{1}{x(x^2-1)}\right\rangle \tag{4}$$

où

$$\mathscr{Z} = \left\{\gamma\in\mathbb{C}\,|\,\zeta\left(\frac{1}{2}+i\gamma\right)=0\quad\text{et}\quad\Big|\mathfrak{Im}\;\lambda\Big| = \frac{1}{2}\right\}.$$

Notons au passage que nous n'avons pas vraiment besoin de théorie des distributions : la dérivée $\langle\psi\rangle'$ peut aussi être définie comme une densité dans la *théorie de l'intégration de Riemann* ! Peut-être que Riemann a construit tous les outils, et que l'intégrale de Lebesgue n'est pas nécessaire pour la preuve de HR.

1.2. Opérateurs dans les espaces de Hilbert

Si on regarde la distribution (4), on voit qu'il s'agit d'une *série trigonométrique* et qu'elle apparaît comme un *signal*, une série d'*états propres* ou de *vibrations propres* d'un système mystérieux et hypothétique dont le spectre est $\mathscr{Z}$. Les états de ce système devraient être donnés par les fonctions

$$f(x) = \sum_{\gamma\in\mathcal{X}} c_\gamma x^{i\gamma}$$

et un opérateur du système est alors donné par

$$Hf(x) = {\sum_{\gamma\in\mathcal{Z}}}' u(\gamma)c_\gamma x^{i\gamma}$$

de telle sorte que

$$\operatorname{Spec} H = \{h(\gamma)|\gamma\in\mathscr{Z}\}$$

et

$$\operatorname{Trace} H = \sum_{\gamma\in\mathscr{Z}} h(\gamma)$$

Un tel système donnerait une interprétation du côté spectral de la formule explicite comme une trace. Dans ce cercle d'idées, André Weil a prouvé que HR est équivalente à la positivité de la distribution définie par n'importe quel côté de (2) ; notons le signe moins du côté gauche.

Dans ses travaux sur les équations intégrales, David Hilbert énonce le résultat suivant : *un opérateur normal non borné D d'un espace de Hilbert $\mathscr{H}$ est auto-adjoint si et seulement si son spectre* Spec D*, qui est un sous-ensemble fermé du plan complexe, est inclus dans la droite réelle.* Et il aurait dit : "Et avec ce théorème, Messieurs, nous prouverons l'hypothèse de Riemann". La même idée apparaît dans les papiers de Pólya. Dans ce cercle d'idées, il existe deux approches de l'hypothèse de

Riemann.

On peut essayer ce qui suit : définir un espace de Hilbert $\mathscr{H}$ et un opérateur fermé et non borné D dans $\mathscr{H}$, de domaine dense, tel que

$$\operatorname{Spec} D = \mathscr{Z},$$

prouver alors que Spec D est inclus dans la droite réelle (cette condition est par exemple remplie si D est auto-adjoint). Bien entendu, il existe des réponses tautologiques aux constructions de tels couples $(D, \mathscr{H})$, en considérant par exemple

$$\mathscr{H} = \oplus_\gamma \mathscr{H}_\gamma, \qquad \dim \mathscr{H} = 1, \qquad Dx_\gamma = \gamma x_\gamma \quad \text{si} \;\; x_\gamma \in \mathscr{H}_\gamma$$

ou, comme dans la discussion ci-dessus, $\mathscr{H}$ pourrait être l'espace des fonctions

$$f(x) = \sum_{\gamma \in \mathcal{Z}} c_\gamma x^{i\gamma}, \quad \sum_{\gamma \in \mathcal{Z}} |c_\gamma|^2 < \infty, \quad \text{et} \quad Dx = -ix\frac{d}{dx}$$

(si $\mathscr{Z} \subset \mathbb{R}$, $\mathscr{H}$ est l'espace des *fonctions presque-périodiques de Besicovitch sur* $\mathbb{R}_+^\times$) ; mais ces constructions n'apportent pas beaucoup d'informations ! Dans son article fondamental [12], Alain Connes inverse le processus : l'idée est de définir un espace de Hilbert $\mathscr{H}$ et un opérateur fermé non borné D dans $\mathscr{H}$ tel que

$$\operatorname{Spec} D = \mathscr{Y}$$

où

$$\mathscr{Y} = \mathscr{Z} \cap \mathbb{R} = \left\{ \gamma \in \mathbb{R} \,|\, \zeta\left(\frac{1}{2} + i\gamma\right) = 0 \right\}$$

puis d'essayer de prouver que $\operatorname{Spec} D = \mathscr{Z}$ à travers une analyse de la trace de la représentation correspondante des fonctions de test, afin d'être comparée à la formule explicite. Un tel couple $(D, \mathscr{H})$ est appelé un *espace de Pólya-Hilbert*. Il est intéressant d'observer que le signe moins dans la formule explicite indique que l'espace de Pólya-Hilbert fournissant la réalisation spectrale des zéros doit apparaître comme le dernier terme d'une séquence exacte d'espaces de Hilbert,

$$0 \to \mathscr{H}_0 \to \mathscr{H}_1 \to \mathscr{H} \to 0.$$

On peut également définir l'espace de Pólya-Hilbert comme

$$\mathscr{H} = \mathscr{H}_1 \ominus \mathscr{H}_0,$$

puisque c'est le dual de $\mathscr{H}$, et on doit lire la formule trace sur

$$\mathscr{H}_0 = \mathscr{H}_1 \ominus \mathscr{H}.$$

Citons [12] : "L'espace de Pólya-Hilbert doit apparaître sur son opposé $\ominus\mathscr{H}$. En d'autres termes, l'interprétation spectrale des zéros de la fonction zêta de Riemann devrait se faire comme un *spectre d'absorption* plutôt que comme un spectre d'émission, pour emprunter le langage de la spectroscopie".

2. Un espace de Pólya-Hilbert sur la demi-droite

2.1. Série thêta

Nous décrivons maintenant une version simplifiée de la construction de Connes. Cette construction repose sur un résultat-clé, apparaissant déjà dans les mémoires de Riemann, qui exprimait la fonction zêta comme la transformée de Mellin de la série thêta de Jacobi ; André Weil [10] a retrouvé les mêmes calculs dans un manuscrit d'Eisenstein. Cette construction a été généralisée par Müntz en 1922 [9, p. 28] dans la proposition suivante. Si φ appartient à l'espace de Schwartz $\mathscr{S}(\mathbb{R})$, la fonction

$$\vartheta(\varphi)(x) = x^{1/2} \sum_{n \neq 0} \varphi(nx), \quad x > 0$$

décroît rapidement à l'infini. La transformée de Fourier-Mellin

$$\widehat{\vartheta(\varphi)}(\lambda) = \int_0^\infty \vartheta(\varphi)(x) x^{i\lambda} \mathrm{d}^\times x$$

définie si $\mathfrak{Im}\,\lambda < -1/2$, admet un prolongement analytique à l'ensemble du plan complexe, avec au pire des pôles simples $\lambda = \pm i/2$.

Proposition 1. *Si $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, et si $\lambda \in \mathbb{C}$, alors*

$$\widehat{\vartheta(\varphi)}(\lambda) = \zeta\left(\frac{1}{2} + i\lambda\right) \Gamma\left(\varphi, \frac{1}{2} + i\lambda\right), \tag{5}$$

où $\Gamma(\varphi, s)$ est la transformée de Mellin de $\varphi(t) + \varphi(-t)$.

Cela montre que $\widehat{\vartheta(\varphi)}$ disparaît aux zéros de $\zeta(1/2 + i\lambda)$: ces zéros sont des *valeurs spectrales manquantes*. On peut donc espérer qu'ils apparaîtront dans l'orthogonal de l'espace engendré $\vartheta(\varphi)$ dans un espace approprié.

2.2. L'orthogonal de la série thêta

Malheureusement, l'espace $L^2(\mathbb{R}_+^\times)$ n'est pas pratique : il n'y a pas de spectre discret à l'intérieur. Si $\delta \in \mathbb{R}$, désignons par $L^2_\delta(\mathbb{R}_+^\times) = L^2_\delta$ l'espace des fonctions sur $\mathbb{R}_+^\times$ telles que

$$\|f\|^2 = \int_0^\infty \left|f(x)^2\right| \left(1 + \log^2 x\right)^{\delta/2} \mathrm{d}^\times x < +\infty.$$

Supposons maintenant $\delta > 1$. Les espaces L^2_δ et $L^2_{-\delta}$ sont mutuellement duaux par le produit scalaire

$$(f, g) = \int_0^\infty f(x)\overline{g(x)} \mathrm{d}^\times x.$$

La transformée de Fourier-Mellin convertit la partie supérieure du diagramme ci-dessous en sa partie inférieure

$$\begin{array}{ccccccccc} & & L^2_\delta & \subset & L^2 & \subset & L^2_{-\delta}, & & \\ & & & & \downarrow & & & & \\ \mathscr{S}(\mathbb{R}) & \subset & H^{\delta/2}(\mathbb{R}) & \subset & L(R) & \subset & H^{-\delta/2}(\mathbb{R}) & \subset & \mathscr{S}'(\mathbb{R}), \end{array}$$

où $H^m(\mathbb{R})$ est l'espace de Sobolev d'ordre m. Si $f \in L^2_\delta$ et si $\psi \in L^2_{-\delta}$, alors

$$\int_0^\infty f(x)\psi(x)d^\times x = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\lambda)\,\mathrm{d}\widehat{\psi}(\lambda), \tag{6}$$

en utilisant la notation de Leibniz pour les distributions.

Soit $\mathscr{S}(\mathbb{R})_0$ le sous-espace de $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ constitué des fonctions telles que

$$\mathscr{F}\varphi(0) = \varphi(0) = 0.$$

Soit Θ le sous-espace de L^2_δ généré par la série $\vartheta(\varphi)$, où $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})_0$. Grâce à l'introduction de δ, il existe effectivement des valeurs spectrales discrètes dans $\Theta^\perp$:

Théorème 2. *La distribution $\psi \in L^2_{-\delta}$ est dans $\Theta^\perp$ si et seulement si le support de $\widehat{\psi}$ est inclus dans l'ensemble localement fini $\mathscr{Y}$. Plus précisément, si $\gamma \in \mathscr{Y}$, appelons $m(\gamma)$ l'ordre du zéro correspondant ; alors tout $\psi \in \Theta^\perp$ peut s'écrire comme une série convergente dans $L^2_{-\delta}$:*

$$\psi(x) = \sum_\gamma \psi_\gamma, \qquad \psi_\gamma(x) = \sum_{j<m(\gamma,\delta)} c_{\gamma j}(log\ x)^j x^{i\gamma},$$

où $m(\gamma,\delta) = \min(m(\gamma), (\delta-1)/2)$. En particulier, si $\delta < 3$ alors $\widehat{\psi}$ est une mesure et

$$\psi(x) = \sum_\gamma c_\gamma x^{i\gamma}.$$

Notons que si $\delta < 3$, on retrouve l'espace tautologique des fonctions presque périodiques !

Preuve. De la Proposition 1 et de la formule (6), on obtient

$$\begin{aligned}
(\psi|\vartheta(\overline{\varphi})) &= \int_0^\infty \psi(x)\vartheta(\varphi)(x)\,\mathrm{d}^\times x,\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \widehat{\vartheta(\varphi)}(\lambda)\mathrm{d}\widehat{\psi}(\lambda),\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \zeta\left(\frac{1}{2}+i\lambda\right)\Gamma\left(\varphi,\frac{1}{2}+i\lambda\right)\,\mathrm{d}\widehat{\psi}(\lambda).
\end{aligned}$$

Puisque $\Gamma\left(\varphi,\frac{1}{2}+i\lambda\right)$ ne disparaît jamais, on voit que $\psi \in L^2_{-\delta}$ si et seulement si

$$\zeta\left(\frac{1}{2}+i\lambda\right)\,\mathrm{d}\widehat{\psi}(\lambda) = 0$$

dans l'espace $H^{-\delta/2}(\mathbb{R})$. Si $\widehat{\psi}$ a un support compact, cela signifie qu'il s'agit d'une combinaison linéaire finie de dérivées de mesures de Dirac

$$\delta^{(j)}_{(\gamma)}, \quad \gamma \in \mathscr{Y}, \quad 0 \le j < \frac{\delta-1}{2}, \quad j < m(\gamma).$$

De plus, si $\delta < 3$, alors $j = 0$ et $\widehat{\psi}$ est une somme finie de mesures de Dirac. Il suffit maintenant de remarquer que les distributions à support compact sont denses dans $H^{-\delta/2}(\mathbb{R})$. $\square$

La représentation régulière de $\mathbb{R}_+^\times$ dans L^2_δ induit un semi-groupe d'opérateurs

$$[V(t)f](x) = f(e^t x), \quad t \in \mathbb{R}_+^\times, \quad x \in \mathbb{R}_+^\times$$

qui est de classe (C_0), puisqu'il satisfait l'estimation de croissance

$$\|V(t)\| = O(t)^{\delta/2}.$$

L'espace quotient $\mathscr{H}_\delta = L^2_\delta/\Theta$ apparaît comme le dernier terme de la suite exacte

$$0 \to \Theta \to L^2_\delta(\mathbb{R}_+^\times) \to \mathscr{H}_\delta \to 0.$$

De plus,

$$\mathscr{H}_\delta^* = \Theta^\perp \subset L^2_{-\delta}.$$

L'espace Θ est invariant sous le semi-groupe V, et on obtient de cette manière un semi-groupe W_δ dans $\mathscr{H}_\delta$ accompagné d'un générateur infinitésimal D_δ, défini par

$$D_\delta f = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{W_\delta(\epsilon) f - f}{\epsilon}.$$

Le spectre de D_δ peut être calculé dans $\Theta^\perp$ à travers le semi-groupe transposé ${}^tW_\delta$: on trouve que

$${}^tD_\delta f = ix \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$$

si $f \in \Theta^\perp$ est suffisamment régulière. Du Théorème 2, on obtient le :

Théorème 3. *Le spectre de D_δ est localement fini, et son ensemble de valeurs propres est égal à $\mathscr{Y}$. La multiplicité de $\gamma \in \mathscr{Y}$ est égale à $m(\gamma, \delta)$. Le couple $(\mathscr{H}_\delta, D_\delta)$ est un espace de Pólya-Hilbert.*

On remarque que l'opérateur D_δ n'est ni auto-adjoint, ni normal, puisque

$${}^tD_\delta^* f = ix \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} - \frac{i}{2} \frac{\delta \log x}{1 + (\log x)^2} f.$$

Le caractère de W_δ est

$$\operatorname{Trace} W_\delta(u) = \sum_{\gamma \in \mathscr{Y}} \widetilde{u}\left(\frac{1}{2} + i\gamma\right),$$

où

$$W_\delta(u) = \int_{-\infty}^{\infty} W_\delta(t) u(e^t) dt,$$

et où $\widehat{u}$ est la transformée de Mellin de la fonction de test u. La stratégie proposée par Alain Connes est alors de prouver que

$$\widetilde{u}(0) + \widetilde{u}(1) - \operatorname{Trace} W_\delta(u)$$

est égal au côté arithmétique de la formule explicite, et il fournit de très bons arguments pour atteindre cet objectif.

3. Formes toriques : corps quadratiques imaginaires

3.1. Séries d'Eisenstein

Soit H le demi-plan supérieur, i.e. l'ensemble des $z = x + iy$ tel que $y > 0$. Si $s \in \mathbb{C}$ et si $\mathfrak{Re}\, s > l$, les *séries d'Eisenstein* $\mathbf{E}(z, s)$ sont les fonctions spéciales définies par

$$\mathbf{E}(z, s) = \sum_{(m,n)=1} \frac{y^s}{|cz + d|^{2s}} = \sum_{(\Gamma \cap P)\backslash\Gamma} (\mathfrak{Im}\, \gamma z)^s,$$

où $\Gamma = SL(2, \mathbb{Z})$ est le groupe modulaire et

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Alors $\mathbf{E}(\gamma z, s) = \mathbf{E}(z, s)$ si $\gamma \in \Gamma$, et $\mathbf{E}(z, s)$ définit une fonction sur la *surface modulaire* $X = \Gamma\backslash H$. Les fonctions

$$\mathbf{E}^\times(z, s) = \xi(2s)\mathbf{E}(z, s)$$

admettent un prolongement méromorphe sur tout le plan, et sont régulières sauf pour les pôles simples en $s = 0$ et 1. De plus, $\mathbf{E}(z, s)$ satisfait l'équation fonctionnelle suivante :

$$\mathbf{E}^\times(z, 1 - s) = \mathbf{E}^\times(z, s)$$

c'est-à-dire,

$$\mathbf{E}(z, s) = c(s)\mathbf{E}(z, 1 - s), \quad \text{où} \quad c(s) = \frac{\xi(2(1 - s))}{\xi(2s)}.$$

Les séries d'Eisenstein ne sont pas harmoniques, mais sont des fonctions propres de l'opérateur de Laplace de H:

$$\Delta = -y^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)$$

notamment

$$\Delta\mathbf{E}(z, s) = s(1 - s)\mathbf{E}(z, s).$$

3.2. Mesures associées aux corps quadratiques imaginaires

Soit K un corps quadratique imaginaire de discriminant $D < 0$. L'*ensemble de Gauss* de K est l'ensemble des nombres complexes

$$z = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$$

tels que

$$a > 0, \quad (a, b, c) = 1, \quad b^2 - 4ac = D, \quad a, b, c \in \mathbb{Z}$$

et appartenant au domaine fondamental $\mathscr{F}$:

$$-\frac{1}{2} < \mathfrak{Re}\ z \leq \frac{1}{2}, \quad |z| < 1 \text{ si } -\frac{1}{2} < \mathfrak{Re}\ z < 0, \qquad\qquad |z| \geq 1 \text{ si } 0 \leq \mathfrak{Re}\ z \leq \frac{1}{2}$$

L'application

$$z \mapsto \mathfrak{a}_z = \mathbb{Z} \oplus z\mathbb{Z}$$

induit une correspondance biunivoque de l'ensemble de Gauss de K vers le *groupe de classes* Cl_K de K, et le nombre d'éléments dans l'ensemble de Gauss est égal au numéro de classe h_K de K. On note $C \mapsto z_C$ l'application réciproque de Cl_K vers l'ensemble Gauss. Introduisons maintenant la mesure à support fini sur H :

$$\oint F(z)\mathrm{d}m(z) = \sum_{C \in \mathrm{Cl}_K} F(z_C).$$

Proposition 4 (formule de Hecke pour les corps quadratiques imaginaires). *Soit K un corps quadratique imaginaire de discriminant $D < 0$, et $\zeta_K(s)$ la fonction zêta de Dedekind de K. Si $s \neq 1$, alors*

$$\zeta(2s) \oint \mathbf{E}(z,s)\mathrm{d}m(z) = \frac{w}{2}\left(\frac{D}{4}\right)^{s/2} \zeta_K(s),$$

où w est l'ordre du groupe des racines de l'unité dans K.

Preuve (Siegel [16]). Considérons n'importe quel idéal $\mathfrak{b} \in C^{-1}$. Si $\mathfrak{a} \in C$, l'application

$$\xi \mapsto (\xi)\mathfrak{b}^{-1}$$

induit une bijection $\mathfrak{b}/W \to 'a$, où W est l'ensemble des racines de l'unité dans K. Par conséquent,

$$\zeta(C,s) = \sum_{\mathfrak{a} \in C} \frac{1}{N(\mathfrak{a})^s} = \frac{N(\mathfrak{b})^s}{w} \sum_{\xi \in \mathfrak{b}} \frac{1}{N(\xi)^s}.$$

Soit $z_C = z$ le point de Gauss d'image C^{-1}, de telle façon que $\mathfrak{b} = \mathbb{Z} \oplus z_c\mathbb{Z}$. Alors

$$\begin{vmatrix} 1 & z_C \\ 1 & \overline{z}_C \end{vmatrix} = |\overline{z}_C - z_C| = 2y_C = N(\mathfrak{b})\sqrt{D}.$$

Ainsi,

$$\zeta(C,s) = \frac{1}{w}\left(\frac{D}{4}\right)^{-s/2} \sum_{m,n}{}' \frac{y_C^s}{|mz_C + n|^{2s}}$$

Maintenant

$$\zeta(2s)\mathbf{E}(z_C,s) = \frac{1}{2}\sum_{m,n}{}' \frac{1}{|mz_C + n|^{2s}},$$

Ainsi

$$\zeta(2s)\mathbf{E}(z_C,s) = \frac{w}{2}\left(\frac{D}{4}\right)^{s/2} \mathfrak{a}^{-s} \frac{1}{N(\mathfrak{a})^s}\zeta(C,s),$$

d'où le résultat découle par sommation. $\square$

3.3. Formes toriques

D'après Don Zagier [18], on dit que F est une forme torique de K si

$$\oint F(z)\,\mathrm{d}m(z) = 0.$$

Un *paquet d'ondes* (de Eisenstein) est une combinaison linéaire (finie) de séries d'Eisenstein. Plus précisément, l'espace $E(X)$ des paquets d'ondes est constitué de fonctions

$$W(\mu)(z) = \int_B \mathbf{E}(z,s)\,\mathrm{d}\mu(s) = \sum c_i \mathbf{E}(z,s_i) \qquad (z \in H),$$

où $\mu = \sum c_i \delta(s_i)$ appartient à l'espace $\mathscr{M}_2(B)$ des mesures à support fini dans la bande ouverte

$$B = \{s \in \mathbb{C} \,|\, 0 < \mathfrak{Re}(s) < 1\}$$

ce support étant supposé disjoint de l'ensemble des pôles de $\mathbf{E}(z,s)$. Le *spectre de* F est le support de μ. La formule de Hecke implique la :

Proposition 5. $F \in E(X)$ *est torique si et seulement si*

$$\operatorname{Spec} F \subset \{s \in B \,|\, \zeta_K(s) = 0\}.$$

La morale est que nous pouvons utiliser des paquets d'ondes toriques pour construire un espace de Pólya-Hilbert pour la fonction zêta de Dedekind de K !

4. Un espace de Pólya-Hilbert automorphe

4.1. Le groupe des classes d'idèles

Soit K un corps global. Si l'on souhaite généraliser les constructions précédentes à la fonction zêta de K et aux L-fonctions, le cadre naturel pour de telles constructions est l'anneau $\mathbb{A}_K$ des adèles de K [17]. En fait, le point de départ de la théorie de Connes repose sur la géométrie de l'espace non-commutatif

$$K^\times \backslash \mathbb{A}_K.$$

Soit $C_K = K^\times \backslash \mathbb{A}_K^\times$ le groupe des classes d'idèles de K. Alors, on définit l'application ϑ de l'espace de Schwartz-Bruhat $\mathscr{S}(\mathbb{A}_K)$ vers $L^2(C_K)$ donnée par

$$\vartheta(\varphi)(x) = |x|_{\mathbb{A}}^{1/2} \sum_{q \in K^\times} \varphi(qx), \qquad x \in C_K,$$

et les calculs de la section 2.1 constituent une dégradation de cette construction.

De plus, la surface modulaire $\Gamma\backslash H$ est un quotient de $\mathrm{G}L_2(\mathbb{Q})\backslash \mathrm{G}L_2(\mathbb{A})$, où $\mathbb{A}$ est l'anneau d'adèles de $\mathbb{Q}$, et si l'on veut généraliser à tout corps numérique la construction de la section précédente, il faut remplacer $\mathrm{G}L_2$ par $\mathrm{G}L_n$, comme nous le verrons.

Supposons que K soit un corps de nombres algébriques de degré $n > 1$ et soit $\mathfrak{D}$ l'anneau des entiers de K. Soit $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ avec $\alpha_1 = 1$, une *base fondamentale* de K, i.e., une base telle que l'application

$$\iota : u = (u_1, ..., u_n) \mapsto u_1\alpha_1 + \cdots + u_n\alpha_n$$

est un isomorphisme de $\mathbb{Z}^n$ dans $\mathfrak{D}$. La *représentation régulière droite* π de K dans $\mathbb{Q}^n$ est définie comme suit : si $\xi \in K^\times$, on note $\rho(\xi)$ la multiplication par ξ, et on pose

$$^t\pi(\xi).u = \iota^{-1} \circ \rho(\xi) \circ \iota(u).$$

La représentation π est "algébrique" et son image est un tore maximal T du groupe algébrique $G = \mathrm{G}L_n$ (T n'est pas dédoublé sur $\mathbb{Q}$). Par exemple, si K est quadratique, de discriminant $D \equiv 2$ ou 3 (mod 4) et si $(\alpha_1, \alpha_2) = (1, \sqrt{D})$, alors

$$\pi(x + y\sqrt{D}) = \begin{pmatrix} x & y \\ Dy & x \end{pmatrix}.$$

Si $G_\mathbb{A}$ est le groupe des points de G à valeurs dans $\mathbb{A}$, la représentation induit un isomorphisme

$$C_k \xrightarrow{\sim} T_\mathbb{Q} \backslash T_\mathbb{A} \subset G_\mathbb{Q} \backslash G_\mathbb{A}.$$

4.2. Série d'Eisenstein

La série d'Eisenstein admet la généralisation suivante. Désignons par

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} g' & x \\ 0 & t \end{pmatrix} \right\}$$

le sous-groupe parabolique maximal standard de G de type $(n-1, 1)$, avec

$$g' \in \mathrm{G}L_{n-1}, \quad t \in G_m = \mathrm{G}L_l, \quad x \in A^{n-1}.$$

Le module de $P_\mathbb{A}$ est

$$\delta_p(p) = \left| \frac{t^{n-1}}{\det\, g'} \right|_\mathbb{A}.$$

Maintenant $G_\mathbb{A} = P_\mathbb{A}\mathbf{K}$, où $\mathbf{K}$ est le sous-groupe compact maximal habituel de $G_\mathbb{A}$. Si $g = p\kappa \in G_\mathbb{A}$ avec $p \in P$ et $\kappa \in \mathbf{K}$, on pose $\delta_P(g) = \delta_P(p)$. *La série d'Eisenstein normalisée* correspondant à P est

$$\mathbf{E}(g, s) = \sum_{\gamma \in P_\mathbb{Q} \backslash G_\mathbb{Q}} \delta_P(\gamma g)^s, \quad g \in G_\mathbb{A}.$$

Cette série est convergente si $\mathfrak{Re}(s) > 1$ et appartient à l'espace $C(X)$ des fonctions continues sur la variété modulaire

$$X = G_\mathbb{Q} Z_\mathbb{A} \backslash G_\mathbb{A} / \mathbf{K},$$

où Z est le centre de G. La série $\mathbf{E}(g, s)$ admet un prolongement méromorphe sur tout le plan : la fonction $\xi(ns)\mathbf{E}(g, s)$ est régulière sauf pour les pôles simples en $s = 0$ et $s = 1$. L'équation fonctionnelle suivante est vérifiée :

$$\mathbf{E}(g, s) = c(s)\mathbf{E}({}^t g^{-1}, 1 - s), \quad \text{où} \quad c(s) = \xi(n(1 - s))/\xi(ns).$$

De plus, si Δ est l'*opérateur de Laplace* de X (un opérateur différentiel du second ordre qui est un multiple approprié de l'opérateur de Casimir de l'algèbre de Lie de G), et si s n'est pas un pôle, alors

$$\Delta\mathbf{E}(g, s) = s(1 - s)\mathbf{E}(g, s).$$

4.3. Formes toriques

Soit U_T le sous-groupe compact maximal du tore adélique $T_{\mathbb{A}}$. Le groupe $T_{\mathbb{Q}}Z_{\mathbb{A}}\backslash T_{\mathbb{A}}/U_T$ est une extension du *groupe de classes* Cl_K de K par un tore topologique (produit de cercles) de dimension $r = r_1 + r_2 - 1$, où r_1 et r_2 sont respectivement le nombre de réels et places imaginaires de K :

$$1 \to \mathbf{SO}(2, \mathbb{R})^r \to T_{\mathbb{Q}}\mathbb{Z}_{\mathbb{A}}\backslash T_{\mathbb{A}}/U_T \to \mathrm{Cl}_K \to 1.$$

Si $F \in C(X)$, le *terme constant* de F est

$$\oint F(hg)\,\mathrm{d}h = \int_{T_{\mathbb{Q}}Z_{\mathbb{A}}\backslash T_{\mathbb{A}}/U_T} F(hg)\,\mathrm{d}h$$

et on dit que $F \in C(X)$ est une forme torique si le terme constant de F est égal à zéro pour tout $g \in G_{\mathbb{A}}$, on note $T(X)$ l'espace de telles formes.

Soit ξ une primitive de K, et $\mathfrak{c}$ la classe de conjugaison de $\pi(\xi)$ dans $G_{\mathbb{Q}}$. La *série orbitale* d'une fonction de test $u \in C_c(Z_{\mathbb{A}}\backslash G_{\mathbb{A}}/\mathbf{K})$ est

$$u_{\mathfrak{c}}(g) = \sum_{\gamma \in \mathfrak{c}} u(g^{-1}\gamma g).$$

La fonction $u_{\mathfrak{c}}$ a un support compact sur X. Voici une forme vague de présentation de $T(X)$ sur son opposé.

Proposition 6. *La fonction $F \in C(X)$ est une forme torique si et seulement si*

$$\int_{G_{\mathbb{Q}}Z_{\mathbb{A}}\backslash G_{\mathbb{A}}} F(g)u_{\mathfrak{c}}(g)\,\mathrm{d}g = 0$$

pour tout $u \in C_{\mathfrak{c}}(Z_{\mathbb{A}}\backslash G_{\mathbb{A}}/\mathbf{K})$.

4.4. L'espace $T^2(X)$

La formule adélique de Hecke [15] montre que $\mathbf{E}(g, s)$ est une forme torique si et seulement si $\zeta_K(s) = 0$, plus précisément :

Proposition 7. Si $g_{\mathbb{A}}$, alors

$$\oint \mathbf{E}(hg, s)\,\mathrm{d}h = \zeta_K(5)H(g, s),$$

où $\xi(ns)H(g, s)$ est holomorphe dans le demi-plan $\mathfrak{Re}\, s > 0$. De plus, il existe $g_K \in G_{\mathbb{A}}$ tel que $\xi(ns)H(g_K, s, \chi)$ ne disparaît pas dans $\mathbb{C}$.

Nous pouvons maintenant définir l'espace $E(X)$ des paquets d'ondes comme dans la section 3.3, et la proposition 7 donne la proposition 5 dans le cadre actuel.

Proposition 8. *$F \in E(X)$ est torique si et seulement si*

$$\mathrm{Spec}\, F \subset \{s \in B \,|\, \zeta_K(s) = 0\}.$$

On dit qu'un paquet d'ondes est *principal* si son spectre est contenu dans la ligne critique L, et on note $E^1(X)$ l'espace des paquets d'ondes principaux. La proposition 8 implique que $\zeta_K(s)$ satisfait HR si et seulement si tout paquet d'ondes torique est principal.

Revenons un instant au cas des corps quadratiques imaginaires. Soit $\mathscr{F}_m$ le domaine fondamental de $\Gamma\backslash H$ tronqué en $y = m$, et χ_m la fonction caractéristique de $\mathscr{F}_m$. Si $F \in C(X)$, on définit

$$\Lambda^m F = F\chi_m.$$

On note $\mathscr{A}^2(X)$ l'espace pré-hilbertien constitué des fonctions $F \in C(X)$ telles que

$$\|F\|_2^2 = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{4\log m} \int_X |\Lambda^m F(z)^2\,\mathrm{d}m(z) < +\infty.$$

L'opérateur Λ^m a été généralisé pour la variété modulaire dans [11] ; par conséquent, nous pouvons définir l'espace $\mathscr{A}^2(X)$ dans le cadre général. Soit $A^2(X)$ l'espace de Hilbert associé à $\mathscr{A}^2(X)$. Cette définition est un analogue automorphe des fonctions presque périodiques. Alors on a les résultats suivants [14,15]. Des relations de *Maass-Selberg relations*, on déduit la :

Proposition 9. Si F est un paquet d'ondes principal non nul, alors

$$0 < \|F\|_2 < +\infty,$$

et

$$E^1(X) \subset A^2(X).$$

Si $n = 2$, alors

$$E^1(X) = E(X) \cap A^2(X).$$

Théorème 10. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *Les racines de $\zeta_K(s)$ dans B se situent sur la droite critique.*

(ii) *Tout paquet d'ondes torique appartient à $A^2(X)$.*

Maintenant on note $T^2(X)$ l'espace de Hilbert qui est la fermeture de $E^1(X) \cap T(X)$ dans $A^2(X)$. Soit D l'opérateur non borné dans $T^2(X)$ défini par l'opérateur de Laplace Δ, de domaine la fermeture de $E^1(X) \cap T(X)$ pour la norme $\|\Delta F\|_2$. Soit

$$\mathscr{Y} = \{\gamma \in \mathbb{R} \,|\, \zeta_K\left(\frac{1}{2} + i\gamma\right) = 0\}.$$

Théorème 11. *L'opérateur D est auto-adjoint, et*

$$\operatorname{Spec} D = \left\{\lambda \,|\, \lambda = \frac{1}{4} + \gamma^2,\ \gamma \in \mathscr{Y}\right\}.$$

Les valeurs propres sont doubles si $n \geq 3$ et simples si $n = 2$.

En d'autres termes, $(T^2(X), D)$ est un espace de Pólya-Hilbert pour $\zeta_K(s)$ (en laissant de côté le changement de variables de γ à λ).

Il est intéressant de noter que le spectre de D prend en compte les zéros de $\zeta_K(s)$ à multiplicité uniforme. Mais malgré le fait que la fonction zêta de Dedekind d'un corps de nombres arbitraire puisse avoir plusieurs zéros, on connaît quelques familles de corps pour lesquels les zéros sont censés être simples, selon les conjectures de Serre sur la simplicité des zéros de L-fonctions à caractère irréductible [13, Conjecture 8.2.4, p. 324].

Soit $\mathfrak{A}(G)$ l'algèbre de Hecke des fonctions $u \in C_c(Z_{\mathbb{A}} \backslash G_{\mathbb{A}})$ bi-invariantes sous K et $R(u)$ la représentation régulière à droite de $\mathfrak{A}(G)$ dans $C(X)$:

$$R(u)f(x) = \int_{Z(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})} f(xy)u(y)\mathrm{d}y.$$

Si $u \in \mathfrak{A}(G)$, alors $R(u)\mathbf{E}(g,s) = \widetilde{u}(s)\mathbf{E}(g,s)$, avec la fonction entière

$$\widetilde{u}(s) = \int_{Z_{\mathbb{A}}\backslash G_{\mathbb{A}}} \delta_P(g)^s u(g)\,\mathrm{d}\,g;$$

on obtient ainsi une représentation $R^2(u)$ de $\mathfrak{A}(G)$ dans $T^2(X)$.

Corollaire 12. *Si $u \in \mathfrak{A}(G)$, alors*

$$\operatorname{Trace} R^2(u) = \sum_{\gamma \in \mathscr{Y}} \widetilde{u}\left(\frac{1}{2} + i\gamma\right)$$

où on suppose $\gamma \geq 0$ si $n = 2$.

Références

[1] E. Bombieri, Remarks on Weil's quadratic functional in the theory of prime numbers, I, Rend. Mat. Acc. Lincei 11 (9) (2000) 183-233.

[2] H.M. Edwards, Riemann's zeta function, Academic Press, New York, Dover Publications, Mineola, NY, 2001, réédition de l'édition originale de 1974.

[3] A.E. Ingham, The distribution of prime numbers, With a foreword by R. C. Vaughan, Cambridge Mathematical Library, Cambridge University Press, Cambridge, 1990, reprint of the 1932 original.

[4] S.J. Patterson, An Introduction to the Theory of the Riemann zeta-function, Studies in Advanced Mathematics, Vol. 14, Cambridge University Press, Cambridge, 1988.

[5] B. Riemann, Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse [On the Number of Prime Numbers less than a Given Quantity], Monatsber. Königl. Preuss. Akad. Wiss. Berlin, November 1859, p. 671 (voir [6], [7], [8]). Voir aussi https://www.maths.tcd.ie/pub/HistMath/People/Riemann/Zeta/ et

[6] B. Riemann, Gesammelte Mathematische Werke und Wissenschaftlicher Nachlass. Herausgegeben under Mitwirkung von Richard Dedekind, von Heinrich Weber, B.G. Teubner, Leipzig, 1892, pp. 145-153. https://www.emis.de/classics/Riemann/index.html.

[7] B. Riemann, H. Weber, R. Dedekind (Eds.), nouvellement édité par R. Narasimhan, Collected Mathematical Works, Springer, Berlin, 1990.

[8] B. Riemann, Oeuvres mathématiques, J. Gabay, Paris, 1990 (Réimpression de l'édition de 1898).

[9] E.C. Titchmarsh, in: 2nd Edition, D.R. Heath-Brown (Ed.), The Theory of the Riemann zeta-Function, The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1986.

[10] A. Weil, Prehistory of the zeta-function, Number Theory, Trace Formulas and Discrete Groups (Oslo, 1987), Academic Press, Boston, MA, 1989, pp. 1-9.

[11] J. Arthur, A trace formula for reductive groups II: applications of a truncation operator, Compositio Math. 40 (1980) 87-121.

[12] A. Connes, Trace formula in noncommutative geometry and the zeros of the Riemann zeta function, Sel. Math., New Ser. 5 (1999) 29-106.

[13] D. Goss, Basic structures of function field arithmetic, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, (3) Vol. 35, Springer, Berlin, 1996.

[14] G. Lachaud, Zéros des fonctions L et formes toriques, C.R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 335 (2002) 219-222.

[15] G. Lachaud, Zéros des fonctions L et formes toriques, à paraître.

[16] C.L. Siegel, Advanced analytic number theory, Studies in Math, Vol. 9, T.I.F.R., Bombay, 1980.

[17] A. Weil, Basic Number Theory, Grund. math. Wiss. Einzel., Band 144, Springer, Berlin, 1967.

[18] D. Zagier, Eisenstein Series and the Riemann zeta function, Automorphic Forms, Representation Theory and Arithmetic, Studies in Math. Vol. 10, T.I.F.R., Bombay, 1981, pp. 275-301.