

# CHAPITRE QUATRE

## ARITHMÉTIQUE

Voyant qu'il n'y a rien (mes chers étudiants bien-aimés en mathématiques)  
qui soit si gênant pour la pratique des mathématiques,  
ni qui gêne et gêne encore les calculateurs,  
que les multiplications, les divisions,  
les extractions de racines carrées et cubiques de grands nombres,  
et qui, outre la dépense fastidieuse de temps qu'ils occasionnent,  
qui soit pour beaucoup d'entre eux sujets à de nombreuses erreurs glissantes,  
je commençai donc à considérer dans mon esprit  
par quel art utile et sûr,  
je pourrais supprimer ces obstacles.

– JOHN NEPAIR [NAPIER] (1616)

Je hais les additions.  
Il n'y a pas de plus grande méprise que de qualifier l'arithmétique de science exacte.  
Il y a des lois cachées des nombres, qui ne peuvent être perçues que par un esprit comme le mien.  
Par exemple, si vous additionnez une somme de bas en haut, puis de haut en bas,  
le résultat est toujours différent.

– M. P. LA TOUCHE (1878)

Je ne conçois pas qu'on puisse exiger que des multiplications soient effectuées  
au rythme de 40 000, ou même de 4 000 par heure ;  
un changement aussi révolutionnaire que l'échelle octonaire ne devrait pas être imposé  
à l'humanité complète pour le seul bien de quelques individus.

– F. H. WALES (1936)

La plupart des spécialistes en analyse numérique n'éprouvent aucun intérêt pour l'arithmétique.

– B. PARLETT (1979)

LE PRINCIPAL OBJECTIF de ce chapitre est de faire une étude minutieuse des quatre processus de base de l'arithmétique : l'addition, la soustraction, la multiplication et la division. De nombreuses personnes voient l'arithmétique comme une chose évidente que les enfants apprennent et que les ordinateurs font, mais nous verrons que l'arithmétique est un sujet fascinant avec de nombreuses

facettes intéressantes. Il est important de faire une étude complète des méthodes efficaces de calcul numérique, puisque l'arithmétique sous-tend de si nombreuses applications des ordinateurs.

L'arithmétique est, en fait, un sujet vivant qui a joué un rôle important dans l'histoire mondiale, et elle continue de se développer rapidement. Dans ce chapitre, j'analyserai les algorithmes pour faire des opérations arithmétiques sur de nombreux types de quantités, comme les nombres “à virgule flottante”, les nombres très grands, les fractions (nombres rationnels), les polynômes, et les séries de puissances ; et je discuterai également de sujets afférents tels que la conversion de racines, la factorisation des nombres, et l'évaluation des polynômes.

## 4.1. Systèmes de numération positionnelle

LA FAÇON DONT NOUS FAISONS DE L'ARITHMÉTIQUE est intimement liée à la manière dont nous représentons les nombres que nous utilisons, et donc il est approprié de commencer notre étude du sujet par une discussion des moyens principaux pour représenter les nombres.

La notation positionnelle utilisant la base  $b$  (ou la *racine*  $b$ ) est définie par la règle

$$(1) \quad \begin{aligned} & (\dots a_3 a_2 a_1 a_0 . a_{-1} a_{-2} \dots)_b \\ & = \dots + a_3 b^3 + a_2 b^2 + a_1 b^1 + a_0 + a_1 b^{-1} + a_{-2} b^{-2} + \dots ; \end{aligned}$$

par exemple,  $(520.3)_6 = 5 \cdot 6^2 + 2 \cdot 6^1 + 0 + 3 \cdot 6^{-1} = 192\frac{1}{2}$ . Notre système de numération décimale conventionnel est, bien sûr, le cas particulier quand  $b$  est égal à dix, et quand les  $a$  sont choisis parmi les “chiffres décimaux” 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ; dans ce cas, l'indice  $b$  dans (1) peut être omis.

Les généralisations les plus simples du système de numération décimale sont obtenues quand on prend pour  $b$  un entier plus grand que 1 et quand on pose la contrainte que les  $a$  soient des nombres entiers tels que  $0 \leq a_k < b$ . Cela donne les systèmes de numération standard binaire ( $b = 2$ ), ternaire ( $b = 3$ ), quaternaire ( $b = 4$ ), quinaire ( $b = 5$ ), .... En général, on pourrait prendre pour  $b$  n'importe quel nombre non nul, et on pourrait choisir les  $a$  dans n'importe quel ensemble de nombres spécifié ; cela amène à des situations intéressantes, comme nous allons le voir.

Le point qui apparaît entre  $a_0$  et  $a_{-1}$  en (1) est appelé le *point racine*. (Quand  $b = 10$ , on l'appelle aussi le point décimal, et quand  $b = 2$ , on l'appelle parfois le point binaire, etc). Les européens utilisent souvent une virgule à la place d'un point pour dénoter le point racine ; les anglais utilisaient auparavant un point en hauteur.

Les  $a$  dans (1) sont appelés les *chiffres*<sup>1</sup> de la représentation. Les chiffres  $a_k$  pour les grandes valeurs de  $k$  sont souvent dits être “plus significatifs” que les chiffres  $a_k$  pour les petites valeurs de  $k$  ; par conséquent, on fait référence au chiffre le plus à gauche ou chiffre “dominant” comme au *chiffre le plus significatif* et on fait référence au chiffre le plus à droite ou “dernier chiffre” comme au *chiffre le moins significatif*. Dans le système binaire standard, les chiffres binaires sont souvent appelés bits ; dans le système standard hexadécimal (de racine seize), les symboles hexadécimaux de zéro

---

<sup>1</sup> *symboles.*

à quinze sont habituellement dénotés par

soit 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, a, b, c, d, e, f

soit 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F.

Le développement historique des représentations numériques est une histoire fascinante, puisqu'il se développe en parallèle du développement de la civilisation elle-même. Nous serions emmenés bien loin si nous voulions examiner cette histoire en détails minutieux, mais il sera instructif de regarder les caractéristiques principales de ces développements ici.

Les premières formes de représentations numériques, que l'on trouve encore dans les cultures primitives, sont en général basées sur des groupements de doigts, piles de pierres, etc., habituellement avec des conventions spéciales à propos du fait de remplacer une pile plus grande, ou un groupe, ou disons, cinq ou dix objets par un seul objet d'une sorte particulière ou à une position particulière. De tels systèmes amènent naturellement aux premières manières de représenter les nombres sous une forme écrite, comme dans les systèmes babylonien, égyptien, grec, chinois, et nombres en chiffres romains ; mais de telles notations sont comparativement moins pratiques pour effectuer des opérations arithmétiques à part dans les cas les plus simples.

Durant le vingtième siècle, des historiens des mathématiques ont mené des études complètes des plus anciennes tablettes cunéiformes trouvées par des archéologues au Moyen-Orient. Ces études montrent que les babyloniens avaient vraiment deux systèmes de représentation numérique : les nombres utilisés dans les transactions des affaires quotidiennes étaient écrits dans une notation basée sur des groupements par dix, cent, etc ; cette notation avait été héritée des premières civilisations mésopotamiennes, et les grands nombres n'étaient pas souvent nécessaires. Quand des problèmes mathématiques plus difficiles furent considérés, pourtant, les mathématiciens babyloniens firent un usage intensif d'une notation positionnelle sexagésimale (de racine soixante) qui se développa beaucoup au minimum dès 1750 av.J.-C. Cette notation était unique en ce qu'elle était effectivement une forme de représentation à *virgule flottante* avec les exposants omis ; le facteur d'échelle effectif ou la puissance de soixante devait être fourni par le contexte, de telle façon que, par exemple, les nombres 2, 120, 7200, et  $\frac{1}{30}$  étaient tous écrits de façon identique. La notation était particulièrement pratique pour la multiplication et la division, en utilisant des tables auxiliaires, puisque l'alignement du point racine n'avait pas d'effet sur la réponse. Comme exemples de notation babylonienne, considérons les extraits suivants des premières tables : le carré de 30 est 15 (ce qui peut aussi se lire, "le carré de  $\frac{1}{2}$  est  $\frac{1}{4}$ ") ; la réciproque de  $81 = (121)_{60}$  est  $(442640)_{60}$  ; et le carré de ce dernier est  $(32551831640)_{60}$ . Les babyloniens avaient un symbole pour zéro, mais à cause de leur philosophie "en virgule flottante", il était utilisé seulement à l'intérieur des nombres, et non pas à l'extrémité droite des nombres pour dénoter un facteur d'échelle. Pour l'histoire intéressante des très anciennes mathématiques babyloniennes, voir O. Neugebauer, *The Exact Sciences in Antiquity* (Princeton, N. J. : Princeton University Press, 1952), et B. L. van der Waerden, *Science Awakening*, traduit par A. Dresden (Groningen : P. Noordhoff, 1954) ; voir également D. E. Knuth, *CACM* **15** (1972), 671-677 ; **19** (1976), 108.

La notation positionnelle à point fixe a été apparemment conçue pour la première fois par les indiens Maya en Amérique centrale il y a 2000 ans ; leur système de racine 20 était grandement développé, particulièrement en relation avec les enregistrements astronomiques et les dates du calendrier. Ils

ont commencé à utiliser un signe écrit pour zéro environ en 200 apr.J.-C. Mais les conquérants espagnols détruisirent presque tous les livres Maya sur l'histoire et la science, et donc nous avons comparativement peu de connaissance au sujet du degré de sophistication que les amérindiens avaient atteint en arithmétique. Des tables destinées spécifiquement à la multiplication ont été trouvées, mais aucun exemple de division n'est connu. [Voir J. Eric S. Thompson, *Contrib. to Amer. Anthropology and History* **7** (Carnegie Inst. of Washington, 1941), 37-67 ; J. Justeson, "Pratiche di calcolo nell'antica mesoamerica," *Storia della Scienza* **2** (Rome: Istituto della Enciclopedia Italiana, 2001), 976-990.]

Plusieurs siècles avant J.-C., les grecs employaient une forme initiale d'abaque pour faire leurs calculs arithmétiques, en utilisant du sable et/ou des cailloux sur une planche qui a des lignes et des colonnes correspondant de manière naturelle à notre système décimal. Il nous est peut-être surprenant que le même système de notation positionnelle n'ait jamais été adapté aux formes écrites des nombres, dans la mesure où nous sommes si habitués au système de calcul avec papier et crayon ; mais la grande facilité du calcul par les abaques (puisque l'écriture manuscrite n'était pas une compétence commune, et puisque les utilisateurs d'abaques n'avaient pas besoin de mémoriser les tables d'addition et de multiplication) a sûrement fait penser aux grecs qu'il serait même idiot de suggérer que le calcul puisse être mieux fait sur "papier brouillon". Au même moment, les astronomes grecs utilisaient la notation positionnelle sexagésimale pour les fractions, puisqu'ils l'avaient apprise des babyloniens.

Notre notation décimale, qui diffère des formes plus anciennes principalement à cause de son point racine fixe, ainsi qu'avec son symbole pour zéro pour marquer une position vide, a été développée d'abord en Inde dans la culture hindoue. La date exacte à laquelle cette notation est apparue pour la première fois est assez incertaine ; environ 600 apr.J.-C. semble être une bonne possibilité. La science hindoue était grandement développée à cette époque, particulièrement en astronomie. Les manuscrits hindous les plus anciens qui ont été trouvés qui montrent la notation décimale contiennent des nombres écrits de droite à gauche (avec le chiffre le plus significatif écrit à droite), mais bientôt, il devint standard d'écrire le chiffre le plus significatif à gauche.

Les principes hindous de l'arithmétique décimale ont été emmenés en Perse environ en 750 apr.J.-C., lorsque plusieurs travaux importants furent traduits en arabe ; un compte-rendu imagé de ce développement est fourni dans un document hébreu de Abraham Ibn Ezra, qui a été traduit en anglais dans *AMM* **25** (1918), 99–108. Peu de temps après cela, al-Khwārizmī écrivit son livre en arabe sur ce sujet. (Comme noté dans le chapitre 1, notre mot "algorithme" vient du nom al-Khwārizmī's.) Son travail a été traduit en latin et a eu une forte influence sur Leonardo Pisano (Fibonacci), dont le livre d'arithmétique (en 1202 apr.J.-C.) a joué un rôle majeur dans la diffusion des numéraux hindous-arabes en Europe. Il est intéressant de noter que l'ordre d'écriture de droite à gauche pour les nombres est resté inchangé lors de ces deux transitions, bien que l'arabe s'écrive de droite à gauche alors que l'hindou et le latin littéraires s'écrivent en général de gauche à droite. Un compte-rendu détaillé de la propagation dans toutes les parties de l'Europe de la numération décimale et de l'arithmétique qui ont suivi durant la période 1200-1600 a été fourni par David Eugene Smith dans son *History of Mathematics* **1** (Boston: Ginn and Co., 1923), Chapitres 6 et 8.

La notation décimale a été appliquée d'abord seulement aux nombres entiers, mais non aux frac-

tions. Les astronomes arabes, qui avaient besoin de fractions dans leurs graphiques des étoiles et leurs autres tables, ont continué à utiliser la notation de Ptolémée (le célèbre astronome grec), une notation basée sur les fractions sexagésimales. Ce système perdure aujourd’hui dans les unités trigonométriques que sont les degrés, minutes, et secondes, et également dans nos unités de mesure de durées, comme une survivance de la notation babylonienne sexagésimale. Les premiers mathématiciens européens utilisaient également les fractions sexagésimales lorsqu’ils travaillaient avec des nombres non entiers ; par exemple, Fibonacci a donné la valeur

$$1^{\circ} 22' 7'' 42''' 33^{IV} 4^V 40^{VI}$$

comme une approximation de la racine de l’équation  $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$ . (La réponse correcte est  $1^{\circ} 22' 7'' 42''' 33^{IV} 4^V 38^{VI} 30^{VII} 50^{VIII} 15^{IX} 43^X \dots$ )

L’utilisation de la notation décimale également pour les dizaines, centaines, milliers, etc., de façon similaire semble être comparativement un changement mineur ; mais, bien sûr, il est difficile de rompre la tradition, et les fractions sexagésimales ont un avantage sur les fractions décimales parce que de tels nombres peuvent être exprimés exactement, d’une façon simple.

Les mathématiciens chinois, qui n’ont jamais utilisé les sexagésimaux, ont été apparemment les premières personnes à travailler avec l’équivalent des fractions décimales, même si leur système numéral (dans lequel il manque zéro) n’était pas originellement un système numérique positionnel au sens strict. Les unités chinoises de poids et mesures étaient décimales, de telle façon que Tsu Ch’ung-Chih (qui est mort en 500 ou 501 apr.J.-C.) était capable d’exprimer une approximation de  $\pi$  de la forme suivante :

$$3 \text{ chang, } 1 \text{ ch'in, } 4 \text{ ts'un, } 1 \text{ fen, } 5 \text{ li, } 9 \text{ hao, } 2 \text{ miao, } 7 \text{ hu.}$$

Ici chang,..., hu sont des unités de mesure de longueurs ; 1 hu (le diamètre d’un fil de soie) égale 1/10 miao, etc. L’utilisation de telles fractions de style décimal était assez répandue en Chine après 1250 environ.

Une forme embryonnaire de véritables fractions décimales positionnelles apparut dans un texte arithmétique du 10<sup>ième</sup> siècle, écrit en langue de Damas par un obscur mathématicien appelé al-Uqlīdisī (“l’Euclidien”). Il marquait occasionnellement la place du point décimal, par exemple en connexion avec un problème d’intérêts composés, le calcul de 135 fois  $(1.1)^n$  pour  $1 \leq n \leq 5$ . [Voir A. S. Saidan, *The Arithmetic of al-Uqlīdisī* (Dordrecht : D. Reidel, 1975), 110, 114, 343, 355, 481-485.] Mais il ne développa pas l’idée très complètement, et sa ruse fut bientôt oubliée. Al-Samaw’al de Bagdad et Bakou, écrivant en 1172, comprit que  $\sqrt{10} = 3.162277\dots$ , mais il ne disposait pas d’un moyen pratique d’écrire de telles approximations. Plusieurs siècles passèrent avant que les fractions décimales ne soient réinventées par un mathématicien perse, Al-Kāshī, qui mourut en 1429. Al-Kāshī était un calculateur habile, qui donna la valeur de  $2\pi$  comme suit, correcte jusqu’à la 16<sup>ième</sup> décimale :

integer	fractions																
0	6	2	8	3	1	8	5	3	0	7	1	7	9	5	8	6	5

Ce fut de loin la meilleure approximation de  $\pi$  connue jusqu’à ce que Ludolph van Ceulen calcule laborieusement 35 décimales durant les années 1586-1610.

Les fractions décimales commencèrent à apparaître sporadiquement en Europe ; par exemple, une méthode appelée “méthode turque” était utilisée pour calculer  $153.5 \times 16.25 = 2494.375$ . Giovanni Bianchini les développa plus avant, avec des applications à l’arpentage, antérieures à 1450 ; mais comme al-Uqlīdisī, son travail semble n’avoir eu que peu d’influence. Christof Rudolff et François Viète suggérèrent l’idée à nouveau en 1525 et 1579. Finalement, un texte arithmétique de Simon Stevin, qui tomba indépendamment sur l’idée des fractions décimales en 1585, devint populaire. Le travail de Stevin, et la découverte des logarithmes bientôt après, rendit les fractions décimales banales en Europe durant le 17<sup>ième</sup> siècle. [Pour des remarques plus poussées et des références, voir D. E. Smith, *History of Mathematics* **2** (1925), 228-247; V. J. Katz, *A History of Mathematics* (1993), 225-228, 345-348; et G. Rosińska, *Quart. J. Hist. Sci. Tech.* **40** (1995), 17-32.]

Le système binaire de notation a sa propre histoire intéressante. De nombreuses tribus primitives qui existent de nos jours sont connues pour utiliser un système binaire ou “pair” de comptage (en faisant des groupes de deux plutôt que de cinq ou dix), mais elles ne comptent pas dans un véritable système de racine 2, puisqu’elles ne traitent pas les puissances de 2 d’une façon particulière. Voir *The Diffusion of Counting Practices* par Abraham Seidenberg, *Univ. of Calif. Publ. in Math.* **3** (1960), 215-300, pour des détails intéressants à propos des systèmes de nombres primitifs. Un autre exemple “primitif” d’un système principalement binaire est la notation musicale conventionnelle pour exprimer les rythmes et les durées de temps.

Les systèmes de numération non décimaux ont été étudiés en Europe durant le dix-septième siècle. Pendant de nombreuses années, les astronomes avaient utilisé occasionnellement l’arithmétique sexagésimale à la fois pour les entiers et pour les parties fractionnaires des nombres, au début pour calculer des multiplications [voir John Wallis, *Treatise of Algebra* (Oxford: 1685), 18-22, 30]. Le fait que *n’importe quel* entier plus grand que 1 puisse servir de racine a été affirmé apparemment pour la première fois de façon imprimée par Blaise Pascal *De Numeris Multiplicibus*, qui a été écrit environ en 1658 [voir les Œuvres Complètes de Pascal (Paris: Éditions du Seuil, 1963), 84-89]. Pascal a écrit, “Denaria enim ex instituto hominum, non ex necessitate naturæ ut vulgus arbitratur, et sane satis inepte, posita est” ; i.e., “Le système décimal a été établi, un peu bêtement pour sûr, selon l’habitude humaine, et non pas par nécessité naturelle comme la plupart des gens le pensent.” Il affirma que le système duodécimal (racine douze) serait un changement bienvenu, et il donna une règle pour tester si un nombre duodécimal est divisible par neuf. Erhard Weigel essaya de claironner son enthousiasme pour le système quaternaire (racine quatre) dans une série de publications commençant en 1673. Une étude détaillée de la racine douze a été menée par Joshua Jordaine, *Duodecimal Arithmetick* (Londres : 1687).

Bien que la notation décimale soit presque exclusivement utilisée pour l’arithmétique durant cette époque, les autres systèmes de poids et mesures furent rarement si ce n’est jamais basés sur des multiples de 10, et les transactions en affaires nécessitaient de bonnes compétences pour ajouter des quantités telles que les pounds, les shillings ou les pences. Pendant des siècles, les marchands avaient alors appris à calculer des sommes et des différences de quantités exprimées dans des unités particulières de monnaie, poids et mesures ; ainsi, ils faisaient de l’arithmétique dans des systèmes de numération non décimaux. Les unités communes de mesure des liquides en Angleterre, datant

du 13<sup>ème</sup> siècle ou avant, sont particulièrement remarquables :

2 gills	= 1 chopine	2 demibushels	= 1 bushel or firkin
2 chopines	= 1 pinthe	2 firkins	= 1 kilderkin
2 pinthes	= 1 quart	2 kilderkins	= 1 barrel
2 quarts	= 1 pottle	2 barrels	= 1 hogshead
2 pottles	= 1 gallon	2 hogsheads	= 1 pipe
2 gallons	= 1 peck	2 pipes	= 1 tun
2 pecks	= 1 demibushel		

Les quantités de liquide exprimées en gallons, pottles, quarts, pinthes, etc. étaient essentiellement écrits en notation binaire. Peut-être que les véritables inventeurs de l'arithmétique binaire furent des marchands de vin britanniques !

La première apparition connue d'une notation purement binaire date d'environ 1605 dans des manuscrits non publiés de Thomas Harriot (1560-1621). Harriot était un créateur qui devint d'abord célèbre en venant en Amérique comme représentant de Sir Walter Raleigh. Il inventa (entre autres choses) une notation comme celle que l'on utilise maintenant pour les relations "moins que" et "plus grand que" ; mais pour une certaine raison, il choisit de ne pas publier beaucoup de ses découvertes. Des extraits de ses notes sur l'arithmétique binaire ont été reproduites par John W. Shirley, *Amer. J. Physics* **19** (1951), 452-454 ; la découverte par Harriot de la notation binaire a été d'abord citée par Frank Morley dans *The Scientific Monthly* **14** (1922), 60-66.

Le premier traitement publié du système binaire est apparu dans le travail d'un éminent évêque cistercien, Juan Caramuel de Lobkowitz, *Mathesis Biceps* **1** (Campaniæ: 1670), 45-48. Caramuel étudia la représentation des nombres selon les racines 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, et 60 jusqu'à une certaine limite, mais il ne donna pas d'exemples d'opérations arithmétiques dans les systèmes de numération non décimaux excepté dans le cas sexagesimal.

Finalement, un article de G. W. Leibniz [*Mémoires de l'Académie Royale des Sciences* (Paris, 1703), 110-116], qui illustra l'addition, la soustraction, la multiplication et la division binaires amena vraiment la notation binaire sous les projecteurs, et son article est habituellement fourni comme référence pour la naissance de l'arithmétique en base 2. Leibniz fit référence ultérieurement au système binaire assez fréquemment. Il ne le recommandait pas pour des calculs pratiques, mais il souligna son importance dans les recherches de théorie des nombres, puisque les motifs dans les séquences de nombres sont souvent plus apparente en notation binaire qu'en notation décimale ; il donnait également une signification mystique au fait que tout soit exprimable en fonction de zéro et un. Les manuscrits non publiés de Leibniz montrent qu'il s'est intéressé à la notation binaire dès 1679, quand il fait référence au système binaire en l'appelant système "bimal" (analogue à "décimal").

Une étude attentive des premiers travaux de Leibniz sur les nombres binaires a été menée par Hans J. Zacher, *Die Hauptschriften zur Dyadik von G. W. Leibniz* (Frankfurt am Main: Klostermann, 1973). Zacher fait remarquer que Leibniz maîtrisait bien ce qu'on appelle "l'arithmétique locale" de John Napier, une manière de calculer avec des pierres qui revient à utiliser une abaque avec la racine 2. [Napier avait publié l'idée de l'arithmétique locale dans la troisième partie de son

petit livre *Rabdologiæ* en 1617 ; on peut appeler cela le premier “ordinateur binaire” au monde et c’est sûrement le moins cher du monde, bien que Napier ait bien senti qu’il était plus amusant que pratique. Voir la discussion de Martin Gardner dans *Knotted Doughnuts and Other Mathematical Entertainments* (New York : Freeman, 1986), Chapitre 8.]

Il est intéressant de noter que le concept important de puissances négatives à droite du point racine n’était pas encore bien compris à ce moment-là. Leibniz demanda à Jacques Bernoulli de calculer dans le système binaire, et Bernoulli “résolut” le problème en prenant une approximation à 35 chiffres de  $\pi$ , multipliée par  $10^{35}$ , et il exprima alors ce nombre dans le système binaire comme sa réponse. À une échelle plus petite, ça serait comme de dire que  $\pi \approx 3.14$ , et que  $(314)_{10} = (100111010)_2$  ; donc  $\pi$  en binaire, c’est 100111010 ! [Voir Leibniz, *Math. Schriften*, édité par C. I. Gerhardt, **3** (Halle : 1855), 97 ; deux des 118 bits de la réponse sont incorrects, du fait d’erreurs de calcul.] La motivation du calcul de Bernoulli était apparemment de voir si n’importe quel motif simple pouvait s’observer dans la représentation de  $\pi$ .

Charles XII de Suède dont le talent en mathématiques excédait peut-être celui des autres rois de l’histoire du monde tomba sur l’idée de l’arithmétique de racine 8 environ en 1717. C’est probablement une invention de lui, bien qu’il ait rencontré Leibniz brièvement en 1707. Charles sentait que les racines 8 ou 64 seraient plus pratiques pour les calculs que le système décimal, et il considéra l’introduction de l’arithmétique octale en Suède ; mais il mourut à la bataille avant de décréter un tel changement. [Voir *The Works of Voltaire* **21** (Paris : E. R. DuMont, 1901), 49 ; E. Swedenborg, *Gentleman’s Magazine* **24** (1754), 423-424.]

La notation octale fut proposée également en Amérique coloniale avant 1750, par le Révérend Hugh Jones, professeur au Lycée William et Mary [voir *Gentleman’s Magazine* **15** (1745), 377-379 ; H. R. Phalen, *AMM* **56** (1949), 461-465].

Plus d’un siècle plus tard, un ingénieur civil suédois-américain célèbre appelé John W. Nystrom décida d’amener à Charles XII ses plans une étape plus avant, en concevant un système complet de numération, poids et mesures basé sur une arithmétique en base 16. Il écrivit “Je n’ai pas peur, et je n’hésite pas, à plaider pour un système binaire pour l’arithmétique et la mesure. Je sais que j’ai la nature avec moi ; si je ne réussis pas à vous faire réaliser son utilité et sa grande importance pour l’humanité, cela reflètera le peu de crédit de notre génération sur nos scientifiques et nos philosophes.” Nystrom conçut des moyens particuliers pour prononcer les nombres hexadécimaux ; par exemple, (C0160)<sub>16</sub> devait se lire “vybong, bysanton.” On appela son système complet le système tonal, et il est décrit dans *J. Franklin Inst.* **46** (1863), 263-275, 337-348, 402-407. Un système similaire, mais basé sur la racine 8, a été étudié par Alfred B. Taylor [*Proc. Amer. Pharmaceutical Assoc.* **8** (1859), 115-216 ; *Proc. Amer. Philosophical Soc.* **24** (1887), 296-366]. L’utilisation accrue du système (métrique) français de poids et mesures amena un débat intensif autour des mérites de l’arithmétique décimale durant cette période ; en effet, l’arithmétique octale fut même proposée en France [J. D. Collenne, *Le Système Octaval* (Paris : 1845) ; Aimé Mariage, *Numération par Huit* (Paris: Le Nonnant, 1857)].

Le système binaire était bien connu comme une curiosité depuis l’époque de Leibniz, et environ 20 références antérieures à ce système ont été compilées par R. C. Archibald [*AMM* **25** (1918), 139-142].



Il était principalement utilisé pour le calcul de puissances, comme expliqué dans la section 4.6.3, et pour l'analyse de certains jeux et puzzles. Giuseppe Peano [*Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino* **34** (1898), 47- 55] utilisa la notation binaire comme base d'un ensemble de caractères "logiques" de 256 symboles. Joseph Bowden [*Special Topics in Theoretical Arithmetic* (Garden City: 1936), 49] donna son propre système de nomenclature pour les nombres hexadécimaux.

Le livre *History of Binary and Other Nondecimal Numeration* d'Anton Glaser (Los Angeles : Tomash, 1981) contient une discussion informative et presque complète au sujet du développement de la notation binaire, incluant les traductions anglaises de nombreux travaux cités plus haut [voir *Historia Math.* **10** (1983), 236-243].

Une grande partie de l'histoire récente des systèmes de numération est reliée au développement des ordinateurs. Les carnets de Charles Babbage pour l'année 1838 montrent qu'il avait considéré l'utilisation de nombres non décimaux dans son moteur analytique [voir M. V. Wilkes, *Historia Math.* **4** (1977), 421]. Un intérêt croissant dans les dispositifs mécaniques pour l'arithmétique, spécialement pour la multiplication, amena plusieurs personnes dans les années 1930 à considérer le système binaire à cette fin. Un compte-rendu particulièrement détaillé d'une telle activité apparaît dans l'article "Binary Calculation" d'E. William Phillips [*Journal of the Institute of Actuaries* **67** (1936), 187-221] avec un enregistrement de la discussion qui suivit l'exposé qu'il donna sur le sujet. Phillips commence par dire, "Le but ultime [de cet article] est de persuader l'ensemble du monde civilisé d'abandonner la numération décimale et d'utiliser la numération octale [c'est-à-dire de racine 8] à la place."

Les lecteurs modernes de l'article de Phillips seront peut-être surpris de découvrir qu'un système de numération en base 8 était appelé "octonaire" ou "octonal," selon tous les dictionnaires anglais de l'époque, exactement comme le système en base 10 est dit "denary" ou "décimal" ; le mot "octal" n'est apparu dans les dictionnaires anglais qu'en 1961, et il doit apparemment son origine à un terme pour la base d'une certaine classe de tubes à vide. Le mot "hexadécimal," qui s'est introduit dans notre langage assez récemment, est un mélange de racines grecque et latine ; des mots plus appropriés seraient "senidenary" ou "sedécimal" ou même "sexadécimal," mais ce dernier est peut-être trop risqué pour les programmeurs.

Le commentaire de M. Wales cité au début de ce chapitre a été extrait d'une discussion imprimée avec l'article de Phillips. Un autre homme qui assistait au même exposé objecta au système octal : "5% devient 3.1463 per 64, ce qui sonne assez horriblement à l'oreille."

Phillips trouva l'inspiration à sa proposition dans un circuit électronique qui était capable de compter en binaire (C. E. Wynn-Williams, *Proc. Roy. Soc. London* **A136** (1932), 312-324]. Les circuits électromécaniques et électroniques pour les opérations d'arithmétique générale furent développés durant la fin des années 1930, notamment par John V. Atanasoff et George R. Stibitz aux États-Unis d'Amérique, L. Couffignal et R. Valtat en France, Helmut Schreyer et Konrad Zuse en Allemagne. Tous ces inventeurs utilisèrent le système binaire, bien que Stibitz ait développé plus tard une notation décimale codée en binaire par complément à 3. Un compte-rendu fascinant de ces premiers développements, incluant les réimpressions et traductions de documents contemporains importants, se trouve dans le livre de Brian Randell *The Origins of Digital Computers* (Berlin :

Springer, 1973).

Les premiers ordinateurs américains rapides, construits au début des années 1940, utilisaient l'arithmétique décimale. Mais en 1946, un important memorandum par A. W. Burks, H. H. Goldstine, et J. von Neumann, en lien avec la conception des premiers ordinateurs à programme mémorisé, donna des raisons détaillées pour quitter définitivement la tradition et utiliser la notation en base deux [voir John von Neumann, *Collected Works* 5, 41-65]. Depuis lors, les ordinateurs binaires se sont multipliés. Après une douzaine d'années d'expérience avec les machines binaires, une discussion sur les avantages et les désavantages relatifs de la notation en base 2 a été fournie par W. Buchholz dans son article "Fingers or Fists ?" [*CACM* 2, 12 (December 1959), 3-11].

L'ordinateur MIX utilisé dans ce livre était défini de telle façon à pouvoir être soit binaire soit décimal. Il est intéressant de noter que presque tous les programmes pour le MIX peuvent s'écrire sans savoir si c'est la notation binaire ou la notation décimale qui est utilisée, même quand on fait des calculs dans lesquels intervient de l'arithmétique multi-précision. On trouve ainsi que le choix de la base n'influence pas de façon significative la manière de programmer. (Les algorithmes "booléens" dont il est question dans la section 7.1 constituent cependant des exceptions notables à cette assertion ; voir également l'algorithme 4.5.2B.)

Il y a différentes manières de représenter les nombres négatifs dans un ordinateur, et cela influence parfois la manière dont l'arithmétique est effectuée. Pour comprendre ces notations, considérons d'abord MIX comme si c'était un ordinateur décimal ; alors chaque mot contiendrait 10 symboles et un signe, par exemple

$$(2) \quad -12345\ 67890.$$

On appelle cela une représentation en *grandeur signée*. Une telle représentation est en accord avec les conventions habituelles de notation, et elle est donc préférée par de nombreux programmeurs. Un désavantage potentiel est que moins zero et plus zero peuvent tous les deux être représentés, alors qu'ils devraient habituellement représenter le même nombre ; cette possibilité nécessite quelque attention en pratique, bien qu'elle soit parfois utile.

La plupart des calculateurs mécaniques qui font de l'arithmétique décimale utilisent un autre système appelé notation par *complémentation à dix*. Si on soustrait 1 de 00000 00000, on obtient 99999 99999 dans cette notation ; en d'autres termes, aucun signe explicite n'est attaché au nombre, et le calcul est fait modulo  $10^{10}$ . Le nombre  $-12345\ 67890$  devrait apparaître comme

$$(3) \quad 87654\ 32110$$

dans la notation par complémentation à dix. Il est conventionnel de regarder n'importe quel nombre dont le chiffre dominant est 5, 6, 7, 8, ou 9 comme une valeur négative dans cette notation, bien que par rapport à l'addition et à la soustraction, il n'y ait pas de mal à regarder (3) comme le nombre  $+87654\ 32110$  s'il est pratique de le faire. Notons qu'il n'y pas de problème de moins zéro dans un tel système.

La principale différence entre les grandeurs signées et les notations par complémentation à dix en pratique est que le décalage à droite ne divise pas la grandeur par dix ; par exemple, le nombre

$-11 = \dots 99989$ , décalé de un à droite donne  $\dots 99998 = -2$  (en supposant qu'un décalage à droite insère un 9 comme chiffre dominant quand le nombre décalé est négatif). En général,  $x$  décalé à droite d'un symbole en notation par complémentation à dix donnera  $\lfloor x/10 \rfloor$ , que  $x$  soit positif ou négatif.

Un désavantage possible du système de complémentation à dix est le fait qu'elle n'est pas symétrique par rapport à zéro ; le nombre négatif à  $p$  symboles  $500\dots 0$  n'est l'opposé d'aucun nombre positif à  $p$  symboles. Ainsi, il est possible qu'un changement de  $x$  en  $-x$  cause un overflow. (voir les exercices 7 et 31 pour une discussion de la notation par complémentation à la racine en précision *infinie*.)

Une autre notation qui a été utilisée depuis les débuts des ordinateurs de grande vitesse est appelée représentation par *compléments à neuf*. Dans cette notation, le nombre  $-12345\ 67890$  devrait apparaître comme

$$(4) \qquad 87654\ 32109.$$

Chaque symbole d'un nombre négatif ( $-x$ ) est égal à 9 moins le symbole correspondant de  $x$ . Il n'est pas difficile de voir que la notation par complémentation à neuf d'un nombre négatif est toujours un de moins que la notation correspondante en complémentation à dix. L'addition et la soustraction se font modulo  $10^{10} - 1$ , ce qui signifie qu'une retenue à l'extrémité gauche doit être ajoutée à l'extrémité droite. (voir la discussion de l'arithmétique modulo  $w - 1$  dans la section 3.2.1.1.) À nouveau, il y a un problème potentiel avec moins zéro, puisque  $99999\ 99999$  et  $00000\ 00000$  dénotent la même valeur.

Les idées qui viennent d'être expliquées pour l'arithmétique en base 10 s'appliquent de façon similaire en base 2, où on a *des grandeurs signées, par complémentation à deux*, et pour les notations *par complémentation aux uns*. L'arithmétique par complémentation à deux sur des nombres de  $n$ -bits est l'arithmétique modulo  $2^n$  ; l'arithmétique par complémentation aux uns est l'arithmétique modulo  $2^n - 1$ . L'ordinateur MIX, utilisé pour les exemples de ce chapitre, ne traite que l'arithmétique en grandeur signée ; pourtant, des procédures alternatives pour les notations par complémentation sont discutées dans les textes d'accompagnement quand il est important qu'elles le soient.

Les lecteurs méticuleux et les éditeurs de copies devraient noter l'utilisation du singulier ou du pluriel dans des termes comme "complémentation à deux" et "complémentation aux uns" : un nombre en complémentation à deux est complémenté par rapport à une seule puissance de 2, alors qu'un nombre par complémentation aux uns est complémenté par rapport à une longue séquence de 1. En effet, il y a également une "notation par complémentation aux deux", qui a comme base 3 et la complémentation est effectuée au nombre  $(2\dots 22)_3$

Les descriptions du langage machine nous disent souvent qu'un circuit d'ordinateur est conçu avec le point racine à une certaine position dans chaque mot numérique. De telles assertions devraient habituellement être ignorées. Il est préférable d'apprendre les règles concernant la position à laquelle le point racine sera dans le résultat d'une instruction si on suppose qu'il était à telle position avant l'opération. Par exemple, dans le cas du MIX, on peut regarder nos opérands soit comme des entiers avec un point racine à l'extrémité droite, soit comme des fractions avec le point racine à l'extrémité gauche, ou comme un mélange de ces deux extrêmes ; les règles pour l'apparition du

point racine après addition, soustraction, multiplication, ou division sont évidentes.

Il est facile de voir qu'il y a une relation simple entre la racine  $b$  et la racine  $b^k$  :

$$(5) \quad (\dots a_3 a_2 a_1 a_0 . a_{-1} a_{-2} \dots)_b = (\dots A_3 A_2 A_1 A_0 . A_{-1} A_{-2} \dots)_{b^k},$$

où

$$A_j = (a_{kj+k-1} \dots a_{kj+1} a_{kj})_b ;$$

voir l'exercice 8. Ainsi on a des techniques simples pour convertir à vue entre, disons, la notation binaire et la notation hexadécimale.

De nombreuses variations intéressantes sur les systèmes de numération positionnelle sont possibles en plus des systèmes standards en base  $b$  dont il a été question jusque-là. Par exemple, on pourrait avoir des nombres en base  $(-10)$ , de telle façon que

$$\begin{aligned} (\dots a_3 a_2 a_1 a_0 . a_{-1} a_{-2} \dots)_{-10} \\ &= \dots + a_3(-10)^3 + a_2(-10)^2 + a_1(-10)_1 + a_0 + \dots \\ &= \dots - 1000a_3 + 100a_2 - 10a_1 + a_0 - \frac{1}{10}a_{-1} + \frac{1}{100}a_{-2} - \dots \end{aligned}$$

Ici les symboles individuels satisfont  $0 \leq a_k \leq 9$  exactement comme dans le système décimal. Le nombre 12345 67890 apparaît dans le système "négadécimal" comme

$$(6) \quad (1\ 93755\ 73910)_{-10},$$

puisque ce dernier représente  $10305070900 - 9070503010$ . Il est intéressant de noter que l'opposé de ce nombre,  $-12345\ 67890$ , devrait s'écrire

$$(7) \quad (28466\ 48290)_{-10},$$

et, en fait, *tout nombre réel qu'il soit positif ou négatif peut être représenté sans signe* dans le système de base  $-10$ .

Les systèmes à base négative ont été étudiés d'abord par Vittorio Grünwald [*Giornale di Matematiche di Battaglini* **23** (1885), 203-221, 367], qui a expliqué comment effectuer les quatre opérations dans de tels systèmes ; Grünwald a également étudié l'extraction de racine, les tests de divisibilité et la conversion entre bases. Pourtant son travail semble n'avoir eu aucun effet sur d'autres recherches, puisqu'il a été publié dans un journal obscur, et qu'il a été bientôt oublié. La publication suivante sur les systèmes à base négative a été apparemment celle de A. J. Kempner [*AMM* **43** (1936), 610-617], qui a étudié les propriétés des racines non entières et a remarqué dans une note de bas de page que les racines négatives seraient utilisables également. Après vingt années supplémentaires, l'idée a été redécouverte à nouveau, cette fois par Z. Pawlak et A. Wakulicz [*Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences*, Classe III, **5** (1957), 233-236; Série des sciences techniques **7** (1959), 713-721], et également par L. Wadel [*IRE Transactions* **EC-6** (1957), 123]. Des ordinateurs expérimentaux appelés SKRZAT 1 et BINEG, qui utilisaient  $-2$  comme racine de l'arithmétique, ont été construits à la fin des années 1950 en Pologne ; voir N. M. Blachman, *CACM* **4** (1961), 257; R. W. Marczyński, *Ann. Hist. Computing* **2** (1980), 37-48. Pour de plus amples références, voir *IEEE Transactions* **EC-12** (1963), 274-277 ; *Computer Design* **6** (May 1967), 52-63. Il est clair que l'idée des bases négatives est apparue indépendamment à plusieurs personnes. Par exemple, D. E. Knuth avait discuté des racines négatives en 1955, ainsi que des généralisations à des racines à valeurs complexes,



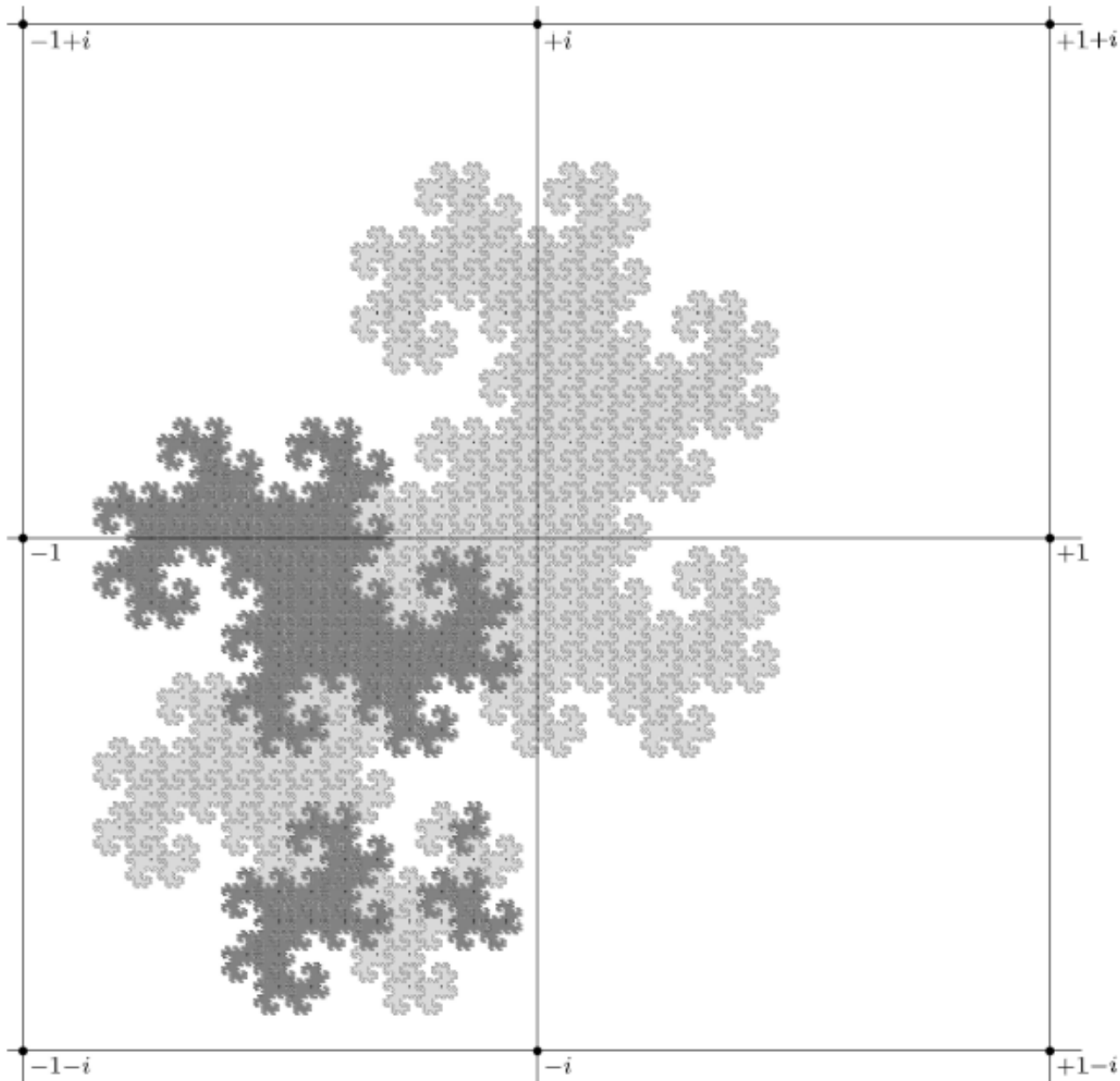


FIG. 1. L'ensemble fractal  $S$  appelé "dragon-siamois."

Dans ce système, on a besoin des seuls symboles 0 et 1. Une manière de démontrer que tout nombre complexe a une telle représentation consiste à considérer l'ensemble intéressant  $S$  présenté sur la figure Fig. 1 ; cet ensemble est, par définition, l'ensemble de tous les points qui peuvent s'écrire sous la forme  $\sum_{k \geq 1} a_k (i-1)^{-k}$ , pour une séquence infinie  $a_1, a_2, a_3, \dots$  de zéros et de uns. Il est aussi connu sous le nom de "fractal du dragon-siamois" [voir M. F. Barnsley, *Fractals Everywhere*, seconde édition (Academic Press, 1993), 306, 310]. La figure 1 montre que  $S$  peut être décomposée en 256 pièces congruentes à  $\frac{1}{16}S$ . Notons que si le diagramme de  $S$  est tourné dans le sens des aiguilles d'une montre de  $135^\circ$ , on obtient deux ensembles adjacents congruents à  $(1/\sqrt{2})S$ , parce que  $(i-1)S = S \cup (S+1)$ . Pour des détails de la preuve que  $S$  contient tous les nombres complexes qui sont d'une grandeur suffisamment petite, voir l'exercice 18.

Peut-être que le système de numération le plus joli de tous est celui de la notation *ternaire balancée*, qui consiste en une représentation en base 3 en utilisant  $-1, 0$ , et  $+1$  comme “trits” (symboles ternaires) à la place de  $0, 1$ , et  $2$ . Si on utilise le symbole  $\bar{1}$  pour représenter  $-1$ , on a les exemples suivants de nombres ternaires balancés :

Balanced ternary	Decimal
$10\bar{1}$	$8$
$11\bar{1}0.\bar{1}\bar{1}$	$32\frac{5}{9}$
$\bar{1}\bar{1}10.11$	$-32\frac{5}{9}$
$\bar{1}\bar{1}10$	$-33$
$0.11111\dots$	$\frac{1}{2}$

Une manière de trouver la représentation d’un nombre dans le système balancé ternaire est de commencer par le représenter en notation ternaire ordinaire ; par exemple

$$208.3 = (21201.022002200220\dots)_3.$$

(Une méthode très simple avec papier-crayon pour convertir en notation ternaire est donnée dans l’exercice 4.4-12.) Maintenant, ajoutons le nombre infini  $\dots11111.11111\dots$  en notation ternaire ; on obtient, dans l’exemple ci-dessus, le nombre infini

$$(\dots11111210012.210121012101\dots)_3.$$

Finalement, soustrayons  $\dots11111.11111\dots$  en décrémentant chaque symbole ; on obtient

(8) 
$$208.3 = (10\bar{1}\bar{1}01.10\bar{1}010\bar{1}010\bar{1}0\dots)_3.$$

Ce processus peut clairement être rendu rigoureux si on remplace le nombre artificiel infini  $\dots11111.11111\dots$  par un nombre avec le nombre de uns adéquat.

Le système balancé ternaire a de nombreuses propriétés plaisantes :

- a) L’opposé d’un nombre est obtenu en échangeant  $1$  et  $\bar{1}$ .
- b) Le signe d’un nombre est donné par son trit non nul le plus significatif, et en général, on peut comparer deux nombres quelconques en les lisant de gauche à droite et en utilisant l’ordre lexicographique, comme dans le système décimal.
- c) L’opération d’arrondir à l’entier le plus proche est identique à la troncature ; en d’autres termes, on efface simplement tout ce qui est à droite du point racine.

L’addition dans le système balancé ternaire est assez simple, en utilisant la table

$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$	$0$	$0$	$0$	$0$	$0$	$0$	$0$	$0$	$1$	$1$	$1$	$1$	$1$	$1$	$1$	$1$	$1$	$1$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$	$0$	$0$	$0$	$1$	$1$	$1$	$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$	$0$	$0$	$0$	$1$	$1$	$1$	$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$	$0$	$0$	$0$	$1$	$1$	$1$
$\bar{1}$	$0$	$1$	$\bar{1}$	$0$	$1$	$\bar{1}$	$0$	$1$	$\bar{1}$	$0$	$1$	$\bar{1}$	$0$	$1$	$\bar{1}$	$0$	$1$	$\bar{1}$	$0$	$1$	$\bar{1}$	$0$	$1$	$\bar{1}$	$0$	$1$
$\bar{1}0$	$\bar{1}1$	$\bar{1}$	$\bar{1}1$	$\bar{1}$	$0$	$\bar{1}$	$0$	$1$	$\bar{1}1$	$\bar{1}$	$0$	$\bar{1}$	$0$	$1$	$0$	$1$	$1\bar{1}$	$\bar{1}$	$0$	$1$	$0$	$1$	$1\bar{1}$	$1$	$1\bar{1}$	$10$

(Les trois entrées de l'addition sont les symboles des nombres à additionner et les symboles de retenue.) La soustraction est la négation suivie de l'addition. La multiplication se réduit aussi à la négation suivie de l'addition, comme dans l'exemple suivant :

$$\begin{array}{rcccc}
 & & 1 & \bar{1} & 0 & \bar{1} & & [17] \\
 \times & & 1 & \bar{1} & 0 & \bar{1} & & [17] \\
 \hline
 & & & \bar{1} & 1 & 0 & 1 & \\
 & \bar{1} & 1 & 0 & 1 & & & \\
 1 & \bar{1} & 0 & \bar{1} & & & & \\
 \hline
 0 & 1 & 1 & \bar{1} & \bar{1} & 0 & 1 & [289]
 \end{array}$$

La représentation des nombres dans le système ternaire balancé est implicitement présente dans un célèbre puzzle mathématique, appelé communément le “problème des poids de Bachet” - bien qu’il ait déjà été énoncé par Fibonacci quatre siècles avant que Bachet n’écrive son livre, et par Tabarī en Perse plus de 100 ans avant Fibonacci. Voir W. Ahrens, *Mathematische Unterhaltungen und Spiele* **1** (Leipzig: Teubner, 1910), Section 3.4; H. Hermelink, *Janus* **65** (1978), 105-117.] Les systèmes de numération positionnelle avec symboles négatifs furent inventés par J. Colson [*Philos. Trans.* **34** (1726), 161-173], puis ensuite oubliés et redécouverts environ 100 ans après par Sir John Leslie [*The Philosophy of Arithmetic* (Edinburgh: 1817) ; voir les pages 33-34, 54, 64-65, 117, 150], et par A. Cauchy [*Comptes Rendus Acad. Sci.* **11** (Paris, 1840), 789-798]. Cauchy nota que les symboles négatifs rendaient non nécessaire de mémoriser les tables de multiplication au-delà de  $5 \times 5$ . Une allégation selon laquelle de tels systèmes de numération étaient connus en Inde il y a fort longtemps [J. Bharati, *Vedic Mathematics* (Delhi: Motilal Banarsidass, 1965)] a été réfutée par K. S. Shukla [*Mathematical Education* **5,3** (1989), 129-133]. La première apparition véritable d’une notation balancée ternaire “pure” a eu lieu dans un article de Léon Lalande [*Comptes Rendus Acad. Sci.* **11** (Paris, 1840), 903-905], qui était concepteur de dispositifs mécaniques pour l’arithmétique. Thomas Fowler indépendamment a inventé et construit un calculateur ternaire balancé environ au même moment [voir *Report British Assoc. Adv. Sci.* **10** (1840), 55 ; **11** (1841), 39-40]. Le système de numération ternaire balancé a été mentionné seulement rarement pendant les 100 années suivantes, jusqu’au développement des premiers ordinateurs électroniques à l’école Moore d’ingénierie électrique en 1945-1946 ; à ce moment, il fut sérieusement considéré comme un remplaçant possible du système décimal. La complexité des circuits électriques pour la numération balancée ternaire n’est pas beaucoup plus compliquée qu’elle ne l’est pour les systèmes binaires, et un nombre donné nécessite seulement  $\ln 2 / \ln 3 \approx 63\%$  positions symboliques comparativement pour sa représentation. Des discussions sur le système ternaire balancé apparaissent dans *AMM* **57** (1950), 90-93, et dans *High-speed Computing Devices*, Engineering Research Associates (McGraw-Hill, 1950), 287-289. L’ordinateur expérimental russe SETUN était basé sur la notation ternaire balancée [voir *CACM* **3** (1960), 149-150], et peut-être que les propriétés de symétrie et d’arithmétique simple de ce système de numération s’avèreront importantes un jour, lorsque les “flip-flop” seront remplacés par des “flip-flap-flop.” La notation positionnelle se généralise d’une autre façon importante en un système de racines multiples mélangées. Étant donnée une séquence de nombres  $\langle b_n \rangle$  (où  $n$  peut être négatif, on définit

$$(9) \quad \left[ \begin{array}{c} \dots, a_3, a_2, a_1, a_0; a_{-1}, a_{-2}, \dots \\ \dots, b_3, b_2, b_1, b_0; b_{-1}, b_{-2}, \dots \end{array} \right] \\
 = \dots + a_3 b_2 b_1 b_0 + a_2 b_1 b_0 + a_1 b_0 + a_0 + a_{-1} / b_{-1} + a_{-2} / b_{-1} b_{-2} + \dots$$



Dans les systèmes les plus simples de bases mélangées, on travaille seulement avec des entiers ; soient  $b_0, b_1, b_2, \dots$  des entiers plus grands que un, et ne traitons que des nombres qui n'ont pas de point racine, où  $a_n$  doit être tel que  $0 \leq a_n < b_n$ .

Un des plus importants systèmes de numération à racines mélangées est le *système de numération factoriel*, où  $b_n = n + 2$ . En utilisant ce système, qui était connu au 13<sup>ième</sup> siècle en Inde, on peut représenter tout nombre entier positif de manière unique sous la forme

$$(10) \quad c_n n! + c_{n-1}(n-1)! + \dots + c_2 2! + c_1,$$

où  $0 \leq c_k \leq k$  for  $1 \leq k \leq n$ , et  $c_n \neq 0$ . (voir les algorithmes 3.3.2P et 3.4.2P.)

Les systèmes de numération à bases mélangées sont familiers dans la vie de tous les jours, où on utilise plusieurs unités de mesure. Par exemple, la quantité “3 semaines, 2 jours, 9 heures, 22 minutes, 57 secondes, et 492 millisecondes” est égale à

$$\left[ \begin{array}{cccccc} 3, & 2, & 9, & 22, & 57; & 492 \\ & 7, & 24, & 60, & 60; & 1000 \end{array} \right] \text{secondes.}$$

La quantité “10 pounds, 6 shillings, and thruppence ha’penny” a été un jour égale à  $\left[ \begin{array}{cccc} 10, & 6, & 3; & 1 \\ & 20, & 12; & 2 \end{array} \right]$  pences en monnaie britannique, avant que la Grande-Bretagne ne passe à un système monétaire purement décimal.

Il est possible d’ajouter et de soustraire des nombres multi-racines en utilisant une généralisation évidente des algorithmes habituels d’addition et de soustraction, en supposant bien sûr que le même système multi-racines soit utilisé pour la représentation des deux opérands. Similairement, on peut facilement multiplier ou diviser un nombre multi-racines par de petites constantes entières, en utilisant de simples extensions des méthodes papier-crayon familières.

Le premier à avoir discuté en toute généralité des systèmes multi-racines a été Georg Cantor [*Zeitschrift für Math. und Physik* **14** (1869), 121-128]. Les exercices 26 et 29 donnent davantage d’informations à leur propos.

Plusieurs questions concernant les racines *irrationnelles* ont été étudiées par W. Parry, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **11** (1960), 401–416.

Au-delà des systèmes décrits dans cette section, plusieurs autres manières de représenter les nombres ont été mentionnées ailleurs dans cette série de livres : le système de numération combinatoire ; le système de numération de Fibonacci ; le système de numération phi ; les représentations modulaires (Section 4.3.2) ; le code de Gray (Section 7.2.1) ; et les chiffres romains (Section 9.1).